Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Дубровин, Т. В. Скрыпник, Классический дубль,
 R -операторы и отрицательные потоки интегрируемых
иерархий, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 40–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:19:17

© 2012 г.

Б. А. Дубровин^{*†}, Т. В. Скрыпник^{†‡§}

КЛАССИЧЕСКИЙ ДУБЛЬ, R -ОПЕРАТОРЫ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПОТОКИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

С использованием классического дубля $\mathcal{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, оснащенной классическим R -оператором, определены два набора функций, коммутирующих по отношению к изначальной скобке Ли–Пуассона на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ и его расширениях. Детально рассмотрены примеры алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с R -операторами Адлера–Костанта–Симса и два соответствующих набора взаимно коммутирующих функций. На основе полученных коммутирующих гамильтоновых потоков на различных расширениях алгебры $\mathfrak{g}$ выведено уравнение нулевой кривизны с $\mathfrak{g}$ -значными U – V -парами. Среди полученных уравнений содержатся так называемые отрицательные потоки интегрируемых иерархий. Предлагаемый подход проиллюстрирован примерами абелевых и неабелевых уравнений двумерного поля Тоды.

Ключевые слова: классические R -операторы, интегрируемые иерархии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория иерархий интегрируемых уравнений в частных производных базируется на возможности записать каждое из уравнений иерархии с помощью так называемого представления нулевой кривизны $U_t - V_x + [U, V] = 0$, где U – V -пара принимает значения в некоторой бесконечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (например, в алгебре матричнозначных рядов Лорана от одной комплексной переменной λ). Существует несколько подходов к построению уравнений нулевой кривизны, базирующихся на алгебрах Ли. Один из них [1] основан на том, что уравнения нулевой кривизны интерпретируются как одно уравнение Лакса (Эйлера–Арнольда), записанное на центрально расширенной алгебре $\mathfrak{g}$ -значных функций переменной x . В рамках этого подхода роль одного оператора Лакса играет оператор $\partial_x - U$, а второй оператор в паре Лакса совпадает с оператором V .

^{*}International School for Advanced Studies, Trieste, Italy. E-mail: dubrovin@sissa.it

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[‡]Universita di Milano Bicocca, Milan, Italy. E-mail: taras.skrypnyk@unimib.it

[§]Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина.
E-mail: tskrypnyk@imath.kiev.ua

При альтернативном подходе [2], [3] уравнение нулевой кривизны интерпретируется как условие совместности двух вспомогательных уравнений Лакса (Эйлера–Арнольда). Коммутативность этих лаксовых потоков гарантируется коммутативностью соответствующих гамильтонианов относительно скобки Ли–Пуассона. При этом подходе элементы U и V из уравнений нулевой кривизны совпадают с алгеброзначными градиентами коммутирующих гамильтонианов, полученных с помощью схемы Адлера–Костанта–Саймса (АКС). Детальнее, эти гамильтонианы получаются путем ограничения функций Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на пространства, дуальные к подалгебрам $\mathfrak{g}_{\pm}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{+} + \mathfrak{g}_{-}$. Такой подход позволяет получить два типа интегрируемых уравнений, ассоциированных с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а именно интегрируемые уравнения с операторами U и V , принадлежащими той же подалгебре Ли $\mathfrak{g}_{+}$ или $\mathfrak{g}_{-}$. Однако подход работы [3] не покрывает всех известных интегрируемых уравнений. В частности, он не работает для интегрируемых уравнений (иногда называемых *отрицательными потоками* интегрируемых иерархий)¹⁾, которые обладают U – V -парами с U -оператором, принадлежащим подалгебре $\mathfrak{g}_{+}$, и V -оператором, принадлежащим подалгебре $\mathfrak{g}_{-}$. В работе [7] уравнения такого типа включены в общую схему путем доказательства того, что ограничения функций Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на пространства, дуальные подалгебрам $\mathfrak{g}_{+}$ и $\mathfrak{g}_{-}$, коммутируют не только внутри каждой группы, но и между группами. Это позволяет получить отрицательные потоки интегрируемых иерархий как следствие коммутативности потоков Лакса, порожденных “положительными” и “отрицательными” гамильтонианами. В работах [8], [9] предложено обобщение этой схемы на случай алгебр Ли $\mathfrak{g}$, обладающих общим классическим R -оператором, не всегда связанным с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{+} + \mathfrak{g}_{-}$ (т.е. не всегда связанным со схемой АКС). Показано, что ограничения функций Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на подалгебры $\mathfrak{g}_{R\pm}$, где $\mathfrak{g}_{R\pm} = \text{Im } R_{\pm}$, коммутируют не только внутри каждой группы, но и между группами. Это наблюдение позволяет получить два набора взаимно коммутирующих функций на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ и три типа уравнений нулевой кривизны, в частности тот тип уравнений, который отвечает отрицательным потокам солитонных иерархий [9]. Заметим, что соответствующая коммутативность не следует из стандартной R -матричной схемы [10] на $\mathfrak{g}$.

Тем не менее оказалось, что схема, предложенная в работах [8], [9], все еще не является наиболее общим подходом к генерированию коммутативных потоков на $\mathfrak{g}^*$ и, следовательно, к конструированию солитонных иерархий с $\mathfrak{g}$ -значными U – V -парами. В частности, предложенная схема не включает в себя бесконечнокомпонентную иерархию Тоды и не порождает соответствующие вспомогательные уравнения Лакса [11].

В настоящей работе мы предлагаем более общий подход к построению коммутирующих потоков и получаем уравнение нулевой кривизны с $\mathfrak{g}$ -значными U – V -парами. С этой целью мы рассматриваем коммутативные потоки не на $\mathfrak{g}^*$, а на $\mathcal{G}^*$, где $\mathcal{G}$ – классический дубль алгебры $\mathfrak{g}$. Мы используем тот факт, что классический R -оператор на $\mathfrak{g}$ индуцирует естественный R -оператор на $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ [12]. Оказывается, что R -оператор $\mathcal{R}$ на $\mathcal{G}$ всегда имеет тип АКС вне зависимости от того, какой вид имел R -оператор на $\mathfrak{g}$. Из этого следует, что справедливо разложение $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}+} \ominus \mathcal{G}_{\mathcal{R}-}$, где алгебра $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ – это линейное пространство $\mathcal{G}$, оснащенное так

¹⁾В настоящей работе мы не можем процитировать или сделать обзор всех публикаций на эту тему. Мы отсылаем заинтересованного читателя, например, к недавним работам [4]–[6].

называемой $\mathcal{R}$ -скобкой [10]. Более того, оказывается, что $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \simeq \mathfrak{g}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-} \simeq \mathfrak{g}_R$, где алгебра $\mathfrak{g}_R$ – это линейное пространство $\mathfrak{g}$, оснащенное R -скобкой, и $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{\pm}} \equiv \text{Im } \mathcal{R}_{\pm}$ [12].

Таким образом, нашим первым наблюдением является тот факт, что, применяя стандартную R -операторную схему [10] к алгебре Ли $\mathcal{G}$, которая оснащена R -оператором $\mathcal{R}$, можно получить набор коммутирующих потоков на расширении алгебры $\mathfrak{g}$ некоторой алгеброй Ли $\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_R/J_R$ и J_R является идеалом алгебры $\mathfrak{g}_R$. В частном случае $J_R = \mathfrak{g}_R$ данное наблюдение позволяет получить простое доказательство результатов работы [8] о коммутативности ограничений функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на подалгебры $\mathfrak{g}_{R_{\pm}}$. Тем самым мы показываем, что результаты работы [8] могут быть выведены путем использования обычной R -операторной схемы. В случае $J_R = [\mathfrak{g}_R, \mathfrak{g}_R]$ мы получаем важное обобщение упомянутого выше результата: доказываем коммутативность ограничения функций Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ на подалгебры $\mathfrak{g}_{R_{\pm}}$, сдвинутые при помощи постоянных элементов $c_{\mp} \in [\mathfrak{g}_{R_{\mp}}, \mathfrak{g}_{R_{\mp}}]$ соответственно. Заметим, что в этом случае полученные функции коммутируют относительно скобки Ли–Пуассона на алгебре $\mathfrak{g}$, “сдвинутой” постоянным элементом $c_+ - c_-$.

Рассмотрение коммутативных семейств на более сложных факторах (с неабелевой алгеброй $\mathfrak{a}$) тоже может быть полезным в теории солитонных уравнений. Действительно, наше второе наблюдение состоит в том, что, какой бы фактор алгебры $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ мы ни рассматривали, в уравнениях Лакса $\dot{L} = [L, M]$, которые соответствуют коммутирующим гамильтонианам (функциям Казимира, ограниченным на рассматриваемый фактор), можно выбрать M -оператор, принимающий значение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из этого следует, что можно получить уравнение нулевой кривизны с $\mathfrak{g}$ -значными U – V -парами как условие совместности уравнений Лакса на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$.

Мы иллюстрируем предлагаемый метод примерами абелевого и неабелевого уравнений поля Тоды (см. работы [13]–[15] и ссылки в них), которые естественным образом получаются в рамках изложенной схемы в случае, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй петель в разных градуировках. Соответствующая фактор-алгебра в этом случае представляет собой простейшее неабелево расширение алгебры $\mathfrak{g}$, полученное в рамках изложенной выше конструкции. В случае алгебры $\mathfrak{g} = gl(\infty)$, которая оснащена естественным разложением в сумму двух подалгебр, совпадающих с верхнетреугольными и строго нижнетреугольными матрицами, мы вновь выводим результаты работы [16], касающиеся скобки Ли–Пуассона, а также основанной на теории алгебр Ли интерпретации бесконечнокомпонентного уравнения поля Тоды, его U – V -пары, вспомогательных уравнений Лакса [11] и т. д.

В заключение с целью полноты изложения мы рассматриваем продолжение пуассоновых структур второго и третьего порядков, существующих для некоторых R -операторов на $\mathfrak{g}$, на классический дубль. Оказывается, что квадратичные и кубические структуры всегда продолжаются на классический дубль $\mathcal{G}$, если они существуют на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Однако их применение в теории солитонов ограничивается тем фактом, что используемые факторпространства (пуассоновы пространства для линейной $\mathcal{R}$ -скобки на $\mathcal{G}$) не являются, вообще говоря, пуассоновыми пространствами для квадратичной и кубической скобок.

