Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Талалаев, Квантовая обобщенная система Тоды,
ТМФ, 2012, том 171, номер 2, 312–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:36:18

© 2012 г.

Д. В. Талалаев^{*†}

КВАНТОВАЯ ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА ТОДЫ

Строится “спектральная кривая” для обобщенной системы Тоды, что позволяет эффективно получать квантование данной системы. В свою очередь квантование реализуется с помощью метода квантового характеристического полинома для системы Годена и подходящей редукции Адлера–Костанта–Саймса. Обсуждается также связь полученного результата с недавними рассмотрениями заставы Дринфельда пространств монополей и соответствующих симметрий борелевской версии янгиана.

Ключевые слова: квантование, интегрируемые системы, пространство флагов.

К 60-летию И. М. Кричевера

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепочки Тоды занимают особое место в теории интегрируемых систем. В отличие от структуры линейной группы в модели Годена эта система связана с соответствующей борелевской группой и опосредованно с геометрией многообразий флагов.

Предметом изучения в настоящей работе является обобщенная система Тоды, связанная системой корней A_n . Используемый в работе метод основан на концепции спектральной кривой как на классическом, так и на квантовом уровне. Метод спектральной кривой и вообще алгебро-геометрические методы в интегрируемых системах предоставляют удивительно эффективный и универсальный способ описания, решения и квантования динамических систем. Настоящая работа была инициирована построением коммутативного семейства [1], которое на первый взгляд не связано с идеей спектральных инвариантов для эволюционирующего линейного оператора.

Следуя работе [2], напомним построение спектральной кривой в открытой цепочке Тоды. Открытая цепочка Тоды определяется гамильтоновой функцией

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}}$$

^{*}Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: dtalalaev@yandex.ru

и канонической скобкой Пуассона по переменным p_k, q_l . Она имеет представление

$$L(w) = \begin{pmatrix} v_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & v_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & v_3 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ wc_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & v_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $c_k = e^{(q_k - q_{k+1})/2}$, $v_k = -p_k$. Заметим, что представление Лакса не единственно для открытой цепочки, но унифицирует методы спектральной кривой для случаев открытой и периодической цепочек. Коммутативное семейство определяется коэффициентами характеристического многочлена

$$\det(L(w) - \lambda) = 0,$$

который, в свою очередь, определяет рациональную кривую. Эту кривую можно интерпретировать как предел гиперэллиптической кривой в периодическом случае. Действительно, открытая цепочка является пределом системы в гораздо более общей постановке задачи – для обобщенной системы Тоды.

Наметим основную стратегию. Мы начинаем с ввода производящей функции для классических интегралов общего вида для системы Тоды. Эта функция возникает как предел классического характеристического многочлена для модели Годена [3] с конкретным выбором магнитного члена. Замечая затем, что данное семейство инвариантно относительно действия борелевской группы, мы реализуем редукцию Адлера–Костанта–Саймса (АКС) по отношению к разложению $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{so}_n$. Эту идею можно распространить на квантовый уровень. Мы используем те же элементы: квантовую модель Годена со специальным магнитным членом и ее специальный предел. Мы демонстрируем инвариантность получающегося коммутативного семейства по отношению к действию борелевской группы и реализуем квантовую редукцию АКС.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ КРИВАЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Определение. Система Тоды общего вида для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ получается в рамках так называемой процедуры отсечения. Рассмотрим симметричную матрицу A , элементы которой представляют собой генераторы борелевской подалгебры $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_-$:

$$A = \sum_{i \leq j} (E_{ij} + E_{ji}) \otimes e_{ij},$$

где E_{ij} – генераторы алгебры $\text{End}(\mathbb{C}^n)$, e_{ij} при $i \geq j$ – генераторы алгебры Ли $\mathfrak{b}$. Матричные коэффициенты интерпретируются как функции на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{b}^*$, которое представляет собой пуассоново пространство со скобкой Кириллова–Костанта. Определим также специальную матрицу $A_k(\lambda)$,

