Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Шунь-Лун Ло, Шуан-Шуан Фу, Вычисление геометрической меры квантового разлада, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 519–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:29:56

© 2012 г.

Шунь-Лун Ло*, Шуан-Шуан Фу*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МЕРЫ КВАНТОВОГО РАЗЛАДА

Получены аналитические формулы для геометрической меры квантового разлада, введенной Дакичем, Ведралем и Брюнкером, для чистых состояний и $(2 \times n)$ -мерных состояний. Установлена общая нижняя граница для произвольных состояний.

Ключевые слова: квантовые корреляции, квантовый разлад, геометрическая мера квантового разлада, теорема о перемежаемости собственных значений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим относящееся к двум подсистемам квантовое состояние ρ для системы $H^a \otimes H^b$ с маргинальными состояниями $\rho^a = \text{tr}_b \rho$ и $\rho^b = \text{tr}_a \rho$ (частичные следы). Количественный анализ корреляций по ρ очень важен для квантовой теории информации. Помимо взаимной квантовой информации [1]

$$I(\rho) := S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho),$$

которая синтезирует полные корреляции, имеются различные меры запутывания, предназначенные для количественного выражения запутывания [2]. Здесь $S(\rho) := -\text{tr} \rho \log \rho$ — энтропия фон Неймана. В последнее время стало понятно, что запутывание не является единственным типом квантовых корреляций, и проявляющие квантовые свойства корреляции помимо запутывания были исследованы в работах [3]–[8]. В частности, квантовый разлад (quantum discord) [7]

$$Q(\rho) := \min_{\Pi^a} [I(\rho) - I(\Pi^a(\rho))]$$

как мера квантовых корреляций в последнее время привлекала значительное внимание исследователей (в работе [9] можно найти многочисленные ссылки по этому вопросу). Минимум здесь берется по измерениям фон Неймана $\Pi^a = \{\Pi_k^a\}$ (одномерные ортогональные проекторы, суммирующиеся в единичный оператор) по подсистеме a , а

$$\Pi^a(\rho) := \sum_k (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b)$$

*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, P. R. China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

представляет собой состояние после измерения, $\mathbf{1}^b$ – единичный оператор в пространстве H^b . Вообще говоря, квантовый разлад трудно вычислить, даже для двухкубитных состояний [10], [11].

Совсем недавно в работе [12] была введена геометрическая мера квантового разлада, которую можно эквивалентно выразить как [9]

$$D(\rho) := \min_{\Pi^a} \|\rho - \Pi^a(\rho)\|^2, \quad (1)$$

где минимум берется по измерениям фон Неймана $\Pi^a = \{\Pi_k^a\}$ на системе H^a , а

$$\|\rho - \chi\|^2 := \text{tr}(\rho - \chi)^2$$

– квадрат нормы Гильберта–Шмидта эрмитовых операторов.

Геометрическая мера квантового разлада была вычислена в некоторых частных случаях. Пусть $\{\sigma_i\}$ – спинорные матрицы Паули, тогда

$$\left\{ \hat{\sigma}_0 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}, \hat{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} : i = 1, 2, 3 \right\}$$

– ортонормированный базис операторов для системы кубитов по отношению к скалярному произведению Гильберта–Шмидта для операторов. Любое двухкубитное состояние можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_0 \otimes \hat{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_0 \otimes \sum_{i=1}^3 y_i \hat{\sigma}_i + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j,$$

а его геометрическая мера квантового разлада вычисляется как [9], [12], [13]

$$D(\rho) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|T\|^2 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \quad (2)$$

где $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ – вектор-столбец, $\|\mathbf{x}\|^2 := \mathbf{x}^t \mathbf{x} = \sum_i x_i^2$, $T := (t_{ij})$ – вещественная матрица, $\|T\|^2 := \text{tr} T T^t$, и $\{\lambda_i : i = 1, 2, 3\}$ – собственные значения (3×3) -матрицы $\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t$, записанные в порядке убывания (с учетом кратностей). Верхний индекс “ t ” обозначает транспонирование векторов или матриц.