Структура настоящей работы следующая: в разделе 2 мы вводим основные определения и обозначения; в разделе 3 мы используем классический дубль для получения коммутативных семейств на $\mathfrak{g}^*$ и его расширениях; в разделе 4 мы применяем полученные результаты для конструирования уравнений нулевой кривиз-

ны с $\mathfrak{g}$ -значными U - V -парами и иллюстрируем этот подход примерами абелевого и неабелевого уравнений Тоды; наконец, в разделе 5 мы рассматриваем продолжение квадратичных и кубичных пуассоновых структур на классический дубль.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Алгебры Ли и классические R -операторы. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли (конечно- или бесконечномерная) со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$, пусть $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ – линейный оператор. Оператор R называется классическим R -оператором, если он удовлетворяет модифицированному уравнению Янга–Бакстера [10]:

$$R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [R(X), R(Y)] = [X, Y]$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Используя классический R -оператор, можно задать другую скобку Ли на $\mathfrak{g}$ следующей формулой [10]:

$$[X, Y]_R = [R(X), Y] + [X, R(Y)], \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

Мы будем обозначать линейное пространство $\mathfrak{g}$, оснащенное скобкой $[\cdot, \cdot]_R$, через $\mathfrak{g}_R$. Мы будем использовать также следующие обозначения: $R_{\pm} \equiv R \pm \text{Id}$.

Известно [10], что образы $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} = \text{Im } R_{\pm}$ отображений $R_{\pm}$ определяют подалгебры Ли $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} \subset \mathfrak{g}$. Как легко увидеть из определения, $\mathfrak{g}_{R_+} + \mathfrak{g}_{R_-} = \mathfrak{g}$, но, вообще говоря, эта сумма не является прямой суммой векторных пространств, т. е. в общем случае $\mathfrak{g}_{R_+} \cap \mathfrak{g}_{R_-} \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ситуация намного упрощается в случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ оснащена так называемым разложением АКС в прямую сумму двух подалгебр Ли: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$. Действительно, если $P_{\pm}$ являются операторами, проецирующими на подалгебры $\mathfrak{g}_{\pm}$, то $R = P_+ - P_-$ является классической R -матрицей [10]. Легко видеть, что в этом случае операторы $R_{\pm}$ пропорциональны операторам проецирования на подалгебры $\mathfrak{g}_{\pm}$ соответственно, $R_{\pm} = \pm 2P_{\pm}$. Из этого следует также, что $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} \equiv \mathfrak{g}_{\pm}$ и $\mathfrak{g}_{R_+} \cap \mathfrak{g}_{R_-} = 0$. Более того, известно [10], что в этом случае имеет место разложение $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$.

2.2. Классический дубль. Рассмотрим “дубль” алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. прямую сумму $\mathcal{G} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Отождествим элемент $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$ с вектор-столбцом $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, где $X_i \in \mathfrak{g}$. Скобка Ли двух элементов $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{G}$ задается стандартной формулой

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \begin{pmatrix} [X_1, Y_1] \\ [X_2, Y_2] \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема была доказана в монографии [12].

ТЕОРЕМА 2.1. 1. Для произвольного классического R -оператора на $\mathfrak{g}$ линейный оператор на дубле, определяемый формулой

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} R & -R_- \\ R_+ & -R \end{pmatrix},$$

является классическим R -оператором на $\mathcal{G}$.

2. Соответствующая R -скобка $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{G}$ имеет вид

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} [X_1, Y_1]_R - ([X_1, R_-(Y_2)] + [R_-(X_2), Y_1]) \\ -[X_2, Y_2]_R + ([X_2, R_+(Y_1)] + [R_+(X_1), Y_2]) \end{pmatrix}.$$

3. R -оператор $\mathcal{R}$ имеет тип АКС.

Для удобства читателя мы приведем краткое доказательство п. 3 теоремы. Для этого рассмотрим следующие операторы:

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R} + \text{Id} = \begin{pmatrix} R_+ & -R_- \\ R_+ & -R_- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_- = \mathcal{R} - \text{Id} = \begin{pmatrix} R_- & -R_- \\ R_+ & -R_+ \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{\pm}} = \text{Im } \mathcal{R}_{\pm}$ для соответствующих подалгебр Ли. Легко видеть, что

$$\mathcal{R}_+(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} R_+(X_1) - R_-(X_2) \\ R_+(X_1) - R_-(X_2) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_-(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} R_-(X_1 - X_2) \\ R_+(X_1 - X_2) \end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \equiv \mathcal{G}_d \simeq \mathfrak{g}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-} \simeq \mathfrak{g}_R$, где

$$\mathcal{G}_d = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{g} \right\}, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-} = \left\{ \begin{pmatrix} R_-(X) \\ R_+(X) \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что $\text{Ker } \mathcal{R}_+ = \text{Im } \mathcal{R}_-$ и $\text{Ker } \mathcal{R}_- = \text{Im } \mathcal{R}_+$. Следовательно, разложение $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} + \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$ является разложением в прямую сумму векторных пространств и оператор $\mathcal{R}$ имеет тип АКС, т. е. $\mathcal{R} = \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}} - \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}}$. Этот факт также следует из легко доказываемых тождеств $\mathcal{R}_{\pm}^2 = 2\mathcal{R}_{\pm}$, $\mathcal{R}_+\mathcal{R}_- = 0$, подразумевающих, что операторы $\mathcal{R}_{\pm}$ пропорциональны проекционным операторам и их образы не пересекаются. Отсюда мы получаем $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \oplus \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$. Для $\mathcal{R}$ -скобки на дубле это означает следующее: $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathcal{R}} = 2([\mathcal{X}_+, \mathcal{Y}_+] - [\mathcal{X}_-, \mathcal{Y}_-])$, где $\mathcal{X}_{\pm} \equiv \mathcal{R}_{\pm}(\mathcal{X})$ или, в более явной форме,

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} [(R_+(X_1) - R_-(X_2)), (R_+(Y_1) - R_-(Y_2))] \\ [(R_+(X_1) - R_-(X_2)), (R_+(Y_1) - R_-(Y_2))] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [R_-(X_1 - X_2), R_-(Y_1 - Y_2)] \\ [R_+(X_1 - X_2), R_+(Y_1 - Y_2)] \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае R -операторов АКС все формулы этого раздела существенно упрощаются. В частности, действие R -оператора $\mathcal{R}$ на элемент $\mathcal{X}$ задается формулой

$$\mathcal{R}(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} X_1^+ - X_1^- + 2X_2^- \\ 2X_1^+ - X_2^+ + X_2^- \end{pmatrix},$$

а R -скобка (1) записывается следующим образом:

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} [X_1^+, Y_1^+] - [X_1^-, Y_1^-] - ([X_1^-, Y_2^-] + [X_2^-, Y_1]) \\ -[X_2^+, Y_2^+] + [X_2^-, Y_2^-] + ([X_2^-, Y_1^+] + [X_1^+, Y_2]) \end{pmatrix},$$

где $X_i = X_i^+ + X_i^-$, $Y_i = Y_i^+ + Y_i^-$ и $X_i^{\pm} = P_{\pm}(X)$, $Y_i^{\pm} = P_{\pm}(Y)$, $i = 1, 2$.

2.3. Дуальные пространства скобки Ли–Пуассона и инвариантные функции. Пусть $\mathfrak{g}^*$ – пространство, дуальное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ – естественное спаривание между $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$. Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где множество индексов I конечно в случае конечномерных алгебр Ли или счетно в бесконечномерном случае. Пусть $\{X_i^* \mid i \in I\}$ – базис в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, $\langle X_j^*, X_i \rangle = \delta_{ij}$. Пусть $L = \sum_{i \in I} L_i X_i^* \in \mathfrak{g}^*$ – элемент общего положения в пространстве $\mathfrak{g}^*$, L_i – координатные функции на $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим стандартную скобку Ли–Пуассона между функциями $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$:

$$\{F_1(L), F_2(L)\} = \langle L, [\nabla F_1, \nabla F_2] \rangle, \quad \nabla F_k(L) = \sum_{i \in I} \frac{\partial F_k(L)}{\partial L_i} X_i;$$

здесь $\nabla F_k(L)$ – так называемый алгеброзначный градиент функции F_k , $k = 1, 2$. При этом R -оператор задает R -скобку на $\mathfrak{g}^*$ следующим образом [10]:

$$\{F_1(L), F_2(L)\}_R = \langle L, [\nabla F_1, \nabla F_2]_R \rangle. \quad (2)$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{G}^*$, дуальное к классическому дублю. Определим его элементы $\mathcal{L} \in \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ как вектор-столбцы $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$, где $L_1, L_2 \in \mathfrak{g}^*$, а спаривание между $\mathcal{L} \in \mathcal{G}^*$ и $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$ зададим следующим образом:

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{X} \rangle = \langle L_1, X_1 \rangle + \langle L_2, X_2 \rangle.$$

Оно также определяет стандартную скобку Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$,

$$\{F_1(\mathcal{L}), F_2(\mathcal{L})\} = \langle \mathcal{L}, [\tilde{\nabla} F_1, \tilde{\nabla} F_2] \rangle, \quad (3)$$

и R -скобку на $\mathcal{G}^*$, соответствующую R -оператору $\mathcal{R}$,

$$\{F_1(\mathcal{L}), F_2(\mathcal{L})\}_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{L}, [\tilde{\nabla} F_1, \tilde{\nabla} F_2]_{\mathcal{R}} \rangle, \quad \tilde{\nabla} F = \begin{pmatrix} \nabla_1 F \\ \nabla_2 F \end{pmatrix}; \quad (4)$$

здесь $\nabla_{1,2} F$ – алгеброзначные градиенты функции F по переменным $L_{1,2}$.

Обозначим через R^* сопряженный к R оператор:

$$R^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \langle R^*(L), X \rangle \equiv \langle L, R(X) \rangle.$$

Легко видеть, что операторы, сопряженные к операторам $\mathcal{R}_\pm$, имеют следующий вид:

$$\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} R_+^*(L_1) + R_+^*(L_2) \\ -(R_-^*(L_1) + R_-^*(L_2)) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_-^*(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} R_-^*(L_1) + R_+^*(L_2) \\ -(R_-^*(L_1) + R_+^*(L_2)) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Мы будем использовать эти явные формулы при конструировании пуассон-коммутирующих функций.

Далее нам также потребуется явная форма функций Казимира алгебры $\mathcal{G}$. Пусть $I(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$ – функция Казимира алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. $\{I(L), F(L)\} = 0$ для всех $F(L) \in S(\mathfrak{g}^*)$. Обозначим через $\{I_k(L)\}_{k \in K}$ набор генераторов кольца функции Казимира на $\mathfrak{g}^*$. Здесь набор индексов K может быть бесконечным, если алгебра Ли бесконечномерна.

ЛЕММА 2.1. *Кольцо функции Казимира алгебры $\mathcal{G}$ порождается следующими функциями:*

$$I_{k,1}(\mathcal{L}) \equiv I_k(L_1), \quad I_{k,2}(\mathcal{L}) \equiv I_k(L_2), \quad k \in K. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы очевидно.