получаемую стиранием k правых колонок и k верхних строк матрицы $A - \lambda \text{Id}$. Согласно результату работы [1] полный набор корней всех многочленов

$$\Delta_k(\lambda) = \det A_k(\lambda) = \sum_i I_{k,i} \lambda^i \quad (2)$$

составляет коммутативное семейство. Альтернативный способ введения коммутативного семейства состоит в использовании аффинных координат – отношений коэффициентов многочлена $\Delta_k(\lambda)$. Можно использовать тот факт, что $\Delta_{n-k}(\lambda) = \Delta_{n-k}$ – главный по λ член в $\Delta_k(\lambda)$. Это позволяет ввести семейство характеристических многочленов

$$P_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_{n-k}(\lambda)}, \quad k = 0, \dots, \frac{n}{2}.$$

2.2. Производящая функция. Рассмотрим матрицу A , соответствующую полной алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$:

$$A = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij}.$$

Нам потребуется обозначение

$$\Omega_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Можно упорядочить коэффициенты миноров (2) в производящий ряд. Рассмотрим характеристический многочлен $P(z, \lambda, \varepsilon) = \det(Az^{-1} + \Omega_\varepsilon - \lambda \text{Id})$, который представляет собой многочлен по переменным z^{-1} , λ , ε . Разложим его в сумму компонент $I_k(z, \lambda, \varepsilon)$, однородных степени k по (z^{-1}, λ) , каждая из которых представляет собой многочлен по ε с главным членом $I_k^0(z, \lambda)$:

$$P(z, \lambda, \varepsilon) = \sum_k I_k(z, \lambda, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^{k(k-1)/2} (I_k^0(z, \lambda) + O(\varepsilon)). \quad (4)$$

Обозначим через $I_{k,i}$ коэффициенты многочлена $I_k^0(z, \lambda)$:

$$I_k^0(z, \lambda) = \sum_{i=0}^k I_{k,i} z^{-i} \lambda^{k-i}. \quad (5)$$

Тогда, в частности, $\Delta_k(\lambda) = I_k^0(1, \lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эта конструкция показывает, что, например, миноры коммутируют относительно скобки Кириллова–Костанта на $S(\mathfrak{gl}_n)$. Действительно, такая алгебра представляет собой предельный случай коммутативной пуассоновой алгебры, получаемой путем сдвига аргумента, или, эквивалентно, путем рассмотрения соответствующей модели Годена.

2.3. Схема АКС. Напомним центральную концепцию теории интегрируемых систем – схему АКС. Здесь мы будем использовать следующий вариант: пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, представимая в виде прямой суммы двух подалгебр: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. Симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g})$ здесь рассматривается как алгебра функций на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Имеется естественное отображение проекции

$$i: S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g}_+),$$

связанное с разложением симметрической алгебры

$$S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}_+) \oplus \mathfrak{g}_- S(\mathfrak{g}). \quad (6)$$

Заметим, что $\mathfrak{g}_- S(\mathfrak{g})$ – подалгебра Ли. Отображение i можно интерпретировать как ограничение на пространство $\text{App}(\mathfrak{g}_-) \in \mathfrak{g}^*$. Несмотря на то что это отображение не является, вообще говоря, пуассоновым, оно сохраняет свойство интегрируемости в следующем смысле.

ЛЕММА 1. Пусть $f, h \in S(\mathfrak{g})$ инвариантны относительно действия $\mathfrak{g}_+$ алгебры Ли и коммутируют относительно скобки Кириллова–Костанта. Тогда их образы $i(f), i(h)$ коммутируют относительно скобки на $S(\mathfrak{g}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементы $f, h \in S(\mathfrak{g})$ и их разложения в соответствии с формулой (6):

$$f = f_+ + f_-, \quad g = g_+ + g_-.$$

Тогда

$$\{f_-, g_-\} = \{f - f_+, g - g_+\} = \{f, g\} - \{f_+, g\} - \{f, g_+\} + \{f_+, g_+\} = \{f_+, g_+\}.$$

Но обе части принимают значения в различных прямых слагаемых (6), а потому обращаются в нуль. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В данном разделе нам требуется рациональное обобщение этого утверждения, которое получается непосредственно.