Геометрическая мера квантового разлада является важной величиной при количественном описании квантовых корреляций с геометрической точки зрения [9], [12]–[14]. Если сравнивать с исходным квантовым разладом, хотя его вычисление и может быть значительно проще, то нам до сих пор не так много известно об этой величине, за исключением случаев двухкубитных состояний [12], [13] и некоторых высокосимметричных состояний, таких как состояния Вернера и изотропные состояния [9]. Оно не было явно выведено даже для общего случая чистых состояний. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы представить несколько явных результатов для геометрической меры квантового разлада. Основные результаты представлены в разделе 2, а в разделе 3 даны краткие выводы.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящем разделе мы сначала вычислим геометрическую меру квантового разлада для любого чистого состояния, после чего установим общую нижнюю границу для произвольного состояния, относящегося к двум подсистемам. Наконец, мы выведем аналитическую формулу для геометрической меры квантового разлада для любой $(2 \times n)$ -мерной системы состояний.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для любого чистого состояния $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ составной системы $H^a \otimes H^b$, где $\dim H^a = m$, состояние $|\Psi\rangle$ выражается в виде разложения Шмидта:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{s_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle,$$

где $\{|\alpha_i\rangle\}$ и $\{|\beta_i\rangle\}$ – ортонормированные базисы для H^a и H^b соответственно (некоторые из коэффициентов s_i могут быть равны нулю). Геометрическая мера квантового разлада для состояния ρ равна

$$D(\rho) = 1 - \sum_{i=1}^m s_i^2. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вывести формулу (3), напомним, что любое измерение фон Неймана на H^a можно выразить как $\Pi^a = \{\Pi_k^a := U|k\rangle\langle k|U^\dagger\}$, где U – унитарный оператор, а $\{|k\rangle\}$ – фиксированный ортонормированный базис для пространства H^a . Поскольку

$$\rho = \sum_{i,i'} \sqrt{s_i s_{i'}} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_{i'}| \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_{i'}|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \Pi^a(\rho) &= \sum_k (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) = \\ &= \sum_k \sum_{i,i'} \sqrt{s_i s_{i'}} U|k\rangle\langle k|U^\dagger |\alpha_i\rangle\langle\alpha_{i'}| U|k\rangle\langle k|U^\dagger \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_{i'}| = \\ &= \sum_{i,i'} \sum_k \sqrt{s_i s_{i'}} \langle k|U^\dagger |\alpha_i\rangle\langle\alpha_{i'}| U|k\rangle U|k\rangle\langle k|U^\dagger \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_{i'}|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho \Pi^a(\rho) &= \sum_{i,i',j,j'} \sqrt{s_i s_{i'} s_j s_{j'}} \sum_k \langle k|U^\dagger |\alpha_j\rangle\langle\alpha_{j'}| U|k\rangle \times \\ &\quad \times |\alpha_i\rangle\langle\alpha_{i'}| U|k\rangle\langle k|U^\dagger \otimes |\beta_i\rangle\langle\beta_{i'}| |\beta_j\rangle\langle\beta_{j'}|. \end{aligned}$$

Если положить $p_{ik} := \langle k|U^\dagger |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| U|k\rangle$, то $\sum_i p_{ik} = \sum_k p_{ik} = 1$ и $p_{ik} \geq 0$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho \Pi^a(\rho) &= \sum_{i,j} s_i s_j \sum_k \langle k|U^\dagger |\alpha_j\rangle\langle\alpha_i| U|k\rangle \langle k|U^\dagger |\alpha_i\rangle\langle\alpha_j| U|k\rangle = \\ &= \sum_k \left(\sum_i s_i \langle k|U^\dagger |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| U|k\rangle \right)^2 = \\ &= \sum_k \left(\sum_i s_i p_{ik} \right)^2 \leq \sum_k \sum_i s_i^2 p_{ik} = \sum_i s_i^2 \end{aligned}$$

с учетом условий $\sum_i p_{ik} = \sum_k p_{ik} = 1$. С другой стороны, указанная верхняя граница может, как видно, достигаться при $|k\rangle = |\alpha_k\rangle$ и $U = \mathbf{1}^a$, или, эквивалентно, при

измерении фон Неймана $\Pi^a = \{\Pi_k^a = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|\}$. Следовательно, учитывая исходное определение (1) и замечая, что

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Pi^a(\rho))^2 &= \mathrm{tr} \sum_k (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) \sum_{k'} (\Pi_{k'}^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_{k'}^a \otimes \mathbf{1}^b) = \\ &= \mathrm{tr} \sum_{k,k'} \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) (\Pi_{k'}^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_{k'}^a \otimes \mathbf{1}^b) (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) = \\ &= \mathrm{tr} \sum_k \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) \rho (\Pi_k^a \otimes \mathbf{1}^b) = \mathrm{tr} \rho \Pi^a(\rho),\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}D(\rho) &= \min_{\Pi^a} [\mathrm{tr} \rho^2 - 2 \mathrm{tr} \rho \Pi^a(\rho) + \mathrm{tr}(\Pi^a(\rho))^2] = \\ &= \min_{\Pi^a} [\mathrm{tr} \rho^2 - \mathrm{tr} \rho \Pi^a(\rho)] = 1 - \max_{\Pi^a} \mathrm{tr} \rho \Pi^a(\rho) = 1 - \sum_{i=1}^m s_i^2,\end{aligned}$$

что представляет собой равенство (3). Это завершает доказательство предложения.