Дадим краткие комментарии по поводу квадратичных функций Казимира и коммутирующих функций, которые могут быть получены с их помощью. Пусть $(\cdot, \cdot)$ – билинейная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$. С ее помощью можно отождествить пространство $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. В этом случае мы имеем следующие очевидные квадратичные функции Казимира (или генерирующие функции формальных функций Казимира в случае алгебр петель):

$$I_{2,1} = \frac{1}{2}(L_1, L_1), \quad I_{2,2} = \frac{1}{2}(L_2, L_2).$$

3. КЛАССИЧЕСКИЙ ДУБЛЬ И КОММУТИРУЮЩИЕ ПОТОКИ

Чтобы перейти к основной конструкции, рассматривающей в настоящей статье, необходимо сформулировать следующую теорему, которая является следствием общей теории R -скобок [10], примененной к классическому дублю.

ТЕОРЕМА 3.1. 1. *Функции Казимира $I_{k,\epsilon}(\mathcal{L})$, $\epsilon = 1, 2$, алгебры $\mathcal{G}$ коммутируют по отношению к скобкам Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{G}^*$.*

2. *Гамильтоновы потоки*

$$\frac{d}{dt_k^\epsilon} F(\mathcal{L}) = \{F(\mathcal{L}), I_{k,\epsilon}\}_{\mathcal{R}}, \quad k \in K, \quad \epsilon = 1, 2,$$

порожденные функциями $I_{k,\epsilon}$, записываются в форме Эйлера–Арнольда:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt_k^\epsilon} = \text{ad}_{\mathcal{R}_+ \tilde{\nabla} I_{k,\epsilon}}^* \mathcal{L}. \quad (7)$$

Рассмотрим кратко коммутирующие потоки на алгебре $\mathfrak{g}$ и ее расширениях, которые могут быть получены с использованием теории классического дубля. С этой целью напомним, что проекция на фактор-алгебру является каноническим гомоморфизмом, что позволяет получить следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть J – идеал в алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$. Обозначим через $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/J$ проекцию на фактор-алгебру. Пусть π^* – дуальное отображение, тогда:*

1) *функции $I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))$ коммутируют относительно скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{R}}$ на $(\mathcal{G}/J)^*$;*

2) *гамильтоновы потоки функции $I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))$ записываются в форме Эйлера–Арнольда*

$$\pi^* \left(\frac{d\mathcal{L}}{dt_k^\epsilon} \right) = \text{ad}_{M_{k,\epsilon}}^* \pi^*(\mathcal{L}), \quad (8)$$

где

$$M_{k,\epsilon} = \mathcal{R}_+(\pi \tilde{\nabla} I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))), \quad k \in K, \quad \epsilon = 1, 2.$$

Предположим, что существуют нетривиальные идеалы $J_{R_{\pm}} \subset \mathfrak{g}_{R_{\pm}}$ такие, что фактор-алгебры $\mathfrak{g}_{R_{\pm}}/J_{R_{\pm}}$ конечномерны. В таком случае, применив следствие 3.1 и взяв фактор по идеалу $J = J_{R_+} + J_{R_-}$, мы получим пуассон-коммутирующий набор функций на пространстве, дуальном к расширению алгебры $\mathfrak{g}$ конечномерными алгебрами. Действительно, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/J = (\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \ominus \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-})/J \simeq \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}/J$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для фактор-алгебр, описанных выше, M -операторы из уравнений Лакса (8) имеют вид

$$M_{k,1} = \begin{pmatrix} R_+(\nabla I_{k,1}(\pi^*(\mathcal{L}))) \\ R_+(\nabla I_{k,1}(\pi^*(\mathcal{L}))) \end{pmatrix}, \quad M_{k,2} = - \begin{pmatrix} R_-(\nabla I_{k,2}(\pi^*(\mathcal{L}))) \\ R_-(\nabla I_{k,2}(\pi^*(\mathcal{L}))) \end{pmatrix},$$

т.е. принадлежат диагональной подалгебре и могут быть отождествлены с элементами алгебры $\mathfrak{g}$. Этот факт будет использован при выводе уравнений нулевой кривизны со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что соответствующие уравнения Лакса (8), динамические переменные, скобки Пуассона и т.д. принадлежат дублю алгебры $\mathfrak{g}$. Отметим также, что отсутствие проекционного оператора π в формулах для M -операторов объясняется тем, что выбор идеала обеспечивает равенство $\mathcal{R}_+\pi = \mathcal{R}_+$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим R -операторы АКС: $R = P_+ - P_-$. Опишем в явном виде фактор-алгебры $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/J$ и соответствующие дуальные пространства. В этом случае мы имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} = \mathfrak{g}_{\pm}$ и $J_{R_{\pm}} \equiv J_{\pm}$ — идеалы в $\mathfrak{g}_{\pm}$. Элементы соответствующих фактор-алгебр $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/J$, где $J = J_+ + J_-$, задаются как

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1^+ + X_1^{-'} \\ X_2^- + X_2^{+'} \end{pmatrix}, \quad X_1^{-'} \in \mathfrak{g}_-/J_-, \quad X_2^{+'} \in \mathfrak{g}_+/J_+.$$

Соответствующее дуальное пространство состоит из элементов вида

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^+ + L_1^{-'} \\ L_2^- + L_2^{+'} \end{pmatrix},$$

где $L_1^{-'} \in (\mathfrak{g}_-/J_-)^*$, $L_1^+ \in (\mathfrak{g}_+)^*$, $L_2^- \in (\mathfrak{g}_-)^*$, $L_2^{+'} \in (\mathfrak{g}_+/J_+)^*$.

В следующем пункте мы рассмотрим детальный случай $\mathfrak{a} \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}/J = 0$ и абелевой алгебры $\mathfrak{a}$, которые приводят к коммутативной алгебре интегралов на самом пространстве $\mathfrak{g}^*$.

3.1. Дуальная R -матричная коммутативность. Рассмотрим следствие из общей теоремы 3.1, которое потребуется нам для построения функций, пуассон-коммутирующих по отношению к стандартной скобке Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ на $\mathfrak{g}^*$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. 1. *Функции $I_k(R_{\pm}^*(L))$ на $\mathfrak{g}^*$ генерируют абелеву подалгебру в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ по отношению к исходной скобке Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ на $\mathfrak{g}^*$:*

$$\begin{aligned} \{I_k(R_+^*(L)), I_l(R_+^*(L))\} &= 0, \\ \{I_k(R_-^*(L)), I_l(R_-^*(L))\} &= 0, \\ \{I_k(R_+^*(L)), I_l(R_-^*(L))\} &= 0. \end{aligned}$$

2. Гамильтоновы уравнения, отвечающие гамильтонианам $I_k^{R\pm}(L)$, могут быть записаны в форме Эйлера–Арнольда:

$$\frac{dL}{dt_k^\pm} = \text{ad}_{M_k^\pm}^* L, \quad M_k^\pm = \nabla I_k(R_\pm^*(L)). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем проекции функций $I_{k,\epsilon}(\mathcal{L})$, $\epsilon = 1, 2$, на пространство, дуальное к фактор-алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/\mathcal{G}_{R_-}$, которое совпадает с пространством, дуальным к подалгебре $\mathcal{G}_{R_+}$. Используя формулы (5), (6), мы получаем следующее выражение для проекций функций Казимира:

$$I_{k,1}(P_{\mathcal{G}_{R_+}}^*(\mathcal{L})) = I_k(R_+^*(L_1 + L_2)), \quad I_{k,2}(P_{\mathcal{G}_{R_+}}^*(\mathcal{L})) = I_k(R_-^*(L_1 + L_2)),$$

где мы приняли во внимание, что $P_{\mathcal{G}_{R_+}}^* = \mathcal{R}_+^*/2$ и предположили, что I_k – однородная функция от L .

Заметим, что, поскольку $\mathcal{R}_+$ – проекционный оператор и соответствующий R -оператор $\mathcal{R}$ имеет тип АКС, легко вывести следующее равенство:

$$\{F(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L})), G(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L}))\} = \{F(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L})), G(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L}))\}_{\mathcal{R}}.$$

Используя тот факт, что проекция на фактор-алгебру является каноническим гомоморфизмом, мы получаем соотношение

$$\{F(\mathcal{R}_\pm^*(\mathcal{L})), G(\mathcal{R}_\pm^*(\mathcal{L}))\}_{\mathcal{R}} = (\{F(\mathcal{L}), G(\mathcal{L})\}_{\mathcal{R}})|_{\mathcal{L}=\mathcal{R}_\pm^*(\mathcal{L})}.$$

Отсюда, положив $F = I_{k,\epsilon}$, $G = I_{l,\epsilon'}$, мы получим

$$\{I_{k,\epsilon}(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L})), I_{l,\epsilon'}(\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L}))\} = (\{I_{k,\epsilon}(\mathcal{L}), I_{l,\epsilon'}(\mathcal{L})\}_{\mathcal{R}})|_{\mathcal{L}=\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L})}, \quad \epsilon, \epsilon' = 1, 2.$$

С другой стороны, $\{I_{k,\epsilon}(\mathcal{L}), I_{l,\epsilon'}(\mathcal{L})\}_{\mathcal{R}} = 0$ в силу теоремы 3.1.

Используя явную форму функций $I_{k,\epsilon}(\mathcal{L})$, мы, наконец, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{I_k(R_+^*(L_1 + L_2)), I_l(R_+^*(L_1 + L_2))\} &= 0, \\ \{I_k(R_-^*(L_1 + L_2)), I_l(R_-^*(L_1 + L_2))\} &= 0, \\ \{I_k(R_+^*(L_1 + L_2)), I_l(R_-^*(L_1 + L_2))\} &= 0. \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства п. 1 теоремы остается заметить, что элементы вида $L \equiv L_1 + L_2$ принадлежат пространству $(\mathcal{G}_d)^*$ и соответствующие координатные функции образуют алгебру Ли, изоморфную $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot\})$, по отношению к исходной скобке Ли–Пуассона на $\mathcal{G}$.