2.4. Инвариантность. Требуется показать, что отношения $\Delta_k(\lambda)/\Delta_{n-k}$ инвариантны относительно борелевской подгруппы нижнетреугольных матриц $B \subset SL(n)$. Сначала покажем, что действие группы на функции e_{ij} можно выразить в терминах действия на оператор Лакса A :

$$\text{Ad}_g(A) := \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes \text{Ad}_g(e_{ij}) = \sum_{i,j} \text{Ad}_{g^T}(E_{ij}) \otimes e_{ij} = g^T A (g^T)^{-1}.$$

Действие группы на коэффициенты характеристического многочлена выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \det(\text{Ad}_{g^T}(A)z^{-1} + \Omega_\varepsilon - \lambda) &= \det(Az^{-1} + \text{Ad}_{(g^T)^{-1}}(\Omega_\varepsilon) - \lambda) = \\ &= \sum_k \varepsilon^{k(k-1)/2} (\text{Ad}_g(I_k^0(z, \lambda)) + O(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим элемент борелевской группы $g = e^{te_{j,i}} = 1 + te_{j,i}$, $j > i$. Его действие на матрицу Ω_ε можно записать как

$$(g^T)^{-1}\Omega_\varepsilon g^T = \Omega_\varepsilon - tE_{n-i+1,j}\varepsilon^{n-i} + tE_{i,n-j+1}\varepsilon^{j-1} - t^2\delta_{j,n-1+1}E_{i,j}\varepsilon^{n-i}.$$

Эта матрица удовлетворяет следующему свойству: младший по ε элемент в каждой строке и на каждой линии стоит на антидиагонали. Это подтверждается тем, что самый младший член по ε в характеристическом многочлене (7) такой же, как и в недеформированном выражении.

Покажем, что картановская подгруппа действует характером. Рассмотрим элемент $g = e^{te_{i,i}}$ из B и его действие

$$(g^T)^{-1}\Omega_\varepsilon g^T = \Omega_\varepsilon + \varepsilon^{i-1}E_{i,n-i+1}(e^t - 1) + \varepsilon^{n-i}E_{n+1-i,i}(e^t - 1) + \varepsilon^{n-i}\delta_{i,n+1-i}E_{i,i}(e^t - 1)(e^{-t} - 1).$$

Данное наблюдение позволяет заключить, что антидиагональные члены в Ω_ε умножаются на скаляры, а это следующим образом влияет на асимптотики:

$$\text{Ad}_g(\Delta_k(\lambda)) = \chi_k(g)(\Delta_k(\lambda)),$$

где $\chi_k(g)$ – соответствующий характер. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Отношения $(I_{k,i})_+/I_{k,n-k}$ порождают коммутативную подалгебру*

$$[(I_{k,i})_+/I_{k,n-k}, (I_{m,j})_+/I_{m,n-m}] = 0$$

в поле частных $\mathcal{F}(S(\mathfrak{b}))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На самом деле в таком контексте имеется более широкая инвариантность. Можно рассмотреть башню параболических подалгебр

$$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{sl}_n$$

таких, что $\mathfrak{p}_n$ порождается $\mathfrak{b}$ и положительными генераторами, соответствующими корням $\alpha_k, \dots, \alpha_{n-k-1}$. Рассмотрим также башню параболических групп

$$B \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = SL_n.$$

ЛЕММА 2. *Верно, что $I_{k,i}/I_{k,j} \in \mathcal{FS}(\mathfrak{sl}_n)^{P_k}$.*

Этот результат можно найти в работе [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Такое коммутативное семейство и некоторые обобщения, связанные с геометрией многообразий флагов, обсуждаются в работе [5].

3. КВАНТОВАНИЕ

Мы строим квантовую модель, рассматривая специальный предел коммутативной алгебры Годена, связанной с 3-точечным случаем, также известным как конструкция сдвига аргумента. Кроме того, мы покажем, что эта подалгебра инвариантна относительно действия B на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{sl}_n)$, и дадим квантовый аналог конструкции АКС, который приводит к построению коммутативной алгебры в $U(\mathfrak{b})$.