Чтобы представить наши результаты, касающиеся общей нижней границы для геометрической меры квантового разлада, сначала напомним некоторые обозначения и предварительные результаты [9].

Пусть $L(H^a)$ – оператор в гильбертовом пространстве, состоящем из всех линейных операторов на H^a со скалярным произведением Гильберта–Шмидта $\langle X|Y \rangle := \mathrm{tr} X^\dagger Y$. Заметим, что если X можно представить как вещественную матрицу, то $X^\dagger = X^t$. Пусть $\{X_i : i = 0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$ – семейство эрмитовых операторов, которое образует ортонормированный базис операторов $L(H^a)$, тогда

$$\mathrm{tr} X_i X_{i'} = \delta_{ii'}.$$

Например, стандартный базис операторов для пространства H^a образуют следующие m^2 операторов:

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{\mathbf{1}^a}{\sqrt{m}}, \\ X_k &= \frac{\sum_{j=1}^k |j\rangle\langle j| - k|k+1\rangle\langle k+1|}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \\ X_{\mu\nu}^+ &= \frac{|\mu\rangle\langle\nu| + |\nu\rangle\langle\mu|}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq \mu < \nu \leq m, \\ X_{\mu\nu}^- &= \frac{i(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|)}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq \mu < \nu \leq m.\end{aligned}$$

Аналогично определим оператор $L(H^b)$, и пусть $\{Y_j : j = 0, 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$ – базис эрмитовых операторов для $L(H^b)$, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{tr} Y_j Y_{j'} = \delta_{jj'}.$$

Отсюда следует, что $\{X_i \otimes Y_j\}$ есть ортонормированный базис операторов для пространства $L(H^a \otimes H^b)$ линейных операторов на $H^a \otimes H^b$. Следовательно, для любого

состояния двух подсистем ρ на $H^a \otimes H^b$ можно записать разложение

$$\rho = \sum_{i,j} c_{ij} X_i \otimes Y_j, \quad (4)$$

где $c_{ij} := \text{tr } \rho X_i \otimes Y_j$ – вещественные числа (напомним, что X_i и Y_j являются эрмитовыми операторами).

В работе [9] было получено, что

$$D(\rho) = \text{tr}(CC^t) - \max_A \text{tr}(ACC^t A^t), \quad (5)$$

где $C := (c_{ij})$ – вещественная матрица размера $m^2 \times n^2$, а максимум берется по всем матрицам $A := (a_{ki})$ размера $m \times m^2$ таким, что

$$a_{ki} = \text{tr } |k\rangle\langle k| X_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad i = 0, 1, \dots, m^2 - 1, \quad (6)$$

при этом $\{|k\rangle\}$ – любой ортонормированный базис для H^a . В частности,

$$D(\rho) \geq \sum_{i=m}^{m^2-1} c_i, \quad (7)$$

где $\{c_i : i = 0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$ – собственные значения матрицы CC^t , записанные в порядке убывания.

Вещественные числа $\{a_{ki}\}$, определенные в (6), представляют собой коэффициенты разложения оператора чистого состояния $|k\rangle\langle k|$ по ортонормированному базису $\{X_i\}$, т. е.

$$|k\rangle\langle k| = \sum_{i=0}^{m^2-1} a_{ki} X_i.$$

Если положить $\mathbf{a}_k = (a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{k(m^2-1)})^t$, то согласно теореме Парсеваля для разложения Фурье получим $\mathbf{a}_k^t \mathbf{a}_{k'} = \delta_{kk'}$, и, в частности, $\mathbf{a}_k$ имеет единичную норму. Следовательно, для общего вещественного вектора $\mathbf{a}_k$ с единичной нормой оператор

$$\sigma := \sum_{i=0}^{m^2-1} a_{ki} X_i$$

может не быть состоянием [15] (т. е. может не быть неотрицательным). Отсюда вытекает важное для наших последующих вычислений следствие.