Второе утверждение теоремы доказывается на основе п. 2 теоремы 3.1. Оно может быть также доказано с использованием того факта, что любое гамильтоново уравнение на $\mathfrak{g}^*$ переписывается в виде уравнения Эйлера–Арнольда. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [8] данная теорема была доказана без использования классического дубля. Однако доказательство, основанное на дубле, является более простым и делает теорему 3.2 понятной с точки зрения стандартной R -операторной схемы.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим детальнее случай $R = P_+ - P_-$ и приведем явный вид алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}$, реализованной как фактор-алгебра. Мы имеем

$$\text{Ker } \mathcal{R}_+ = \text{Im } \mathcal{R}_- = \begin{pmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{pmatrix}.$$

Соответствующая фактор-алгебра $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/\text{Im } \mathcal{R}_-$ может быть отождествлена с линейным пространством, состоящим из элементов вида $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{pmatrix}$. Это пространство изоморфно алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}$, и изоморфизм задается отображением $\mathcal{R}_+$:

$$\begin{pmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_1^+ - X_2^- \\ X_1^+ - X_2^- \end{pmatrix}.$$

Соответствующее дуальное пространство состоит из элементов $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^+ \\ L_2^- \end{pmatrix}$. Заметим, что такие элементы могут быть отождествлены с элементами $L = L_1^+ + L_2^-$ линейного пространства $\mathfrak{g}^*$. Более того, соответствующая скобка Ли–Пуассона этих элементов, вычисленная на фактор-алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/\text{Im } \mathcal{R}_-$, совпадает со стандартной скобкой Ли–Пуассона элемента $L = L^+ + L^-$ на $\mathfrak{g}^*$.

Функции Казимира $I_{k,1}(\mathcal{L})$ и $I_{k,2}(\mathcal{L})$, ограниченные на пространство, дуальное к фактор-алгебре, совпадают с функциями $I_k(L_1^+)$ и $I_k(L_2^-)$ соответственно. После описанного выше отождествления они переходят в функции $I_k(L^+)$ и $I_k(L^-)$ на $\mathfrak{g}^*$.

3.2. Сдвиг аргумента и коммутативные подалгебры. Рассмотрим коммутативные подалгебры функций на $\mathfrak{g}^*$, которые обобщают коммутативные алгебры, сконструированные в предыдущем пункте. Эти подалгебры зависят от дополнительных параметров, получаемых с использованием теории классического дубля. Метод, который позволяет ввести указанные дополнительные параметры в коммутативные подалгебры, является обобщением так называемого метода сдвига аргумента. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $c_{\pm}$ – постоянные элементы пространств $\mathfrak{g}_{R_{\pm}}^*$ такие, что

$$c_{\pm} \perp ([\mathfrak{g}_{R_+}, \mathfrak{g}_{R_+}] \cup [\mathfrak{g}_{R_-}, \mathfrak{g}_{R_-}]),$$

и пусть $I_k(L)$, $I_l(L)$ – функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \{I_k(R_+^*(L) + c_-), I_l(R_+^*(L) + c_-)\}_c &= 0, \\ \{I_k(R_-^*(L) + c_+), I_l(R_-^*(L) + c_+)\}_c &= 0, \\ \{I_k(R_+^*(L) + c_-), I_l(R_-^*(L) + c_+)\}_c &= 0, \end{aligned}$$

где $\{\cdot, \cdot\}_c$ – “сдвинутая” скобка Пуассона:

$$\{F_1(L), F_2(L)\}_c = \langle L, [\nabla F_1, \nabla F_2] \rangle + \langle c_- - c_+, [\nabla F_1, \nabla F_2] \rangle. \quad (10)$$

2. Соответствующие гамильтоновы уравнения записываются в форме уравнений Эйлера–Арнольда:

$$\frac{dL}{dt_k^{\pm}} = \text{ad}_{\nabla I_k(R_{\pm}^*(L) + c_{\mp})}^*(L + c_- - c_+). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства п. 1 теоремы примем во внимание, что $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \oplus \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$. Следовательно, $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}}] = [\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}] \oplus [\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$. Опишем явно идеал $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$. Мы имеем

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \middle| X_1 \in \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}, X_2 \in \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+} \right\}.$$

Из этого следует, что элемент $C = (c_1, c_2) \in \mathcal{G}^*$ ортогонален $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$, если $c_1 \perp [\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}, \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}]$ и $c_2 \perp [\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}, \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}]$. С другой стороны, из явной формы элементов $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}^*$ следует, что $c_2 = -c_1 = -c$, и $C = (c, -c)$ является элементом пространства, дуального к подалгебре Ли $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$. Этот элемент ортогонален $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$, если $c \perp ([\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}, \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}] \cup [\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}, \mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}])$. Таким образом, факторизируя алгебру $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ по идеалу $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$, принимая во внимание, что проекция на фактор-алгебру является каноническим гомоморфизмом, и применяя теорему 3.1 к функциям Казимира $I_{k,\epsilon}$, $I_{l,\epsilon'}$, мы получаем

$$\begin{aligned} \{I_k(R_+^*(L_1 + L_2) + c), I_l(R_+^*(L_1 + L_2) + c)\} &= 0, \\ \{I_k(R_-^*(L_1 + L_2) + c), I_l(R_-^*(L_1 + L_2) + c)\} &= 0, \\ \{I_k(R_+^*(L_1 + L_2) + c), I_l(R_-^*(L_1 + L_2) + c)\} &= 0. \end{aligned}$$

В результате мы получаем коммутативную подалгебру с элементом сдвига c , входящим симметрично как в “положительные”, так и в “отрицательные” интегралы, т. е. элемент c имеет компоненты, принадлежащие $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}^*$ и $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}^*$. Заметим, что сдвиг принадлежащих $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_\pm}^*$ матриц Лакса на постоянный элемент из того же пространства $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_\pm}^*$ может быть удален путем замены переменных. Однако это ведет к изменению скобок Пуассона. Сделав такую замену и положив $c_\pm = \pm R_\pm^*(c)$, $L = L_1 + L_2$, мы получаем утверждение п. 1 теоремы.

Утверждение п. 2 доказывается аналогично утверждению п. 2 предыдущей теоремы. Теорема доказана.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим, как и в предыдущих примерах, R -операторы АКС: $R = R_+ - R_-$. Опишем в явном виде фактор-алгебру $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$ и соответствующее дуальное пространство. Мы имеем $[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}] = [\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+] \oplus [\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-]$. Элементы факторпространств $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$ записываются как

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1^+ + X_1^{-'} \\ X_2^- + X_2^{+'} \end{pmatrix},$$

где $X_1^+ \in \mathfrak{g}_+$, $X_1^{-'} \in \mathfrak{g}_-/[\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-]$, $X_2^- \in \mathfrak{g}_-$, $X_2^{+'} \in \mathfrak{g}_+ / [\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+]$. Соответствующее дуальное пространство состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} L_1^+ + L_1^{-'} \\ L_2^- + L_2^{+'} \end{pmatrix}, \quad L_1^{-'} \in (\mathfrak{g}_- / [\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-])^*, \quad L_2^{+'} \in (\mathfrak{g}_+ / [\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+])^*.$$

Элементы $L_1^{-'}$, $L_2^{+'}$ постоянны по отношению к скобкам Пуассона на $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/[\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}, \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}]$, и можно положить $c_- = L_1^{-'}$ и $c_+ = L_2^{+'}$.

Функции Казимира, ограниченные на дуальное пространство фактор-алгебры, — это функции $I_k(L_1^+ + L_1^{-'})$ и $I_l(L_2^- + L_2^{+'})$. Используя те же аргументы, что и в примере 2, и делая то же отождествление, мы можем записать эти функции как $I_k(L^+ + c_-)$

и $I_l(L^- + c_+)$, где L – элемент общего положения из пространства $\mathfrak{g}^*$. В силу доказанной теоремы 3.3 они коммутируют по отношению к скобке $\{\cdot, \cdot\}_c$ на $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} \{I_k(L^+ + c_-), I_l(L^+ + c_-)\}_c &= 0, \\ \{I_k(L^- + c_+), I_l(L^- + c_+)\}_c &= 0, \\ \{I_k(L^+ + c_-), I_l(L^- + c_+)\}_c &= 0, \end{aligned}$$

где сдвинутая скобка $\{\cdot, \cdot\}_c$ определена с помощью формулы (10).

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИЕРАРХИИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПОТОКИ

4.1. Дубли, R -операторы и отрицательные потоки солитонных иерархий. Используя результаты предыдущего раздела, можно вывести иерархию интегрируемых уравнений в частных производных, допускающих представления нулевой кривизны. Мы будем использовать один из ли-алгебраических подходов к теории солитонных уравнений [3]. Он базируется на том, что уравнения нулевой кривизны интерпретируются как условие согласованности двух вспомогательных уравнений Лакса на пространстве, дуальном к бесконечномерной алгебре Ли.

Для простоты мы сформулируем наш результат для градуированных бесконечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$, элементами которых являются $\mathfrak{s}$ -значные полиномы Лорана от одной комплексной переменной λ , или их подалгебр. Здесь $\mathfrak{s}$ – простая алгебра Ли в некоторой матричной реализации. Заметим, что в этом случае дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ может быть отождествлено с пространством формальных $\mathfrak{s}$ -значных рядов Лорана.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, определенная выше. Обозначим через $\mathcal{G}$ ее дубль и через $\mathcal{G}^*$ – соответствующее дуальное пространство. Пусть J – идеал в алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$, имеющий конечную коразмерность. Обозначим через $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/J$ естественную проекцию на фактор-алгебру, а через $\pi^*: (\mathcal{G}/J)^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ – дуальное отображение. Если гамильтонианы $I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))$ на $\mathcal{G}^*$ являются конечными полиномами, то $\mathfrak{g}$ -значные функции $M_{k,+} = R_+ \nabla I_{k,1}(\pi^*(\mathcal{L}))$ и $M_{l,-} = R_- \nabla I_{l,2}(\pi^*(\mathcal{L}))$ удовлетворяют уравнениям нулевой кривизны со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\frac{\partial M_{k,\pm}}{\partial t_l^{\pm}} - \frac{\partial M_{l,\pm}}{\partial t_k^{\pm}} + [M_{k,\pm}, M_{l,\pm}] = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial M_{k,\pm}}{\partial t_l^{\mp}} - \frac{\partial M_{l,\mp}}{\partial t_k^{\mp}} + [M_{k,\pm}, M_{l,\mp}] = 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, используя коммутативность гамильтоновых потоков, порожденных гамильтонианами $I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))$, $I_{l,\epsilon'}(\pi^*(\mathcal{L}))$ (здесь $\epsilon, \epsilon' \in \{+, -\}$), и два уравнения Эйлера–Арнольда (8), мы без труда можем вывести следующее уравнение:

$$\text{ad}_{[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}]}^* \pi^*(\mathcal{L}) = 0, \quad (14)$$

где

$$[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}] \equiv \frac{\partial M_{k,\epsilon}}{\partial t_l^{\epsilon'}} - \frac{\partial M_{l,\epsilon'}}{\partial t_k^{\epsilon}} + [M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}].$$