3.1. Некоммутативный определитель. Рассмотрим матрицу $B = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes B_{ij}$, элементы которой лежат в некоторой ассоциативной алгебре: $B_{ij} \in \mathfrak{R}$. В данном случае мы будем использовать следующее определение для некоммутативного определителя:

$$\det(B) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\tau\sigma} B_{\tau(1), \sigma(1)} \cdots B_{\tau(n), \sigma(n)}.$$

Имеется эквивалентное определение. Введем оператор A_n антисимметризации в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$:

$$A_n v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Приведенное выше определение эквивалентно следующему:

$$\det(B) = \text{Tr}_{1 \dots n} A_n B_1 \dots B_n,$$

где B_k обозначает оператор в $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes A$, задаваемый формулой

$$B_k = \sum_{i,j} 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{E_{ij}}_k \otimes \cdots \otimes 1 \otimes B_{ij},$$

причем след берется по $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$.

3.2. Квантовая спектральная кривая. Рассмотрим ту же матрицу A , что и в классическом случае, но интерпретируем ее элементы как генераторы алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$:

$$A = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij}.$$

Рассмотрим производящий ряд

$$\begin{aligned} P_Q(z, \partial_z, \varepsilon) &= \det(Az^{-1} + \Omega_\varepsilon - \partial_z \text{Id}) = \\ &= \sum_k QI_k(z, \partial_z, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^{k(k-1)/2} (QI_k^0(z, \partial_z) + O(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь, как и в классическом случае, мы сначала рассматриваем однородное разложение в пространстве дифференциальных многочленов по отношению к градуировке $\deg(z) = -1, \deg(\partial_z) = 1$ ¹⁾; $QI_k(z, \partial_z, \varepsilon)$ – компонента в градуировке k . Далее рассмотрим главный член ε -разложения для каждой однородной компоненты $QI_k^0(z, \partial_z)$. Коммутативная алгебра в $U(\mathfrak{gl}_n)$ порождается коэффициентами выражения

$$QI_k^0(z, \partial_z) = \sum_{l=0}^k QI_{k,i} z^{-i} \partial_z^{k-i}.$$

Эти операторы представляют собой высшие члены ε -разложения соответствующих гамильтонианов Годена и потому коммутируют. Общее утверждение для модели Годена доказано в работе [3], случай с магнитным полем проанализирован в работе [6].

ТЕОРЕМА 2. *Набор $\{QI_{k,i}\} \subset U(\mathfrak{gl}_n)$ порождает коммутативную алгебру $\mathcal{H}_q$, которая является квантованием пуассон-коммутативной подалгебры в $S(\mathfrak{gl}_n)$, порожденной элементами $I_{k,i}$.*

¹⁾Заметим, что градуировка определена корректно вследствие однородности соотношения в алгебре Витта $\partial_z z - z \partial_z = 1$.

3.3. Квантовая инвариантность. В настоящем разделе мы рассмотрим коммутативную подалгебру в $U(\mathfrak{b})$, являющуюся квантованием подалгебры гамильтонианов для обобщенной цепочки Тоды. Мы будем придерживаться той же стратегии, что и в классическом случае – найдем инварианты относительно действия борелевской подгруппы B на некоторой локализации алгебры $U(\mathfrak{b})$.

Определим задачу разложения в квантовом случае. Рассмотрим разложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{so}_n$, которое для универсальных обертывающих алгебр превращается в

$$U(\mathfrak{sl}_n) = U(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{so}_n U(\mathfrak{sl}_n), \quad (9)$$

задаваемое с помощью выбора нормального упорядочения. Обозначим через a_+ проекцию $a \in U(\mathfrak{sl}_n)$ на первое слагаемое.

