Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Нееман, Геометризация спонтанно нарушенных калибровочных симметрий,
ТМФ, 2004, том 139, номер 3, 355–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:48:00

© 2004 г.

Ю. Нееман*

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ СПОНТАННО НАРУШЕННЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ СИММЕТРИЙ

Дается обзор геометрического подхода к спонтанно нарушенным калибровочным симметриям.

Ключевые слова: спонтанное нарушение симметрии, суперсимметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПО ПУТИ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ: С 1908 г. ПО 1925 г. И ПОСЛЕ 1974 г.

Отрывок из Плутарха о вере Платона в то, что Бог интересуется Геометрией [1], цитируется всякий раз, как речь заходит о рождении современной физики, даже если настоящая реализация существенно отличается от мечты Платона. Это не говорит плохо ни об идее Платона, опиравшегося на экспериментальную физику за 400 лет до н.э., ни о других гипотетических идеях того времени – таких, как догадка Пифагора о квантованной физической реальности, основанная на его прорыве в физике музыки (эта “музыка сфер” в конце концов была услышана – в первый раз – Бальмером примерно в 1900 г.). Еще одна заслуживающая уважения, хотя и чисто умозрительная идея – атомы Демокрита – была впервые осознана, когда Дальтон предложил свою версию 200 лет назад. Может быть, она сработает снова, уже в наше время, вместе с догадкой Пифагора [2] – учителя его учителя, если теория струн однажды “преуспеет” по-настоящему и станет основой всей физики (не просто нумерология Пифагора, но истинные вибрирующие струны . . .). Эта ожидаемая вторая победа воображения Демокрита связывается с ролью, которая отводится в “*М-теории*” (на сегодняшний день наиболее предпочтительной версии теории струн (см., например, [3]) с одной дополнительной размерностью, т.е. 11-мерной реальности) “*d-бранам*”, базовым $(d + 1)$ -мерным системам, вложенным или плавающим в пространстве-времени и включающим в себя струны ($d = 1$), мембраны ($d = 2$), “мешки” ($d = 3$), “гипермешки” ($d = 4$) и расширения Даффа–Стромингера ($d = 5$). Концептуальное сходство с пятью правильными полиэдрами Демокрита и Платона в некотором смысле претендует на структурное объяснение разнообразия природы.

*School of Physics and Astronomy, Raymond and Beverly Sackler Faculty of Exact Sciences, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel

Платоновская геометризация физики дважды реализовывалась в XX веке: в 1908–1925 гг. и снова после 1954 г., сопровождаясь вначале скромным уровнем активности, а затем, после 1974 г., необычайным взлетом. Геометрия как дисциплина, кстати говоря, *первая* научная дисциплина и модель того, из чего наука должна состоять и как должна быть организована (аксиомы, логический вывод и доказательства и т. д.), развивалась более всего посредством удачного сватовства. Пробуждение произошло благодаря Декарту в XVII веке посредством брачного союза геометрии и анализа, что привлекло приток талантов (например, Гаусса и его школы), от чего геометрия необычайно много выиграла. В конце XIX столетия она получила дополнительный толчок к развитию от Клейна и Софуса Ли с их Эрлангенской программой. На сей раз это была свадьба геометрии с алгеброй (двоеженство?). Минковский (профессор геометрии, учивший Эйнштейна в ЕТН, Цюрих) и Эмми Нётер обучались в этой среде.

Общеизвестно, что когда Эйнштейн предложил специальную теорию относительности (СТО), он и понятия не имел, что делает что-то геометрическое: он просто изучал симметрии уравнений Максвелла. Минковский первым осознал геометрическую сущность и выводы СТО [4], что хорошо усвоил и использовал Эйнштейн при переходе от кинематики СТО к динамике общей теории относительности (ОТО), который он осуществил с помощью своего школьного товарища Гроссмана, будучи подгоняемым и преследуемым Гильбертом . . . После ОТО геометрический путь сконцентрировался на унификации (в то время только с электромагнетизмом), используя три направления, все еще развивающиеся, а именно калибровочные теории, дополнительные размерности и суперсимметрию.