В рассматриваемом случае коприсоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ (и, следовательно, ее дубля $\mathcal{G}$) может быть отождествлено с присоединенным, поэтому из уравнения (14) вытекает, что $[[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}]]$ принадлежит ядру оператора $\text{ad}_{\pi^*(\mathcal{L})}$. Подстилающая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{s}$ является полупростой, откуда следует, что это ядро натянуто на выражение вида $(\pi^*(\mathcal{L}))^k$, где ассоциативные умножения в дубле понимаются как покомпонентные. Поскольку J является идеалом конечной коразмерности в алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$, а также имеют место соотношения $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \oplus \mathcal{G}_{\mathcal{R}_-}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+} \simeq \mathfrak{g}$, и в компонентной форме дуальное пространство $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_+}^*$ может быть записано как

$$\mathcal{R}_+^*(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} R_+^*(L_1 + L_2) \\ -R_-^*(L_1 + L_2) \end{pmatrix},$$

мы получаем, что обе компоненты матрицы $\pi^*(\mathcal{L})$ и, следовательно, матриц $(\pi^*(\mathcal{L}))^k$ являются (каждая в своем направлении) полубесконечными формальными рядами Лорана. С другой стороны, функции $I_{k,\epsilon}(\pi^*(\mathcal{L}))$ и $I_{l,\epsilon'}(\pi^*(\mathcal{L}))$ по условию теоремы представляют собой конечные полиномы. Следовательно, их матричные градиенты $M_{k,\epsilon}$ и $M_{l,\epsilon'}$, а также $[[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}]]$ принадлежат алгебре $\mathfrak{g}$, т. е. алгебре $\mathfrak{s}$ -значных полиномов Лорана (здесь $\mathfrak{g}$ реализована как диагональная подалгебра в $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$). Следовательно, $[[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}]]$ не может быть равным линейной комбинации выражений вида $(\pi^*(\mathcal{L}))^k$, кроме случая тривиальной линейной комбинации. Это означает, что $[[M_{k,\epsilon}, M_{l,\epsilon'}]] = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Используя те же аргументы, можно показать, что данная теорема выполняется также и для более сложных бесконечномерных алгебр Ли, например для квазиградуированных алгебр Ли, которые отвечают за интегрируемость уравнений Ландау–Лившица и его различных обобщений [7], или для градуированных алгебр Ли типа A_∞ , C_∞ , D_∞ . В последнем случае вместо условия полиномиальности гамильтонианов нужно наложить менее жесткое условие.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Заметим, что уравнения (12), (13) определяют три типа интегрируемых иерархий: две “малые” иерархии, ассоциированные с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_\pm}$ и определяемые уравнениями (12), и одну “большую” иерархию, ассоциированную со всей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и включающую оба типа уравнений (12) и (13). Уравнения (13) содержат U – V -пары с U -оператором, принимающим значение в алгебре $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_+}$, и V -оператором, принимающим значение в алгебре $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_-}$. Их можно интерпретировать как “отрицательные потоки” интегрируемых иерархий, ассоциированных с алгебрами $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_\pm}$.

4.2. Случай градуированных алгебр Ли. В этом пункте мы продемонстрируем, как описанная выше общая схема генерации U – V -пар, удовлетворяющих уравнению нулевой кривизны, работает для конкретных алгебр Ли. Мы сосредоточим наше внимание на простейшем из возможных случаев, связанным с градуированными алгебрами Ли.

4.2.1. Факторы дубля и инвариантные функции. Рассмотрим пример $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли и фактор-алгебр соответствующих дублей. По определению градуированных алгебр Ли мы имеем

$$\mathfrak{g} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}.$$

Используя свойства градуированности, легко получить разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, где $\mathfrak{g}_+ = \sum_{j \geq 0} \mathfrak{g}_j$ и $\mathfrak{g}_- = \sum_{j < 0} \mathfrak{g}_j$ – подалгебры Ли. Обозначим через $P_{\pm}$ операторы проецирования на подалгебры Ли $\mathfrak{g}_{\pm}$. Тогда $R = P_+ - P_-$ есть классический R -оператор [17]. Стандартным образом [17] получаем, что $J_{+k} = \sum_{j \geq k} \mathfrak{g}_j$ и $J_{-l} = \sum_{j > l} \mathfrak{g}_{-j}$ – идеалы в подалгебрах $\mathfrak{g}_{\pm}$ и в алгебре $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. Следовательно, можно рассмотреть фактор-алгебру $\mathfrak{g}_R / (J_{+k} \oplus J_{-l})$ и фактор-алгебру $\mathcal{G}_R / (J_{+k} \oplus J_{-l})$ соответствующего дубля. Элементы последней фактор-алгебры имеют вид

$$\begin{pmatrix} X_1^+ + X_1^{-\prime} \\ X_2^- + X_2^{+\prime} \end{pmatrix}, \quad X_1^+ \in \mathfrak{g}_+, \quad X_1^{-\prime} \in \sum_{j=1}^l \mathfrak{g}_{-j}, \quad X_2^- \in \mathfrak{g}_-, \quad X_2^{+\prime} \in \sum_{j=0}^k \mathfrak{g}_j.$$

Соответствующие элементы дуального пространства имеют следующую явную форму:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^+ + L_1^{-\prime} \\ L_2^- + L_2^{+\prime} \end{pmatrix}, \quad L_1^+ \in \mathfrak{g}_+^*, \quad L_1^{-\prime} \in \sum_{j=1}^l \mathfrak{g}_{-j}^*, \quad L_2^- \in \mathfrak{g}_-^*, \quad L_2^{+\prime} \in \sum_{j=0}^k \mathfrak{g}_j^*.$$

Отметим, что соответствующие компоненты оператора Лакса, а именно элементы $L_1 = L_1^+ + L_1^{-\prime}$ и $L_2 = L_2^- + L_2^{+\prime}$, являются полубесконечными (т.е. бесконечными только в одном направлении).

Предположим, что на алгебре $\mathfrak{g}$ существует инвариантная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$ такая, что $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) \sim \delta_{i+j,0}$. В этом случае можно отождествить пространства $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$ и построить функцию Казимира второго порядка с помощью следующих формул:

$$I_{2,1}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (L_1^{(i)}, L_1^{(-i)}), \quad I_{2,2}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (L_2^{(i)}, L_2^{(-i)}),$$

где $L_{1,2}^{(\pm i)} \in \mathfrak{g}_{\mp i}$. Отметим, что на указанных фактор-алгебрах приведенные выше выражения являются конечными полиномами, если пространство $\mathfrak{g}_i$ конечномерно.

Рассмотрим несколько примеров.

4.2.2. Общая неабелева система Тоды и градуированные алгебры Ли. Рассмотрим описанную выше конструкцию при $k = 1, l = 1$. В этом случае мы будем иметь

$$I_{2,1}^0 = \frac{1}{2} (L_1^{(0)}, L_1^{(0)}) + (L_1^{(1)}, L_1^{(-1)}), \quad I_{2,2}^0 = \frac{1}{2} (L_2^{(0)}, L_2^{(0)}) + (L_2^{(1)}, L_2^{(-1)}),$$

а матрица Лакса запишется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^+ + L_1^{(-1)} \\ L_2^- + L_2^{(0)} + L_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad L_1^+ = \sum_{i=0}^{\infty} L_1^{(i)}, \quad L_2^- = \sum_{i=1}^{\infty} L_1^{(-i)}.$$

Отметим, что $L_1^{(-1)}$ является центральным элементом благодаря тому факту, что $L_1^{(-1)} \in (\mathfrak{g}_- / [\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-])^*$.

M -операторы, соответствующие интегралам $I_{2,1}^0, I_{2,2}^0$, имеют следующий вид:

$$M_{2,1}^0 = \mathcal{R}_+ \nabla I_{2,1}^0 = \begin{pmatrix} \bar{L}_1^{(0)} + \bar{L}_1^{(1)} \\ \bar{L}_1^{(0)} + \bar{L}_1^{(1)} \end{pmatrix}, \quad M_{2,2}^0 = \mathcal{R}_+ \nabla I_{2,2}^0 = - \begin{pmatrix} \bar{L}_2^{(-1)} \\ \bar{L}_2^{(-1)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{L}_1^{(0)} &= \frac{1}{2} \nabla(L_1^{(0)}, L_1^{(0)}) \in \mathfrak{g}_0, & \bar{L}_1^{(1)} &= P_+ \nabla(L_1^{(1)}, L_1^{(-1)}) \in \mathfrak{g}_1, \\ \bar{L}_2^{(-1)} &= P_- \nabla(L_2^{(1)}, L_2^{(-1)}) \in \mathfrak{g}_{-1}.\end{aligned}$$

Их компоненты, а именно операторы

$$U = \bar{L}_1^{(0)} + \bar{L}_1^{(1)}, \quad V = \bar{L}_2^{(-1)}, \quad (15)$$

являются U - V -парами абелевых и неабелевых полей Тоды, как будет показано ниже.

Рассмотрим уравнение нулевой кривизны для данной U - V -пары:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0.$$

Это уравнение дает следующие равенства для однородных компонент:

$$\frac{\partial \bar{L}_1^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{L}_1^{(0)}}{\partial t} = -[\bar{L}_1^{(1)}, \bar{L}_2^{(-1)}], \quad \frac{\partial \bar{L}_2^{(-1)}}{\partial x} = [\bar{L}_1^{(0)}, \bar{L}_2^{(-1)}]. \quad (16)$$

Первое из этих уравнений удовлетворяется автоматически в силу того, что элемент $\bar{L}_1^{(1)}$ получен с помощью центрального элемента $L_1^{(-1)}$ и, следовательно, $\bar{L}_1^{(1)} = C^{(1)} = \text{const}$. Решим последнее из уравнений системы (16). Учитывая градуированность рассматриваемой алгебры, легко заметить, что $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ является подалгеброй. Обозначим через G_0 соответствующую группу Ли. Пусть $g_0 \in G_0$. Прямой проверкой легко убедиться, что замена переменных

$$\bar{L}_2^{(-1)} = g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}, \quad \bar{L}_1^{(0)} = (\partial_x g_0) g_0^{-1}, \quad g_0 = g_0(x, t),$$

где $C^{(-1)}$ – постоянный элемент пространства $\mathfrak{g}_{-1}$, дает решение последнего из трех уравнений системы (16). Второе уравнение системы после подстановки решения третьего уравнения приобретает вид

$$\partial_t((\partial_x g_0) g_0^{-1}) = -[C^{(1)}, g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}] \quad (17)$$

и представляет собой так называемое уравнение неабелевого поля Тоды [15].