Для получения более явных результатов для геометрической меры квантового разлада используем в соотношении (5) задачу оптимизации. Следующая теорема улучшает неравенство (7).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{X_i : i = 0, 1, \dots, m^2 - 1\}$ и $\{Y_j : j = 0, 1, \dots, n^2 - 1\}$ – ортонормированные базисы эрмитовых операторов $L(H^a)$ и $L(H^b)$ соответственно. Без потери общности можно фиксировать $X_0 = \mathbf{1}^a / \sqrt{m}$ и $Y_0 = \mathbf{1}^b / \sqrt{n}$. Пусть общее состояние ρ для двух подсистем представляется в виде

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{mn}} \frac{\mathbf{1}^a}{\sqrt{m}} \otimes \frac{\mathbf{1}^b}{\sqrt{n}} + \sum_{i=1}^{m^2-1} x_i X_i \otimes \frac{\mathbf{1}^b}{\sqrt{n}} + \frac{\mathbf{1}^a}{\sqrt{m}} \otimes \sum_{j=1}^{n^2-1} y_j Y_j + \sum_{i=1}^{m^2-1} \sum_{j=1}^{n^2-1} t_{ij} X_i \otimes Y_j, \quad (8)$$

тогда

$$D(\rho) \geq \sum_{i=m}^{m^2-1} \lambda_i. \quad (9)$$

Здесь $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{m^2-1})^t$, $\|T\|^2 = \text{tr} T T^t$, $T = (t_{ij})$ есть $[(m^2-1) \times (n^2-1)]$ -матрица, а $\{\lambda_i : i = 1, 2, \dots, m^2-1\}$ – собственные значения матрицы $\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t$, записанные в порядке убывания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для установления данного результата начнем с соотношения (5). Сравнивая выражения (4) и (8), мы видим, что соответствующие коэффициенты связаны следующим образом:

$$c_{00} = \frac{1}{\sqrt{mn}}, \quad c_{i0} = x_i, \quad c_{0j} = y_j, \quad c_{ij} = t_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m^2-1, \quad j = 1, 2, \dots, n^2-1.$$

Таким образом, получаем

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{mn}} & \mathbf{y}^t \\ \mathbf{x} & T \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m^2-1})^t$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n^2-1})^t$. Следовательно,

$$C C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{mn} + \mathbf{y}^t \mathbf{y} & \frac{1}{\sqrt{mn}} \mathbf{x}^t + \mathbf{y}^t T^t \\ \frac{1}{\sqrt{mn}} \mathbf{x} + T \mathbf{y} & \mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t \end{pmatrix}, \quad (10)$$

откуда получаем

$$\text{tr} C C^t = \frac{1}{mn} + \mathbf{y}^t \mathbf{y} + \text{tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t). \quad (11)$$

Положим

$$\tilde{\mathbf{a}}_k := \sqrt{\frac{m}{m-1}} (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k(m^2-1)})^t, \quad (12)$$

тогда, учитывая соотношение (6) и замечая, что $\{X_i : i = 0, 1, \dots, m^2-1\}$ – ортонормированный базис операторов, если $X_0 = \mathbf{1}^a / \sqrt{m}$, получаем

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|^2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_k^t \tilde{\mathbf{a}}_{k'} = -\frac{1}{m-1}, \quad k \neq k', \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^m \tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Обратно, необходимо подчеркнуть, что общее семейство векторов $\tilde{\mathbf{a}}_k$, удовлетворяющих связям (13)–(15), не обязательно возникает из формулы (6) для какого бы то ни было ортонормированного базиса $\{|k\rangle\}$, как было отмечено ранее.

Три связи, задаваемые в (13)–(15), не являются независимыми. Из (13) и (14) получаем

$$\left(\sum_{k=1}^m \tilde{\mathbf{a}}_k \right)^t \left(\sum_{k=1}^m \tilde{\mathbf{a}}_k \right) = 0,$$

откуда следует третья связь (15). Это в точности условие

$$\sum_{k=1}^m a_{ki} = \text{tr} \sum_k |k\rangle\langle k| X_i = \text{tr} X_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m^2 - 1.$$

Положим

$$A_0 := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^t \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^t \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^t \end{pmatrix}, \quad (16)$$

что есть матрица размера $m \times (m^2 - 1)$, и тогда связи (13) и (14) можно компактно выразить как

$$A_0 A_0^t = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m-1} & \cdots & -\frac{1}{m-1} \\ -\frac{1}{m-1} & 1 & \cdots & -\frac{1}{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