1. Два варианта калибровочной теории Г. Вейля [5] (R^1 в 1918 г. и $U(1)$ в 1928 г.) были возрождены и расширены на неабелевы группы в 1954 г. Янгом и Миллсом [6] и независимо от них Шоу. Во вторую (теперешнюю) геометрическую эру эти результаты были обобщены нашими [7] $SU(3)$ -ароматами (октет), которые вели нас далее к модели кварков [8] и квантовой хромодинамике (КХД) [9], с одной стороны, и к электрослабому объединению [10], с другой стороны, т.е. к стандартной модели и к калиброванию соответствующего полупрямого произведения $SU(3)^{\text{color}} \times SU(2)^{\text{weak isospin}} \times U(1)^{\text{weak hypercharge}}$ [11].

2. Калуца [12] и Клейн [13] предложили добавить пятое измерение (спонтанно компактифицированное [14]) для электрического заряда; этот подход был воскрешен в 1964 г. [15] и широко использовался после 1974 г. как в теории струн, так и в релятивистской квантовой теории поля (РКТП). Недавно он был обогащен новыми идеями о некомпактифицированных внешних размерностях [16].

3. Эйнштейн и Кауфманн добавили кручение, включив в метрику антисимметричную часть [17]. После 1925 г. мы работаем с ОТО как с РКТП, а для введения антисимметричной части в метрику нам нужны спинорные компоненты, т.е. супергравитация [18]. Прямое решение эйнштейновской программы частичного объединения было действительно найдено в $N = 2$ супергравитации [19] на начальном этапе. В то же время мы указали на возможность того, что $N = 8$ [20] может быть “искмым случаем”. Теория была построена [21], но появившиеся сложности с перенормировками перечер-

кнули этот путь; данная проблема снова проявилась внутри “ M -теории”, однако решение не получено до сих пор.

Первая эра геометризации закончилась прорывами в квантовой механике в 1925 г. ОТО представлялась странной, несмотря на все свои достоинства. Казалось, что только гравитация связана с геометрией, а все остальные взаимодействия настолько негеометризованны, насколько это возможно. После статьи Янга и Миллса в 1954 г. пламя разгорелось снова, хотя все еще вяло, разжигаемое попытками описать сильные взаимодействия набором калибровочных теорий. Примерами могут служить векторная теория сильных взаимодействий Сакураи, инициированная экспериментальными наблюдениями для векторных мезонов, подтвержденными электромагнитными форм-факторами, а также теория слабых взаимодействий после 1957 г. Последняя снабдила нас пониманием того, что эти взаимодействия не сохраняют четность, а включают в себя “ $V-A$ ”, т.е. векторные и аксиально-векторные токи, сохраняющиеся для V -части и только частично сохраняющиеся для A -части. В конце 60-х гг. мы уже поняли, что $SU(3)$ -симметрия [7] (“ароматы”) – это ключ к адронному спектру с барионами в определяющем октете. Настроения опять стали геометрическими, и обе задумки об $SU(3)$ -симметрии (“восьмеричный путь”) с самого начала предстали в виде калибровочной симметрии Янга–Миллса. Однако шестидесятые увидели и широко разрекламированный “обвал” (предполагаемый) РКТП, и ее замену на физику “на массовой поверхности”, и некоторые связанные с ней методы. Экспериментально подтвержденное приписывание универсальных свойств взаимодействий адронов октету с $J = 1^-$ (квазикалибровочные потенциалы) плюс синглету (для барионного числа) было также оправдано как динамическое приближение, индуцированное слабыми и электромагнитными сохраняющимися (или частично сохраняющимися) токами.

В то же время мы были увлечены успехами классификации и симметрии для понимания еще и другого субадронного уровня (кварков) [8]. В результате, хотя РКТП была реабилитирована в 70-х, экспериментальная подтвержденность кварковой модели сохранила статус “эффективной” калибровочной теории для адронных сильных взаимодействий в философии, в которой разница между “фундаментальным” и “составным” стала свойством, зависящим от энергии.