4.3. Алгебры петель и стандартная цепочка Тоды. Основной пример изложенной выше конструкции связан с алгебрами петель. Пусть $\mathfrak{s}$ – простая алгебра Ли. Обозначим через $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \otimes \text{Pol}(\lambda, \lambda^{-1})$ соответствующую алгебру петель. Предположим, что $\mathfrak{s}$ снабжена автоморфизмом $\sigma: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ порядка p . Существует естественное разложение [18] $\mathfrak{s} = \sum_{i=0}^{p-1} \mathfrak{s}_i$ такое, что

$$\mathfrak{s}_k = \{X \in \mathfrak{s} \mid \sigma(X) = e^{2\pi i k/p} X\}.$$

В частности, $\mathfrak{s}_0$ является подалгеброй, постоянной по отношению к действию автоморфизма σ .

Продолжим рассматриваемую градуировку на алгебру петель $\mathfrak{g}$, положив по определению

$$\deg \lambda = p, \quad \deg X \otimes q(\lambda) = \deg X + \deg q(\lambda).$$

В этом случае мы получим

$$\mathfrak{g}_j = \{X(\lambda) \in \mathfrak{s} \otimes \text{Pol}(\lambda, \lambda^{-1}) \mid \deg X(\lambda) = j\}.$$

В частности, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{s}_0$. Соответствующая группа $G_0 \subset G$ совпадает с группой Ли алгебры $\mathfrak{s}_0$. Уравнение (17) написано для элемента этой группы.

Рассмотрим наиболее интересный пример, отвечающий абелевой группе G_0 . Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра петель в основной градуировке. Более детально, пусть $\sigma: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ – автоморфизм Кокстера. Обозначим через h число Кокстера алгебры $\mathfrak{s}$. Мы имеем также соответствующую $\mathbb{Z}_h$ -градуировку алгебры $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{s} = \sum_{i=0}^{h-1} \mathfrak{s}_i.$$

Подалгебра $\mathfrak{s}_0$ совпадает с подалгеброй Картана $\mathfrak{h} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{H_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, \text{rank } \mathfrak{g}\}$, более того, $\mathfrak{s}_k = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta, |\alpha| = k \bmod h\}$. Здесь H_{α_i} , X_{α} – базис Картана–Вейля алгебры $\mathfrak{s}$, Δ – множество простых корней и $|\alpha|$ обозначает длину корня. В частности, $H_{\alpha_i} = [X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}]$, если α_i – простые корни.

Опишем явно подпространство $\mathfrak{g}_i$. По определению имеем

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{g}_k = \sum_{|\alpha|=k} \mathfrak{s}_{\alpha} + \lambda \sum_{|\alpha|=h-k} \mathfrak{s}_{-\alpha}, \quad k = 1, \dots, h-1,$$

где $\mathfrak{s}_{\alpha} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{\alpha}\}$. Другие градуированные подпространства записываются следующим образом: $\mathfrak{g}_{k+nh} = \lambda^n \mathfrak{g}_k$, $k = 1, \dots, h-1$. Рассмотрим U – V -пару (15):

$$U = (\partial_x g_0) g_0^{-1} + C^{(1)}, \quad V = g_0 C^{(-1)} g_0^{-1}.$$

В данном случае группа G_0 является абелевой и совпадает с подгруппой Картана, поэтому легко параметризовать ее элемент g_0 как $g_0 = \exp\{\sum_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{s}} \phi_i H_{\alpha_i}\}$ и положить, что

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{s}} \partial_x \phi_i H_{\alpha_i} + \sum_{\alpha_i \in P} c_{\alpha_i}^{(1)} X_{\alpha_i} + \lambda c_{-\theta}^{(1)} X_{-\theta}, \\ V &= \sum_{\alpha_i \in P} c_{\alpha_i}^{(-1)} e^{-\alpha_i(\phi)} X_{-\alpha_i} + \lambda^{-1} c_{\theta}^{(-1)} e^{-\theta(\phi)} X_{\theta}, \end{aligned}$$

где P – множество простых корней, θ – старший корень и H_{α_i} – базисный элемент подалгебры Картана, соответствующий простому корню α_i . В этой U – V -паре легко узнать U – V -пару конечнокомпонентного поля Тоды [14]. Соответствующие уравнения (17) принимают следующий вид:

$$\partial_t \partial_x \phi_i = c_{\alpha_i}^{(1)} c_{-\alpha_i}^{(-1)} e^{-\alpha_i(\phi)} + a_i c_{-\theta}^{(1)} c_{\theta}^{(-1)} e^{\theta(\phi)}, \quad \phi = \sum_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{s}} \phi_i H_{\alpha_i}, \quad (18)$$

где константы a_i определяются из разложения $H_{\theta} = [X_{\theta}, X_{-\theta}]$:

$$H_{\theta} = \sum_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{s}} a_i H_{\alpha_i}.$$

Из явной формы уравнений (18) легко видеть, что коэффициенты $c_{-\alpha_i}^{(-1)}$, $c_{\alpha_i}^{(1)}$, $c_\theta^{(-1)}$ и $c_{-\theta}^{(1)}$, если они не равны нулю, могут быть удалены перемасштабированием.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Используемый в настоящей работе R -оператор не является кососимметричным. Существует альтернативный подход к конечнокомпонентной двумерной системе Тоды, основанный на кососимметричном R -операторе [1], [19].

4.4. Бесконечнокомпонентная система Тоды. Пусть теперь $\mathfrak{g} = gl((\infty))$. Напомним, что это алгебра бесконечных матриц $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, где $M_{ij} = 0$ при $|i - j| \gg 1$. Она может быть рассмотрена как предел при $n \rightarrow \infty$ алгебры $\mathfrak{g} = gl(n)$, с которой мы имели дело в одном из приведенных выше примеров, однако $gl((\infty))$ нуждается в более аккуратных формулировках.

Базис в алгебре $gl((\infty))$ состоит из элементов X_{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}$, со стандартными коммутационными соотношениями $[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}$. В терминах этого базиса определяются следующие градуированные подпространства в естественной $\mathbb{Z}$ -градуировке: $\mathfrak{g}_k = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{X_{ij} \mid j - i = k\}$. На алгебре $gl((\infty))$ существует симметричная билинейная инвариантная форма $(\cdot, \cdot)$ такая, что $(X_{ij}, X_{kl}) = \delta_{kj}\delta_{il}$. Используя эту форму, можно отождествить $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$ так, что $\mathfrak{g}_k^* = \mathfrak{g}_{-k}$.

Рассмотрим классический дубль алгебры $gl((\infty))$. Применим конструкцию п. 4.2.1 к соответствующим факторпространствам по отношению к идеалам вида J_{+k} и J_{-l} , где k, l – фиксированные положительные целые числа. Элементы пространства, дуального к соответствующим фактор-алгебрам, имеют вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^+ + L_1^{-'} \\ L_2^- + L_2^{+'} \end{pmatrix} \in [\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/(J_{+k} \oplus J_{-l})]^*,$$

где

$$\begin{aligned} L_1^+ &= \sum_{i=0}^{\infty} L_1^{(i)}, & L_2^- &= \sum_{i=1}^{\infty} L_2^{(-i)}, \\ L_1^{-'} &= \sum_{i=1}^l L_1^{(-i)}, & L_2^{+'} &= \sum_{i=0}^k L_1^{(i)}, & L_s^{(i)} &\in gl((\infty))_{-i}, \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

В частности, матрица Лакса $\mathcal{L}$ бесконечнокомпонентной системы Тоды соответствует $k = l = 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать только этот случай.

Обозначим естественный базис в пространстве, дуальном к алгебре $gl((\infty))$, теми же символами X_{ij} . В этом базисе оператор Лакса может быть задан через координатные функции $l_1^{(m)}(i)$, $l_2^{(m)}(j)$ следующим образом:

$$L_s^{(m)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} l_s^{(m)}(i - m) X_{i, i-m}, \quad s = 1, 2.$$

Как и раньше, координаты $l_1^{(-1)}(i)$ являются функциями Казимира скобки Ли–Пуассона на пространстве, дуальном к фактор-алгебре $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}/(J_{+1} \oplus J_{-1})$, поэтому их можно положить равными константам: $l_1^{(-1)}(i) = c_i$. Таким образом, $L_1^{(-1)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i X_{i-1, i}$. Используя инвариантную форму $(\cdot, \cdot)$ на $gl((\infty))$, мы получаем два квадратичных

гамильтониана $I_{2,1}^0, I_{2,2}^0$ на дубле алгебры $gl((\infty))$. Эти гамильтонианы имеют на рассматриваемом факторпространстве следующий вид:

$$I_{2,s}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (l_s^{(0)}(i))^2 + \sum_{i \in \mathbb{Z}} l_s^{(1)}(i) l_s^{(-1)}(i), \quad s = 1, 2.$$

Потоки, порождаемые данными гамильтонианами, записываются в форме Лакса:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_s} = [\widetilde{M}_{2,s}^0, \mathcal{L}], \quad s = 1, 2,$$

где M -операторы принимают значение в дубле алгебры $gl((\infty))$ и имеют следующий вид:

$$\widetilde{M}_{2,1}^0 = \mathcal{R}_+ \widetilde{\nabla} I_{2,1}^0 = \begin{pmatrix} L_1^{(0)} + L_1^{(-1)} \\ L_1^{(0)} + L_1^{(-1)} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_{2,2}^0 = \mathcal{R}_+ \widetilde{\nabla} I_{2,2}^0 = \begin{pmatrix} L_2^{(1)} \\ L_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то что $\mathfrak{g}$ не является алгеброй петель, а функции $I_{2,s}^0$ не являются конечными полиномами, можно доказать аналогично теореме 4.1, что соответствующие M -операторы удовлетворяют уравнениям нулевой кривизны. Таким образом, можно записать следующую $gl((\infty))$ -значную U - V -пару, удовлетворяющую уравнению нулевой кривизны:

$$U = L_1^{(0)} + L_1^{(-1)}, \quad V = L_2^{(1)}, \quad L_s^{(i)} \in gl((\infty))_{-i}, \quad s = 1, 2.$$

Соответствующее уравнение нулевой кривизны дает уравнения

$$\partial_x v_i = v_i(u_{i+1} - u_i), \quad \partial_t u_i = c_{i-1}v_{i-1} - c_i v_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (19)$$

где $u_i \equiv l_1^{(0)}(i)$, $v_i \equiv l_2^{(1)}(i)$ и $x = t_1$, $t = t_2$. Замена переменных $u_i = \partial_x \phi_i$, $v_i = e^{\phi_{i+1} - \phi_i}$ сводит уравнения (19) к обычной бесконечнокомпонентной системе Тоды [11]

$$\partial_{xt}^2 \phi_i = c_{i-1} e^{\phi_i - \phi_{i-1}} - c_i e^{\phi_{i+1} - \phi_i}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Как и выше, константы c_i , если они не равны нулю, могут быть удалены перемасштабированием.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Уравнение (20) не совпадает по форме с уравнениями (18), отвечающими алгебре Ли $gl(n)$, потому что в этом пункте мы использовали другой базис в подалгебре Картана: базис $H_i \equiv X_{ii}$ вместо базиса $H_{\alpha_i} = X_{ii} - X_{i-1-i}$.