что есть матрица размера $m \times m$. Заметим, что

$$A = (a_{ki}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m-1} \tilde{\mathbf{a}}_1^t \\ 1 & \sqrt{m-1} \tilde{\mathbf{a}}_2^t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \sqrt{m-1} \tilde{\mathbf{a}}_m^t \end{pmatrix},$$

и тогда прямое вычисление дает (см. (15))

$$\begin{aligned} \text{tr}(ACC^t A^t) &= \frac{1}{mn} + \mathbf{y}^t \mathbf{y} + \frac{m-1}{m} \sum_{k=1}^m \tilde{\mathbf{a}}_k^t (\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t) \tilde{\mathbf{a}}_k = \\ &= \frac{1}{mn} + \mathbf{y}^t \mathbf{y} + \frac{m-1}{m} \text{tr} A_0 (\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t) A_0^t. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, чтобы максимизировать $\text{tr} ACC^t A^t$ с учетом связей, задаваемых в (6), достаточно рассмотреть задачу максимизации

$$\max_{A_0} \text{tr} A_0 (\mathbf{x} \mathbf{x}^t + T T^t) A_0^t, \quad (19)$$

где A_0 определено с помощью соотношений (6), (12) и (16).

Поскольку $A_0 A_0^t$ – вещественная симметричная матрица и ее собственные значения равны 0 и $m/(m-1)$ (с кратностью $m-1$), ее можно диагонализировать как

$$A_0 A_0^t = U D_0 U^t,$$

где U – вещественная унитарная матрица (таким образом, $U^\dagger = U^t = U^{-1}$), а

$$D_0 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $m \times m$, при этом

$$D = \begin{pmatrix} \frac{m}{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{m}{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{m}{m-1} \end{pmatrix}$$

– диагональная матрица размера $(m-1) \times (m-1)$. Положим

$$B_0 := \begin{pmatrix} D^{-1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^t A_0, \quad (20)$$

тогда связь (17) эквивалентна равенству

$$B_0 B_0^t = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{1}_{m-1}$ – единичная матрица порядка $m-1$. Следовательно, B_0 можно записать как

$$B_0 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

и связь (17) оказывается эквивалентна равенству $BB^t = \mathbf{1}_{m-1}$.

Согласно (20) имеем

$$A_0 = U \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_0,$$

тогда

$$A_0(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)A_0^t = U \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_0(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B_0^t \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^t$$

и

$$\begin{aligned} \text{tr } A_0(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)A_0^t &= \text{tr } U \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_0(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B_0^t \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^t = \\ &= \text{tr } \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_0(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B_0^t = \\ &= \text{tr } DB(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B^t = \frac{m}{m-1} \text{tr } B(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B^t. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует, что задача оптимизации (19) эквивалентна

$$\max_B \text{tr } B(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B^t \quad (23)$$

со следующими связями.

(I) B_0 возникает из соотношения (6) с учетом формул (12), (16), (20) и (21).

Из этой связи следует связь (но не наоборот)

(II) $BB^t = \mathbf{1}_{m-1}$.

Если исключить связь (I), мы получим значение для задачи оптимизации (23) с учетом связи (II):

$$\max_B \operatorname{tr} B(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)B^t = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k,$$

где $\{\lambda_k: k = 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$ – собственные значения матрицы $\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t$, записанные в порядке убывания. Следовательно, комбинируя соотношения (5), (11), (18) и (22), получаем требуемое ограничение (9). Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тонкость задачи оптимизации (23) заключается в связи (I). Из обсуждения, приведенного перед теоремой 1, нам известно, что из связей, задаваемых в (13)–(15), следует соотношение (6) (но не наоборот). Это усложняет задачу оптимизации.

Нижняя граница (9) улучшает нижнюю границу (7). Чтобы проиллюстрировать это, напомним, что $\{c_i: i = 0, 1, \dots, m^2 - 1\}$ – собственные значения матрицы CC^t , записанные в порядке убывания, а $\{\lambda_i: i = 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$ – собственные значения матрицы $\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t$, также записанные в порядке убывания. Из (10) мы получаем, что матрица $\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t$ представляет собой сжатие матрицы CC^t , и тогда с помощью теоремы Коши о перемежаемости для собственных значений матрицы (см. [16], с. 59) имеем

$$c_i \geq \lambda_{i+1} \geq c_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m^2 - 2.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=m}^{m^2-1} \lambda_i - \sum_{i=m}^{m^2-1} c_i = \sum_{i=m}^{m^2-1} (\lambda_i - c_i) \geq 0.$$

Это означает, что граница (9) сильнее границы (7).