Возвращение РКТП было осуществлено Фейнманом посредством разрешения базовой проблемы о потере унитарности вне массовой поверхности, возникающей из-за конфликта двух инвариантностей. С одной стороны, существует $SL(4, \mathbb{R})$ -локальная тензорная природа (целоспиновых) *полей*, требуемая для удовлетворения принципа ковариантности Эйнштейна, (пассивная) симметрия относительно группы локальных диффеоморфизмов $\text{Diff}(4, \mathbb{R})$, нелинейно представленных над своей линейной подгруппой $SL(4, \mathbb{R})$. С другой стороны, мы имеем группу Пуанкаре, действующую на гильбертовом пространстве *состояний* частиц, построенном на локально-плоском касательном многообразии. Например, $A_\mu(x)$ имеет 4 компоненты, в то время как, если $A_\mu(x)$ рассматривать как безмассовую частицу со спином $J = 1$, то она имеет только 2 состояния – свои поперечные поляризации. Фейнман [22] предложил духовые состояния, чья инверсная квантовая статистика дает лишний знак минус в любой диаграмме; унитарность

вновь восстанавливается посредством наложения связей на духи так, чтобы они имели те же самые диаграммы, что и нежелательные компоненты (этот метод был развит далее Девиттом и Фаддеевым с Поповым). Это решение в результате дало нам действие, наделенное $Z(2)$ -квантовой статистикой над мультиплетами с любым спином, которые таким образом стали “супермультиплетами” соответствующего сорта. Бекки, Руэ, Стора [23] и независимо от них Тютин нашли алгебраический метод извлечения этого решения из набора уравнений связей, наложенных на духи и поля, перемешанные в квантовом лагранжиане, и образующих конечную супергруппу. Опираясь на гарантированную таким образом унитарность, стало возможным справиться и с другими аспектами ренормируемости, и усилия Славнова, Тейлора, Вельтмана и ’т Хоофта наконец достигли счастливого завершения в ренормализационной программе для полей Янга–Миллса и их взаимодействий. За этим сразу последовало открытие асимптотической свободы, и как продолжение появилась КХД.

2. ВТОРАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭРА, p-ФОРМЫ И СУПЕРСИММЕТРИЯ

Около 1974 г., вскоре после того, как было показано, что теория Янга–Миллса перенормируема, геометрические методы начали развиваться в двух направлениях: Янг и Ву [24] создали необходимый словарь между двумя очень разными на тот момент языками – “математическим” и “физическим”, в то время как ’т Хоофт и Поляков открыли топологические решения – монополь для случая спонтанно нарушенных симметрий [25] и инстантоны [26] для ненарушенного случая.

Понятие градуированной “суперскобки” Ли вошло в физику посредством наблюдения за поведением дифференциалов при интегрировании на многообразиях. Таким образом, она рассматривалась как геометрическая с самого начала. Полученная грасманова алгебра и ее геометрия были позже использованы в теории представлений спиноров в гильбертовом пространстве. Эти супералгебры были *de facto* суперабелевы и никак не взаимодействовали с еще одной алгебраической системой. Несуперабелевы супералгебры Ли последовали далее, открывая два направления: бесконечные супералгебры типа Вирасоро в “старой” теории суперструн (Невё, Шварц и Рамон), с одной стороны, а с другой – введение суперсимметрии Пуанкаре по Гольфанду и Лихтману. Суперсимметрия с того момента стала Большой Белой Надеждой (The Great White Hope) физики частиц, от которой ждали изгнания нашего парадокса *иерархий* и которая (на сегодняшний день) является решающей для всякого строгого доказательства свойств цветового конфайнмента и т. д., но на момент весны 2003 г. все еще без экспериментального подтверждения.

Исчисление форм вошло в эту часть физики в 1977–79 гг., когда в нашем поиске объединения мы с Редже пытались использовать метод факторизации. При этом гравитацию и супергравитацию изучали, стартуя с *жестких* (*rigid*) групповых многообразий Пуанкаре или супер-Пуанкаре, а затем факторизацией по параметрам группы Лоренца, что можно рассматривать как *смягчение* (*softening*) в смысле “Мягкого автопортрета” Сальвадора Дали (“Soft Self Portrait”), переходили к расслоению. Получающиеся базо-

вые многообразия этих расслоений есть соответственно риманово пространство-время и суперпространство. Лево- и правоинвариантные 1-формы Маурера–Картана играют важную роль [27]. Определение расслоения (калибровочной теории) включает в себя “вертикальное” направление, на котором действует структурная группа расслоения. Тьерри-Миег затем показал, что *если отождествить поля духов со (свернутыми) “вертикальными” частями 1-формы связности, уравнения связей БРСТ, существующие для унитарности, совпадают со “структурными уравнениями” Маурера–Картана для расслоения, определяющего калибровочную теорию*. Эти уравнения налагают связи на 2-форму кривизны так, что она оказывается чисто “горизонтальной”, и в этом нет ничего сверхъестественного, так как духи с самого начала были отождествлены с вертикальными компонентами [28].

3. ВНУТРЕННЯЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ

Соединяя эти различные элементы, я построил модель [29], предполагая, что некоторые из 15–20 свободных параметров в существующей на данный момент теории электрослабого объединения могут быть фиксированы наложением супергруппы $SU(2|1)$ как ограничивающей симметрии октета лоренцевских скаляров, сделанного из четырех духов, соответствующих $SU(2) \times U(1)$ калибровочных бозонов (т.е. скалярных антикоммутирующих 1-форм, построенных из сверток с дифференциалами в данном случае, или по полному рангу размерности расслоения, или только в вертикальном направлении), а также четырех вещественных компонент комплексного скалярного (изоспинорного) поля Хиггса и его эрмитово сопряженного.

Почти одновременно та же самая симметрия была предложена Фэйрле, рассматривавшим ее под другим углом, а именно с точки зрения размерной редукции [30].

Пусть g обозначает $Z(2)$ -четность элемента грассмановой алгебры, а h — $Z(2)$ -четность соответствующего суперматричного элемента относительно $Z(2)$ -суперскобки. Свернутые 4-потенциалы четырех калибровочных бозонов являются g -нечетными и h -четными и, таким образом, нечетными в прямом произведении “полного” $Z(2)$. Четыре компоненты поля Хиггса, будучи лоренцевыми скалярами, являются 0-формами, т.е. g -четными; как состояния изоспинора $\Phi(x)$ и его сопряженного $\Phi^\dagger(x)$ они занимают положения, являющиеся эквивалентами изменяющих странность положений в адронном мультиплете ароматов $SU(3)$ и являются h -нечетными. Полное $Z(2)$ -значение здесь является нечетным, как и положено для геометрической связности, “суперсвязности”, если следовать Квиллену, который пришел к тем же общим конструкциям из математических соображений в 1985 г. [31].

Действительно, разделение определяющей суперматрицы на четную и нечетную части по h -градуировке в (3×3) -случае приводит к разделению несущего супервектора на $(2(+))1$ -компоненты, что замечательным образом отвечает *киральностям*, например, (ν^0_L, e^-_L, e^-_R) , с четырехмерным представлением для кварков, столь же замечательным образом соответствует киральностям. Причина, по которой существует такое четырехмерное представление, есть результат наличия гомоморфизма $SU(2|1) \sim OSp(2|2)$ в силу $U(1) \sim SO(2)$ и $SU(2) \sim Sp(2)$ (OSp — ортосимплектический). Таким

образом, модель дает нам полуфизический октет, являющийся лоренцевым скаляром и построенный из духов потенциалов-посредников $W^{+/-}$, Z , A (или четырех $J = 1$ частиц, свернутых с дифференциалами), а также изоспинного поля Хиггса и его сопряженного. Я использовал термин “полуфизические”, потому что семь полей из восьми не являются полностью “физическими” в позитивистском смысле, но и не просто духами. Действительно, мы должны помнить, что три из четырех хиггсовских компонент в итоге являются вкладами в продольные компоненты $W^{+/-}$ и Z и, таким образом, делают их массивными.

4. СУПЕРСВЯЗНОСТЬ КВИЛЛЕНА И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КОННА

Математическая конструкция, изобретенная Квилленом [31], очень близка к нашей $SU(2|1)$. Вместе со Стернбергом [32] мы переформулировали модель 1979 г. в терминах Квиллена, математически хорошо определенных и позволяющих избежать одной концептуальной сложности, которая возникала при использовании определений образца 1979 г., а именно необходимости вводить новые духовые состояния для того, чтобы сделать смешанные мультиплеты из духов и частиц во всех представлениях, а не только в присоединенном. Чтобы разместить N частиц, необходимо $2N$ состояний, половина из которых были бы новыми (безвредными) духовыми состояниями.