4.5. Скобки Ли–Пуассона для бесконечнокомпонентной системы Тоды. В этом пункте мы явно опишем R -операторную скобку Ли–Пуассона, которая соответствует естественному разложению АКС, использованному в предыдущем пункте. Мы начнем со скобок Ли и затем учтем тот факт, что скобки Ли–Пуассона координатных функций повторяют скобки Ли базисных элементов алгебры.

Введем для удобства следующий базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = gl((\infty))$:

$$X^{(i)}(m) \equiv X_{m,i+m}, \quad i, m \in \mathbb{Z}.$$

Коммутационные соотношения в этом базисе приобретают вид

$$[X^{(i)}(m), X^{(j)}(n)] = \delta_{i+n-m,0} X^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0} X^{(i+j)}(n),$$

а R -оператор в этом случае записывается как $R = P_+ - P_-$, где P_+ и P_- – операторы, проецирующие на подалгебры Ли, которые натянуты соответственно на элементы $X^{(i)}(m)$ с $i \geq 0$ и $X^{(j)}(n)$ с $j < 0$. При этом R -скобка на $gl((\infty))$ записывается следующим образом:

$$[X^{(i)}(m), X^{(j)}(n)]_R = 2(1 - \sigma(i) - \sigma(j))(\delta_{i+n-m,0}X^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}X^{(i+j)}(n)),$$

где $\sigma(i) = 1$, если $i < 0$, и $\sigma(i) = 0$, если $i \geq 0$.

Для дубля алгебры $gl((\infty))$, т. е. для прямой суммы алгебр $gl((\infty)) \oplus gl((\infty))$, мы получаем следующую R -скобку, записанную для базисных элементов $X_s^{(i)}(m)$, $s = 1, 2$:

$$\begin{aligned} [X_1^{(i)}(m), X_1^{(j)}(n)]_R &= 2(1 - \sigma(i) - \sigma(j))(\delta_{i+n-m,0}X_1^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}X_1^{(i+j)}(n)), \\ [X_2^{(i)}(m), X_2^{(j)}(n)]_R &= 2(\sigma(i) + \sigma(j) - 1)(\delta_{i+n-m,0}X_2^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}X_2^{(i+j)}(n)), \\ [X_1^{(i)}(m), X_2^{(j)}(n)]_R &= 2(\sigma(i) - 1)(\delta_{i+n-m,0}X_1^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}X_1^{(i+j)}(n)) + \\ &\quad + 2\sigma(j)(\delta_{i+n-m,0}X_2^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}X_2^{(i+j)}(n)). \end{aligned}$$

Скобки Ли–Пуассона для координатных функций $l_s^{(i)}(m)$ следуют из данных коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} \{l_1^{(i)}(m), l_1^{(j)}(n)\}_R &= 2(1 - \sigma(i) - \sigma(j))(\delta_{i+n-m,0}l_1^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}l_1^{(i+j)}(n)), \\ \{l_2^{(i)}(m), l_2^{(j)}(n)\}_R &= 2(\sigma(i) + \sigma(j) - 1)(\delta_{i+n-m,0}l_2^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}l_2^{(i+j)}(n)), \\ \{l_1^{(i)}(m), l_2^{(j)}(n)\}_R &= 2(\sigma(i) - 1)(\delta_{i+n-m,0}l_1^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}l_1^{(i+j)}(n)) + \\ &\quad + 2\sigma(j)(\delta_{i+n-m,0}l_2^{(i+j)}(m) - \delta_{m-n+j,0}l_2^{(i+j)}(n)). \end{aligned}$$

Скобки Ли–Пуассона системы Тоды получаются с помощью следующей специализации: $l_1^{(-1)}(i) = c_i$, $l_1^{(k)}(i) = 0$ для $k < -1$ и $l_2^{(j)}(i) = 0$ для $j > 1$. Эти скобки совпадают с первой пуассоновой структурой иерархии двумерного поля Тоды [16].

5. КВАДРАТИЧНЫЕ И КУБИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ДУБЛЕ

В этом разделе мы обсудим продолжение пуассоновых структур второго и третьего порядков с алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на ее классический дубль $\mathcal{G}$ и согласованность соответствующих скобок.

5.1. Квадратичные пуассоновы структуры. Известно, что для некоторых классических R -операторов на $\mathfrak{g}$ можно определить, помимо линейной R -скобки, также скобку Пуассона второго порядка, которая играет важную роль в теории классических интегрируемых систем.

Далее мы предположим, что можно отождествить пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ и, более того, алгебра $\mathfrak{g}$ обладает также структурой ассоциативной алгебры. Имеет место следующая теорема [20], [21].

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть классический R -оператор и его кососимметричная часть $(R - R^*)/2$ удовлетворяют модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда:

1) формула

$$\{F_1, F_2\}_2 = \langle L, [R(L\nabla F_1 + \nabla F_1 L), \nabla F_2] \rangle - \langle L, [R(L\nabla F_2 + \nabla F_2 L), \nabla F_1] \rangle \quad (21)$$

определяет скобку Пуассона на пространстве $\mathfrak{g}$;

2) функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ коммутируют относительно скобок (21);

3) гамильтоновы уравнения движения по отношению к функции Казимира I_k на $\mathfrak{g}$ и скобке (21) записываются в форме Лакса:

$$\frac{dL}{dt_k} = [R(L\nabla I_k + \nabla I_k L), L];$$

4) скобки Пуассона (21) и (2) являются согласованными²⁾.

Оказывается, что данная теорема может быть продолжена на дубль алгебры $\mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть классический R -оператор и его кососимметричная часть $(R - R^*)/2$ удовлетворяют модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда:

1) формула

$$\{F_1(\mathcal{L}), F_2(\mathcal{L})\}_2 = \langle \mathcal{L}, [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} F_1 + \tilde{\nabla} F_1 \mathcal{L}), \nabla F_2] \rangle - \langle \mathcal{L}, [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} F_2 + \tilde{\nabla} F_2 \mathcal{L}), \nabla F_1] \rangle \quad (22)$$

задает скобку Пуассона на алгебре $\mathcal{G}$;

2) функции Казимира алгебры $\mathcal{G}$ коммутируют относительно скобки Пуассона (22);

3) гамильтоновы уравнения движения по отношению к функции Казимира $I_{k,\epsilon}$ на $\mathcal{G}$ и скобке (22) записываются в форме Лакса:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt_k^\epsilon} = [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} I_{k,\epsilon} + \tilde{\nabla} I_{k,\epsilon} \mathcal{L}), \mathcal{L}], \quad \epsilon = 1, 2;$$

4) скобки Пуассона (22) и (3) являются согласованными.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Скобки Ли–Пуассона (22) могут быть записаны в терминах операторов R , $R_\pm$ в более явном виде:

$$\begin{aligned} \{F_1(L_1, L_2), F_2(L_1, L_2)\}_2 = & \\ & \langle L_1, [R(L_1\nabla_1 F_1 + \nabla_1 F_1 L_1) - R_-(L_2\nabla_2 F_1 + \nabla_2 F_1 L_2), \nabla_1 F_2] \rangle + \\ & \langle L_2, [R_+(L_1\nabla_1 F_1 + \nabla_1 F_1 L_1) - R(L_2\nabla_2 F_1 + \nabla_2 F_1 L_2), \nabla_2 F_2] \rangle - \\ & - \langle L_1, [R(L_1\nabla_1 F_2 + \nabla_1 F_2 L_1) - R_-(L_2\nabla_2 F_2 + \nabla_2 F_2 L_2), \nabla_1 F_1] \rangle - \\ & - \langle L_2, [R_+(L_1\nabla_1 F_2 + \nabla_1 F_2 L_1) - R(L_2\nabla_2 F_2 + \nabla_2 F_2 L_2), \nabla_2 F_1] \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Сначала отметим, что если $\mathfrak{g}$ является ассоциативной алгеброй, то $\mathcal{G}$ тоже является ассоциативной алгеброй и имеет естественную структуру прямой суммы ассоциативных алгебр. Чтобы доказать теорему, достаточно применить теорему 5.1 и доказать, что из условий теоремы 5.1 для

²⁾Напомним, что две скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве, называются согласованными, если произвольная их линейная комбинация $a_1\{\cdot, \cdot\}_1 + a_2\{\cdot, \cdot\}_2$ является скобкой Пуассона.

R -оператора на $\mathfrak{g}$ следует, что классический R -оператор $\mathcal{R}$ и его кососимметричная часть $(\mathcal{R} - \mathcal{R}^*)/2$ удовлетворяют модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на дубле $\mathcal{G}$. Данное утверждение для оператора $\mathcal{R}$ следует автоматически из результатов работы [12]. Остается показать, что $(\mathcal{R} - \mathcal{R}^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на $\mathcal{G}$. Мы покажем это непосредственно. Имеем

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & -S \\ S & -A \end{pmatrix}, \quad A = R - R^*, \quad S = R + R^*.$$

Подставляя это выражение в модифицированное классическое уравнение Янга–Бакстера, мы получаем, что оно эквивалентно следующим трем условиям:

$$\begin{aligned} A([A(X), Y] + [X, A(Y)]) - [A(X), A(Y)] &= 4[X, Y], \\ -S([S(X), Y]) - A([X, S(Y)]) + [A(X), S(Y)] &= 0, \\ S([A(X), Y] + [X, A(Y)]) - [S(X), S(Y)] &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

которые должны быть выполнены для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Первое из этих уравнений следует из условий теоремы. Используя определение операторов A и S , легко показать, что (23) эквивалентны следующим трем уравнениям: для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [R(X), R(Y)] = [X, Y], \quad (24a)$$

$$R^*([R^*(X), Y]) - R^*([X, R(Y)]) + [R^*(X), R(Y)] = [X, Y], \quad (24б)$$

$$R([R^*(X), Y] + [X, R^*(Y)]) - [R^*(X), R^*(Y)] = -[X, Y]. \quad (24в)$$

Уравнение (24a) – это модифицированное классическое уравнение Янга–Бакстера для оператора R . Уравнение (24б) выводится путем использования модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера и условия существования невырожденной инвариантной формы на $\mathfrak{g}$. Наконец, уравнение (24в) следует из модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера для оператора A . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Теорема 5.2 означает, что квадратичная пуассонова структура, если она существует на алгебре $\mathfrak{g}$, всегда может быть продолжена на ее дубль $\mathcal{G}$. В частности, такое расширение существует для кососимметричных R -операторов на $\mathfrak{g}$, поскольку соответствующий $\mathcal{R}$ -оператор на $\mathcal{G}$ тоже является кососимметричным.