Внимательно рассматривая доказательство теоремы 1, можно обобщить формулу (2) для двухкубитных (т. е. (2×2) -мерных) состояний до $(2 \times n)$ -мерных состояний.

СЛЕДСТВИЕ 1. В обозначениях теоремы 1 при $m = 2$ имеем

$$D(\rho) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|T\|^2 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3. \quad (24)$$

Здесь $\{\lambda_i: i = 1, 2, 3\}$ – собственные значения (3×3) -матрицы $\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t$, записанные в порядке убывания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $m = 2$ мы имеем $\tilde{\mathbf{a}}_2 = -\tilde{\mathbf{a}}_1$, и из доказательства теоремы 1 задача оптимизации (19) редуцируется к задаче

$$\max_{\tilde{\mathbf{a}}_1} 2\tilde{\mathbf{a}}_1(\mathbf{x}\mathbf{x}^t + TT^t)\tilde{\mathbf{a}}_1 \quad (25)$$

с учетом связи $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = 1$, поскольку в частном случае $m = 2$ для общего вещественного вектора $\tilde{\mathbf{a}}_1 = (\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{13})$ оператор

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1}^a + \sqrt{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{a}_{1i} X_i \right)$$

представляет собой чистое состояние тогда и только тогда, когда $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = 1$ (это не выполняется при $m > 2$). Здесь $\{\mathbf{1}^a/\sqrt{2}, X_i, i = 1, 2, 3\}$ – ортонормированный базис операторов для кубитной системы. Значение задачи оптимизации (25) становится равным λ_1 , откуда следует требуемый результат (24).

3. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Мы вывели аналитические формулы для геометрической меры квантового разлада для чистых состояний и $(2 \times n)$ -мерных состояний. Кроме того, установлена общая нижняя граница для геометрической меры квантового разлада для произвольных состояний, которая улучшает границу (7), впервые появившуюся в работе [9]. Было бы полезно вывести явную аналитическую формулу, решив задачу оптимизации (5), которая представляется довольно любопытной.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSFC (грант № 10771208), The Science Fund for Creative Research Groups (грант № 10721101) и The Key Lab of Random Complex Structures and Data Science, CAS (грант № 2008DP173182).

Список литературы

- [1] V. Vedral, *Rev. Modern Phys.*, **74**:1 (2002), 197–234, arXiv: quant-ph/0102094.
- [2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Rev. Modern Phys.*, **81**:2 (2009), 865–942, arXiv: quant-ph/0702225.
- [3] A. Datta, S. T. Flammia, C. M. Caves, *Phys. Rev. A*, **72**:4 (2005), 042316, 14 pp., arXiv: quant-ph/0505213.
- [4] L. Henderson, V. Vedral, *J. Phys. A*, **34**:35 (2001), 6899–6905, arXiv: quant-ph/0105028.
- [5] S. Luo, *Phys. Rev. A*, **77**:2 (2008), 022301, 5 pp.
- [6] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral, M. Williamson, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:8 (2010), 080501, 4 pp., arXiv: 0911.5417.
- [7] H. Ollivier, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:1 (2001), 017901, 4 pp.
- [8] J.-S. Xu, X.-Y. Xu, C.-F. Li, C.-J. Zhang, X.-B. Zou, G.-C. Guo, *Nature Commun.*, **1** (2010), 7.
- [9] S. Luo, S. Fu, *Phys. Rev. A*, **82**:3 (2010), 034302, 4 pp.
- [10] M. D. Lang, C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:15 (2010), 150501, 4 pp., arXiv: 1006.2775.
- [11] S. Luo, *Phys. Rev. A*, **77**:4 (2008), 042303, 6 pp.
- [12] B. Dakic, V. Vedral, C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:19 (2010), 190502, 4 pp., arXiv: 1004.0190.
- [13] X.-M. Lu, Z. J. Xi, Z. Sun, X. Wang, *Quantum Inf. Comput.*, **10**:11–12 (2010), 994–1003.
- [14] F. Altintas, *Opt. Comm.*, **283**:24 (2010), 5264–5268.
- [15] M. S. Byrd, N. Khaneja, *Phys. Rev. A*, **68**:6 (2003), 062322, 13 pp., arXiv: quant-ph/0302024.
- [16] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, **169**, Springer, New York, 1997.

Поступила в редакцию 24.04.2011,
после доработки 25.06.2011