Динамически супералгебра содержит антикоммутаторы h -нечетных элементов, так что h -четная компонента кривизны содержит квадратичные члены вида $d_{ij}^a \Phi^i(x) \Phi^j(x)$. Возводя в квадрат, чтобы построить гамильтониан, мы, таким образом, получаем член четвертой степени в хиггсовском потенциале с константой связи, масштаб которой определяется алгеброй в терминах констант связи $SU(2) \times U(1)$ -взаимодействия. Если принять единую нормировку для h -четной части, то в системе масштабируются две константы связи углом Вайнберга, для которого $\sin^2 \theta = 0.25$. Только отрицательный член, *квадратичный* по Φ , который инициирует ненулевое среднее вакуумное значение нейтральной компоненты хиггсовского поля, должен быть введен “руками”. Масса хиггсовской частицы предсказана [33] такой, что $M(\Phi) = 2M(W)$, однако приближенная линеаризованная оценка ренормгрупповых поправок [34] понижает значение до $M(\Phi) = 130 \pm 6$ ГэВ.

В это же самое время родилась еще одна ветвь математики, актуальная для нас, а именно некоммутативная геометрия Конна [35]. Конн и Лотт применили идеологию некоммутативной геометрии для перевывода электрослабой теории Вайнберга–Салама в чисто геометрической постановке [36]. Основное предположение состоит в том, что базовое пространство калибровочного расслоения есть произведение двухточечного “пространства” $Z(2)$ и пространства Минковского. “Точками” являются L и R , проектирующие соответствующую часть группы Лоренца. В результате произведение сводится к сумме $M_L \oplus M_R$.

Также было показано, что вышеупомянутая $SU(2|1)$ -модель может быть выведена таким же способом и вдобавок имеет еще два дополнительных преимущества, кроме порождаемых супералгеброй ограничений на константы связи.

1. Проблема, связанная с квантовой статистикой, полностью разрешена, и нет никакой необходимости в новых духах и т.п. Группа $Z(2)$ для несущего пространства может быть киральной $Z(2)^{\text{ch}}$ действительно и быть коррелированной с $Z(2)^{\text{superbracket}}$.

2. Несущее пространство есть результат соединения двух слоев, находящихся над двумя многообразиями $M^L(+)^M^R$. Рассмотрение параллельного переноса фиксирует композицию различных ковариантных производных. Движение внутри слоя (скажем, от точки $\nu^0_L(x)$ в другую точку на том же слое $e_L(y)$) осуществляется посредством обычной ковариантной производной, построенной для ненарушенной калибровочной симметрии. Однако переход от $\nu^0_L(x)$ в точку $e^-_R(y)$ достигается движением вначале в точку $e^-_L(y')$ с обычными калибровочными бозонами, после чего необходимо совершить дискретный скачок между двумя пространствами, со слоя над M_L в слой над M_R . Это должно соответствовать массовому оператору, который нарушает киральные барьеры.

Матрица μ^6 связывает e_L с e_R . В ковариантной производной, следовательно, должен быть новый элемент $\Delta\Phi$, где Δ — “матричная производная”, которая в данном случае является постоянной матрицей в направлении μ^6 ; она мнимая вследствие антиэрмитовости всех производных. В гамильтониане $R \wedge *R$ эти члены генерируют квадратичный по хиггсовскому потенциалу член с отрицательным знаком. Другие примеры такого решения, включающие матричные производные, продемонстрированы в работе [37].