5.2. Пуассонова структура третьего порядка. В этом пункте мы опишем кубическую пуассонову структуру на $\mathfrak{g}$ и ее продолжение на дубль $\mathcal{G}$. Мы будем использовать следующую теорему из работ [20], [21], которая справедлива при тех же предположениях об алгебре Ли $\mathfrak{g}$, что и в предыдущем пункте.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть R – классический R -оператор на алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда:

1) формула

$$\begin{aligned} \{F_1(L), F_2(L)\}_3 &= \langle L, [R(L \nabla F_1 L + L \nabla F_1 L), \nabla F_2] \rangle - \\ &\quad - \langle L, [R(L \nabla F_2 L + L \nabla F_2 L), \nabla F_1] \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

определяет скобку Пуассона на пространстве $\mathfrak{g}$;

- 2) функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ коммутируют относительно скобок (25);
 3) гамильтоновы уравнения движения по отношению к функции Казимира I_k на $\mathfrak{g}$ и скобке (25) записываются в форме Лакса:

$$\frac{dL}{dt_k} = [R(L\nabla I_k L), L];$$

- 4) если оператор $(R - R^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathfrak{g}$, то скобки Пуассона (25), (21) и (2) являются согласованными.

Аналогичное утверждение имеет место и для классического дубля алгебры $\mathfrak{g}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть R – классический R -оператор. Тогда:

- 1) формула

$$\begin{aligned} \{F_1(\mathcal{L}), F_2(\mathcal{L})\}_3 = & \langle \mathcal{L}, [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} F_1 \mathcal{L} + \mathcal{L}\tilde{\nabla} F_1 \mathcal{L}), \tilde{\nabla} F_2] \rangle - \\ & - \langle \mathcal{L}, [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} F_2 \mathcal{L} + \mathcal{L}\tilde{\nabla} F_2 \mathcal{L}), \tilde{\nabla} F_1] \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

определяет скобку Пуассона на пространстве $\mathcal{G}$;

- 2) функции Казимира алгебры $\mathcal{G}$ коммутируют относительно скобок (26);
 3) гамильтоновы уравнения движения по отношению к функции Казимира $I_{k,\epsilon}$ на $\mathcal{G}$ и скобке (22) записываются в форме Лакса:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt_k^\epsilon} = [\mathcal{R}(\mathcal{L}\tilde{\nabla} I_{k,\epsilon} \mathcal{L}), \mathcal{L}];$$

- 4) если оператор $(R - R^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathfrak{g}$, то скобки Пуассона (26), (22) и (4) являются согласованными.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Скобка Ли–Пуассона (26) в терминах операторов R , $R_\pm$ может быть записана в более явном виде:

$$\begin{aligned} \{F_1(L_1, L_2), F_2(L_1, L_2)\}_3 = & \\ = & \langle L_1, [R(L_1 \nabla_1 F_1 L_1) - R_-(L_2 \nabla_2 F_1 L_2), \nabla_1 F_2] \rangle + \\ & + \langle L_2, [R_+(L_1 \nabla_1 F_1 L_1) - R(L_2 \nabla_2 F_1 L_2), \nabla_2 F_2] \rangle - \\ & - \langle L_1, [R(L_1 \nabla_1 F_2 L_1) - R_-(L_2 \nabla_2 F_2 L_2), \nabla_1 F_1] \rangle - \\ & - \langle L_2, [R_+(L_1 \nabla_1 F_2 L_1) - R(L_2 \nabla_2 F_2 L_2), \nabla_2 F_1] \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Заметим, что, используя отождествление $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ как линейных пространств и как $\mathfrak{g}$ -модулей, можно также отождествить пространства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ как линейные пространства и $\mathcal{G}$ -модули. Как было объяснено выше, дубль $\mathcal{G}$ ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}$ всегда имеет структуру ассоциативной алгебры. Чтобы доказать следствие, осталось только применить теорему 5.3 к классическому дублю и принять во внимание, что, как было доказано в теореме 5.2, антисимметричная часть оператора $(\mathcal{R} - \mathcal{R}^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathcal{G}$, если оператор $(R - R^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на алгебре $\mathfrak{g}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пуассоновы структуры второго и третьего порядков существуют и являются согласованными с линейной пуассоновой структурой (когда операторы R и $(R - R^*)/2$ удовлетворяют модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера). Они порождают коммутирующие гамильтоновы потоки, которые записываются в форме Лакса. Однако их использование в теории солитонов не является столь прямым и универсальным, как использование линейных скобок Пуассона. Действительно, для получения фазового пространства солитонных уравнений необходимо, как было объяснено выше, ограничивать динамику на некоторые линейные подпространства, совпадающие с факторпространствами соответствующей R -скобки. С другой стороны, эти линейные подпространства не являются, вообще говоря, факторпространствами по идеалам квадратичной и кубичной скобок. Чтобы ограничить эти скобки на соответствующие подпространства, необходимо применять дополнительно редукцию по Дираку. Для случая бесконечнокомпонентной системы Тоды, эта процедура была рассмотрена в работе [16].

В конце данного раздела объясним, почему существуют и являются согласованными с линейной структурой пуассоновы структуры второго и третьего порядков для случая бесконечнокомпонентной системы Тоды перед ограничением на факторпространства линейной скобки. Поскольку бесконечнокомпонентная система Тоды связана с дублем алгебры $gl((\infty))$, нам нужно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *На дубле алгебры $gl((\infty))$, оснащенном R -оператором АКС $R = P^+ - P^-$, где P^+ и P^- – операторы, проецирующие на подалгебры верхнетреугольных и строго нижнетреугольных матриц, существуют квадратичная и кубичная пуассоновы структуры, согласованные с линейной скобкой Пуассона и выражаемые формулами (22) и (26) соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что дубль алгебры $gl((\infty))$ является, очевидно, ассоциативной алгеброй. Следовательно, чтобы применить теорему 5.2 и следствие 5.1 в рассматриваемом случае, достаточно доказать, что $(R - R^*)/2$ удовлетворяет модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера на $gl((\infty))$. В нашем случае $R = P^+ - P^-$, где P^+ и P^- – операторы, проецирующие на подалгебры верхнетреугольных и строго нижнетреугольных матриц соответственно. Заметим также, что этот R -оператор может быть записан в виде $R = P_+ + P_0 - P_-$, где P_+ – оператор, проецирующий на подалгебру Ли строго верхнетреугольных матриц, P_0 – оператор, проецирующий на подалгебру Ли диагональных матриц, и $P_- \equiv P^-$. Используя явную форму инвариантного спаривания, т. е. билинейную форму на алгебре $gl((\infty))$, легко показать, что $P_\pm^* = P_\mp$, $P_0^* = P_0$ и, следовательно, $(R - R^*)/2 = P_+ - P_-$. Из результатов работы [22] (см. также [9]) вытекает следующее утверждение. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-$ – треугольное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{g}_\pm$, $\mathfrak{g}_0$ – подалгебры Ли и $\mathfrak{g}_0$ -модули, то любой оператор вида $P_+ + R_0 - P_-$, где $P_\pm$ – операторы, проецирующие на подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$, является решением модифицированного уравнения Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}$ при условии, что R_0 – решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}_0$. Более того, если подалгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева, то любой оператор R_0 включая тривиальный является решением модифицированного уравнения Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}_0$. Поэтому оператор $P_+ - P_-$ является решением модифицированного уравнения Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, очевидно, что разложение алгебры $\mathfrak{g} = gl((\infty))$ в сумму строго верхнетреугольной, строго нижнетреугольной и диагональной частей, представляет собой треугольное разложение с абелевой (диагональной) частью $\mathfrak{g}_0$. Следовательно, рассмотренный R -оператор $(R - R^*)/2 = P_+ - P_-$ действительно является решением модифицированного уравнения Янга–Бакстера на алгебре $gl((\infty))$ и, в силу теоремы 5.2 и следствия 5.1, существуют квадратичные и кубические пуассоновы структуры на алгебре $gl((\infty))$ и ее дубле. Утверждение доказано.

Благодарности. Т.В. Скрышник выражает признательность Гвидо Карлету за обсуждение. Работа Б.А. Дубровина поддержана European Research Council (грант FroM-PDE) и Правительством РФ (мегагрант № 2010-220-01-077).

Список литературы

- [1] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [2] H. Flaschka, A. Newell, T. Ratiu, *Physica D*, **9**:3 (1983), 300–323; 324–332.
- [3] А. Ньюэл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, М., 1989.
- [4] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *J. Phys. A*, **39**:5 (2006), 109.
- [5] Z. Qiao, W. Strampp, *Physica A*, **313**:3–4 (2002), 365–380.
- [6] C.-L. Terng, K. Uhlenbeck, “Poisson actions and scattering theory for integrable systems”, *Surveys in Differential Geometry: Integral Systems*, **IV**, eds. C.-L. Terng, K. Uhlenbeck, Internat. Press, Boston, MA, 1998, 315–402, arXiv: dg-ga/9707004.
- [7] Т. В. Скрышник, *ТМФ*, **142**:2 (2005), 329–345.
- [8] Т. В. Скрышник, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 147–160.
- [9] Т. V. Skrypnyk, *SIGMA*, **4** (2008), 011, 19 pp.
- [10] М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:4 (1983), 17–33.
- [11] K. Ueno, K. Takasaki, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **59**:5 (1983), 167–170; **59**:6 (1983), 215–218.
- [12] А. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы: теоретико-групповой подход*, РХД, М., Ижевск, 2003.
- [13] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [14] A. V. Mikhailov, M. Olshanetsky, A. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **79**:4 (1981), 473–488.
- [15] Kh. Nirov, A. Razumov, *Nucl. Phys. B*, **782**:3 (2007), 241–275.
- [16] G. Carlet, *Lett. Math. Phys.*, **71**:3 (2005), 209–226.
- [17] А. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, “Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем”, *Динамические системы – 7*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **16**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1989, 119–193.
- [18] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [19] P. P. Kulish, *Lett. Math. Phys.*, **5**:3 (1981), 191–197.
- [20] W. Oevel, O. Ragnisco, *Physica A*, **161**:1 (1989), 181–220.
- [21] L.-C. Li, S. Parmentier, *Commun. Math. Phys.*, **125** (1989), 545–563.
- [22] F. Guil, M. Mañas, *Lett. Math. Phys.*, **19** (1990), 89–95.

Поступила в редакцию 28.04.2011,
после доработки 13.11.2011