Установим некоторое специальное свойство инвариантности квантового коммутативного семейства. Действие элемента группы $g \in B$ на $QI_{k,i}$ можно реализовать в терминах действия на квантовый оператор Лакса, как и в классическом случае:

$$\det(g^T A g^{T^{-1}} z^{-1} + \Omega_\varepsilon - \partial_z) = \det(Az^{-1} + g^{T^{-1}} \Omega_\varepsilon g^T - \partial_z), \quad (10)$$

поэтому вопрос сводится к свойствам матрицы Ω_ε . Для доказательства равенства (10) нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $g \in GL_n$, а L – элемент из $\text{Mat}_n \otimes \mathfrak{A}$ для некоторой ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\det(gLg^{-1}) = \det(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся альтернативной формулой для некоммутативного определителя

$$\det(L) = \text{Tr}_{1,\dots,n} A_n L_1 L_2 \dots L_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det(gLg^{-1}) &= \text{Tr}_{1,\dots,n} A_n g_1 L_1 g_1^{-1} g_2 L_2 g_2^{-1} \dots g_n L_n g_n^{-1} = \\ &= \text{Tr}_{1,\dots,n} A_n g_1 g_2 \dots g_n L_1 L_2 \dots L_n g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_n^{-1} = \\ &= \text{Tr}_{1,\dots,n} g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_n^{-1} A_n g_1 g_2 \dots g_n L_1 L_2 \dots L_n = \\ &= \text{Tr}_{1,\dots,n} A_n L_1 L_2 \dots L_n = \det(L). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ для матриц с коммутирующими элементами $[A_{ij}, B_{kl}] = 0$, и тем фактом, что на тензорном произведении векторных представлений действие групповой алгебры симметрической группы коммутирует с диагональным действием линейной группы. Лемма доказана.

3.4. Квантовая лемма АКС. По аналогии с классическим случаем мы показали, что группа B действует на $QI_k^0(z, \partial_z)$ характером $\chi_k(b)$, где $b \in B$. Обозначим той же буквой характер на алгебре Ли $\chi_k(X)$ при $X \in \mathfrak{b}$, так что

$$\text{ad}_X QI_{k,i} = \chi_k(X) QI_{k,i}.$$

Введем также обозначение $\eta_k(m)$ с помощью формулы

$$ma = a\eta_k(m), \quad (12)$$

где $a = QI_{k,i}$ и $m \in U(\mathfrak{b})$. Если m – моном $m = b_1 \dots b_s$, то

$$\eta_k(m) = (b_1 + \chi_k(b_1)) \dots (b_s + \chi_k(b_s)).$$

ЛЕММА 4. Рассмотрим разложения типа (9) двух элементов нашей коммутативной алгебры:

$$QI_{k,i} = a = a_+ + a_-, \quad QI_{l,j} = b = b_+ + b_-.$$

Тогда $a_+\eta_k(b_+) = b_+\eta_l(a_+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Лемма 4 представляет собой аналог леммы АКС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся условием коммутативности

$$\begin{aligned} [a_-, b_-] &= [a - a_+, b - b_+] = [a, b] + [a_+, b_+] - [a, b_+] - [a_+, b] = \\ &= [a, b] + [a_+, b_+] - ab_+ + a\eta_k(b_+) - b\eta_l(a_+) + ba_+ = \\ &= [a_+, b_+] - a_-b_+ - a_+b_+ + a_-\eta_k(b_+) + a_+\eta_k(b_+) - \\ &\quad - b_-\eta_l(a_+) - b_+\eta_l(a_+) + b_+a_+ + b_-a_+. \end{aligned} \quad (13)$$

Положительная часть выражения (13) равна

$$0 = a_+\eta_k(b_+) - b_+\eta_l(a_+).$$

Лемма доказана.

Мы хотели бы рассмотреть локализацию алгебры $U(\mathfrak{b})$ с мультипликативным множеством S , порожденным $\{QI_{k,n-k}\}$ – набором старших членов всех частичных квантовых характеристических многочленов.

ЛЕММА 5. S является правым множеством Оре.

Напомним условия Оре. $S \subset A$ представляет собой правое множество Оре, если

- 1) для всех $s \in S$ и $a \in A$ существуют $s' \in S$ и $a' \in A$ такие, что $sa' = as'$;
- 2) для всех $a_1, a_2 \in A$ и $s \in S$: $(sa_1 = sa_2) \Rightarrow (\exists s' \in S : a_1s' = a_2s')$.