Список литературы

- [1] *Plutarch*. Quaestiones Platonicae.
- [2] *Y. Ne'eman*. Pythagoreanism in atomic, nuclear and particle physics. In: Symmetry 2000. Proc. of Wenner-Gren Intern. Symp. 2000. Wenner-Gren Intern. Ser. V. 80. Eds. I. Hargittai and T. C. Laurent. London: Portland, 2002. P. 265.
- [3] *M. J. Duff* (ed.). Supergravity, Supermembranes and M -theory. Bristol: IOP, 1999.
- [4] *H. Minkowski*. Lecture at 80th Assembly of Ass. German Researchers and Physicians. Cologne: Univ. of Cologne, 1908.
- [5] *H. Weyl*. Math. Z. 1918. V. 2. P. 384; Z. Phys. 1929. V. 56. P. 330.
- [6] *C. N. Yang, R. L. Mills*. Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191.
- [7] *Y. Ne'eman*. Nucl. Phys. 1961. V. 26. P. 222; *M. Gell-Mann*. The eightfold way: a theory of strong interaction symmetry. Report CTSL-20. Pasadena, Calif.: California Institute of Technology, 1961.
- [8] *H. Goldberg, Y. Ne'eman*. Nuovo Cimento. 1953. V. 27. P. 1; *M. Gell-Mann*. Phys. Lett. 1964. V. 8. P. 214; *G. Zweig*. An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. I. CERN Reports 8182/TH 401. Geneva: CERN, 1964.
- [9] *M. Han, Y. Nambu*. Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 1006; *H. Fritzsch, M. Gell-Mann*. Current algebra: quarks and what else? In: Proc. XVIth Intern. Conf. on High Energy Physics. V. 2. Eds. J. D. Jackson, A. Roberts. Chicago: Chicago Univ. Press, 1972. P. 135; hep-th/0208010.
- [10] *S. Weinberg*. Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1264; *A. Salam*. Weak and electromagnetic interactions. In: Elementary Particle Theory. Ed. N. Svartholm. Stockholm: Almqvist and Wiksells, 1968. P. 367; *S. Glashow*. Nucl. Phys. 1961. V. 22. P. 579.
- [11] *S. Weinberg*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3583.
- [12] *Th. Kaluza*. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. 1921. V. K1. P. 966.
- [13] *O. Klein*. Nature. 1926. V. 118. P. 516.
- [14] *P. G. O. Freund, M. A. Rubin*. Phys. Lett. B. 1980. V. 97. P. 233.

- [15] *Y. Ne'eman*. Rev. Mod. Phys. 1965. V. 37. P. 227.
- [16] *N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali*. Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 263.
- [17] *A. Einstein, B. Kaufmann*. Ann. Math. 1964. V. 59. P. 230.
- [18] *S. Deser, B. Zumino*. Phys. Lett. B. 1976. V. 62. P. 335; *D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara*. Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3214.
- [19] *S. Ferrara, J. Scherk, P. van Nieuwenhuizen*. Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 1035.
- [20] *M. Gell-Mann, Y. Ne'eman*. Aspen Institute Seminar. June 1976 (unpublished).
- [21] *E. Cremmer, B. Julia*. Phys. Lett. B. 1978. V. 80. P. 48; Nucl. Phys. B. 1979. V. 159. P. 141.
- [22] *R. P. Feynman*. Acta Phys. Polon. 1963. V. 24. P. 697.
- [23] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora*. Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; *И. В. Тютин*. Калибровочная инвариантность в теории поля и в статистической физике в операторной формулировке. Препринт № 39. М.: ФИАН, 1975.
- [24] *T. T. Wu, C. N. Yang*. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3845.
- [25] *G. 't Hooft*. Nucl. Phys. B. 1974. V. 79. P. 276; *А. М. Поляков*. ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430.
- [26] *G. 't Hooft*. Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 8; *А. М. Polyakov*. Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 82; *A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyupkin*. Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.
- [27] *Y. Ne'eman, T. Regge*. Riv. Nuovo Cimento. Ser. 3. 1978. V. 1. № 5. P. 1.
- [28] *J. Thierry-Mieg*. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2834; *Y. Ne'eman, T. Regge, J. Thierry-Mieg*. Ghost fields, BRS and extended supergravity as applications of gauge geometry. In: Proc. 19th Intern. Conf. on High Energy Physics (Tokyo, Japan, August 23–30, 1978). Eds. S. Homma et al. Tokyo: Phys. Soc. Japan, 1979. P. 552; *L. Baulieu, J. Thierry-Mieg*. Phys. Lett. B. 1984. V. 145. P. 53.
- [29] *Y. Ne'eman*. Phys. Lett. B. 1979. V. 81. P. 190.
- [30] *D. B. Fairlie*. Phys. Lett. B. 1979. V. 82. P. 1079.
- [31] *D. Quillen*. Topology. 1985. V. 24. P. 89.
- [32] *S. Sternberg, Y. Ne'eman*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1990. V. 87. P. 7875.
- [33] *Y. Ne'eman*. Phys. Lett. B. 1986. V. 427. P. 19.
- [34] *S. Hwang, C. Y. Lee, Y. Ne'eman*. Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 3509.
- [35] *A. Connes*. Noncommutative Geometry. London: Academic Press, 1994.
- [36] *A. Connes, J. Lott*. Nucl. Phys. B. Proc. Supp. 1990. V. 18. P. 29.
- [37] *Y. Ne'eman*. Phys. Lett. B. 1998. V. 427. P. 19.