Второе условие тривиально, поскольку алгебра $U(\mathfrak{sl}_n)$ не имеет делителей нуля. Первое условие выполняется в силу (12).

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим локализацию $\text{loc}_S U(\mathfrak{b})$. Отношения $(QI_{k,i})_+/QI_{k,n-k}$ порождают коммутативную подалгебру:

$$[(QI_{k,i})_+/QI_{k,n-k}, (QI_{m,j})_+/QI_{m,n-m}] = 0,$$

которая представляет собой квантование классической подалгебры интегралов обобщенной системы Тоды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями

$$a = QI_{k,i}, \quad b = QI_{m,j}, \quad c = QI_{k,n-k}, \quad d = QI_{m,n-m}.$$

Тогда

$$a_+c^{-1}b_+d^{-1} - b_+d^{-1}a_+c^{-1} = a_+\eta_k(b_+)c^{-1}d^{-1} - b_+\eta_m(a_+)d^{-1}c^{-1}.$$

Это равно нулю вследствие леммы 4 и коммутативности d и c в обеих алгебрах.

4. КОММЕНТАРИИ

Застава Дринфельда [7] является некоторым пополнением пространства отображений фиксированной степени из $\mathbb{C}P^1$ до многообразия флагов $\mathcal{F}_n$:

$$\mathcal{M}_{\vec{d}} = \{f: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathcal{F}_n, c_1(f^*\mathcal{L}_i) = d_i \in H^1(\mathbb{C}P^1)\},$$

где $\mathcal{L}_i$ – ансамбль канонических линейных расслоений на многообразии флагов, $\mathcal{L}_i = V_i^{\wedge i}$.

С другой стороны, можно рассмотреть пространство рациональных отображений

$$L_d = \{F: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Mat}_n\},$$

допускающих проекцию на пространство отображений в многообразии флагов $\mathcal{M}_{\vec{d}}$ при $\vec{d} = (-d, -2d, \dots, -nd)$. Тогда, используя вариант гамильтоновой редукции, можно построить коммутативное семейство в $C(\mathcal{T}^*L_d)$ аналогично тому, как это делается для случая обобщенной системы Toda. Мы полагаем, что такое построение тесно связано с потоками Гельфанда–Цетлина на многообразии флагов, которое сохраняет свое значение на квантовом уровне [7].

Благодарности. Автор выражает благодарность своим коллегам Ю. Чернякову и Г. Шарыгину за плодотворные обсуждения рассматриваемой проблемы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Simons Foundation, РФФИ (грант № 11-01-00197), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5413.2010.1), РФФИ–Консорциума E.I.N.S.T.E.I.N (грант № 09-01-92437), РФФИ–CNRS (грант № 11-01-93105-НЦНИЛ_а), а также Министерства образования и науки РФ в рамках контракта № 14.740.11.0081.

Список литературы

- [1] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, C. Tomei, *Commun. Pure Appl. Math.*, **39**:2 (1986), 183–232.
- [2] I. Krichever, K. L. Vaninsky, “The periodic and open Toda lattice”, *Mirror symmetry IV* (Montréal, Canada, 2000), AMS/IP Stud. Adv. Math., **33**, eds. E. D’Hoker et al., AMS, Providence, RI, 2002, 139–158, arXiv: hep-th/0010184.
- [3] Д. В. Талалаев, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:1 (2006), 86–91.
- [4] M. Gekhtman, M. Shapiro, *Commun. Pure Appl. Math.*, **52**:1 (1999), 53–84, arXiv: solv-int/9704011.
- [5] Yu. Chernyakov, A. Sorin, *Involutive families of integrals of the full symmetric Toda system on a generic orbit*, preprint (to appear).
- [6] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, arXiv: hep-th/0604128.
- [7] M. Finkelberg, L. Rybnikov, *Quantization of Drinfeld Zastava*, arXiv: 1009.0676.