Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Такасаки, Т. Такебе, Зависящая от $\hbar$ формулировка иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 303–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:08:08

© 2012 г.

К. Такасаки*, Т. Такебе†

ЗАВИСЯЩАЯ ОТ $\hbar$ ФОРМУЛИРОВКА ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Приведен краткий обзор рекуррентного построения зависящих от $\hbar$ решений иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Представлены рекуррентные соотношения для коэффициентов X_n $\hbar$ -разложения оператора $X = X_0 + \hbar X_1 + \hbar^2 X_2 + \dots$, когда одевающий оператор W выражается в экспоненциальном виде $W = e^{X/\hbar}$. Оказалось, что ассоциированная с оператором W волновая функция Ψ имеет форму Вентцеля–Крамера–Бриллюэна $\Psi = e^{S/\hbar}$, а коэффициенты S_n в $\hbar$ -разложении $S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots$ также определяются набором рекуррентных соотношений. Полученный вид волновой функции позволяет показать, что ассоциированная тау-функция имеет $\hbar$ -разложение вида $\ln \tau = \hbar^{-2} F_0 + \hbar^{-1} F_1 + F_2 + \dots$.

Ключевые слова: зависящая от $\hbar$ иерархия Кадомцева–Петвиашвили, $\hbar$ -разложение, проблема Римана–Гильберта, квантование, рекуррентное соотношение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Зависящая от $\hbar$ формулировка иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) была введена для исследования бездисперсионной иерархии КП [1]–[3] как классического предела иерархии КП (т. е. низшего порядка ее $\hbar$ -разложения). Такая точка зрения оказывается весьма полезной для понимания различных характерных особенностей бездисперсионной иерархии КП. В настоящей работе мы обратимся к самой зависящей от $\hbar$ иерархии КП и рассмотрим все порядки $\hbar$ -разложения.

Сначала обсудим вопрос о решении проблемы Римана–Гильберта для пары (L, M) операторов Лакса и Орлова–Шульмана [4], что представляет собой нечто вроде “квантования” проблемы Римана–Гильберта, используемой для решения бездисперсионной иерархии КП [3]. В настоящей работе мы решаем этот вопрос с помощью $\hbar$ -разложения одевающего оператора W , причем предполагается, что он имеет экспоненциальный вид $W = e^{X/\hbar}$, где X – оператор отрицательного порядка. Грубо говоря, показано, что коэффициенты X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\hbar$ -разложения оператора X

*Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University, Yoshida, Sakyo, Kyoto, Japan

†Факультет математики, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: ttakebe@hse.ru

определяются рекуррентно из члена X_0 низшего порядка (другими словами, из решения бездисперсионной иерархии КП).

Затем мы формулируем этот результат на языке волновой функции Ψ . А именно, задавая одевающий оператор в экспоненциальном виде $W = e^{X/\hbar}$, мы показываем, что ассоциированная волновая функция имеет вид Вентцеля–Крамера–Бриллюэна (ВКБ) $\Psi = e^{S/\hbar}$, где фазовая функция S разлагается по неотрицательным степеням $\hbar$.

Используя идею “экспоненциального исчисления” микродифференциальных операторов из работы [5], мы показываем, что одевающие операторы вида $W = e^{X/\hbar}$ и волновые функции вида $\Psi = e^{S/\hbar}$ определяют друг друга посредством набора рекуррентных соотношений для коэффициентов их $\hbar$ -разложения. Следовательно, волновая функция решения упомянутой выше проблемы Римана–Гильберта также рекуррентно определяется $\hbar$ -разложением.

Как следует из нашей предыдущей работы [6], имея $\hbar$ -разложение волновой функции, можно без труда вывести $\hbar$ -разложение тау-функции.

Подробности можно найти в работе [7], им будет посвящена отдельная публикация.

2. ЗАВИСЯЩАЯ ОТ $\hbar$ ИЕРАРХИЯ КП: ОБЗОР

В настоящем разделе мы напомним несколько фактов, касающихся иерархии КП, зависящей от формального параметра $\hbar$ (см. §1.7 в [6]).

Зависящая от параметра $\hbar$ иерархия КП задается представлением Лакса

$$\hbar \frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \quad B_n = (L^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где оператор Лакса L представляет собой микродифференциальный оператор вида

$$L = \hbar \partial + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(\hbar, x, t) (\hbar \partial)^{-n}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2)$$

а $(\cdot)_{\geq 0}$ обозначает проекцию на дифференциальный оператор, состоящую в отбрасывании отрицательных степеней оператора ∂ . Коэффициенты $u_n(\hbar, x, t)$ оператора Лакса L являются формально регулярными по $\hbar$.

Введем понятие $\hbar$ -порядка, определяемого как

$$\text{ord}^{\hbar} \left(\sum a_{n,m}(x, t) \hbar^n \partial^m \right) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ m - n \mid a_{n,m}(x, t) \neq 0 \}.$$

В частности, $\text{ord}^{\hbar} \hbar = -1$, $\text{ord}^{\hbar} \partial = 1$, $\text{ord}^{\hbar} \hbar \partial = 0$. Условие регулярности, которое мы налагаем на коэффициенты $u_n(\hbar, x, t)$, можно выразить в виде $\text{ord}^{\hbar}(L) = 0$. Главный символ микродифференциального оператора $A = \sum a_{n,m}(x, t) \hbar^n \partial^m$ по $\hbar$ -порядку записывается как

$$\sigma^{\hbar}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m-n=\text{ord}(A)} a_{n,m}(x, t) \xi^m.$$

Как и в обычной теории КП, оператор Лакса L выражается с помощью *одевающего оператора* W :

$$L = \text{Ad } W(\hbar\partial) = W(\hbar\partial)W^{-1}. \quad (3)$$

Одевающий оператор W должен иметь специальный вид

$$W = e^{\hbar^{-1}X(\hbar, x, t, \hbar\partial)}(\hbar\partial)^{\alpha(\hbar)/\hbar}, \quad (4)$$

где

$$X(\hbar, x, t, \hbar\partial) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(\hbar, x, t)(\hbar\partial)^{-k}$$

– оператор нулевого порядка, $\text{ord}^{\hbar}(X) = 0$, а $\alpha(\hbar)$ – константа относительно x и t с нулевым порядком по $\hbar$: $\text{ord}^{\hbar}\alpha(\hbar) = 0$.

Волновая функция $\Psi(\hbar, x, t; z)$ определяется как

$$\Psi(\hbar, x, t; z) = W e^{(xz + \zeta(t, z))/\hbar}, \quad (5)$$

где $\zeta(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n$. Она является решением линейных уравнений

$$L\Psi = z\Psi, \quad \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = B_n \Psi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и имеет вид ВКБ, как будет показано в разделе 4. Более того, она выражается с помощью *тау-функции* $\tau(\hbar, t)$ как

$$\Psi(\hbar, x, t; z) = \frac{\tau(t + x - \hbar[z^{-1}])}{\tau(t)} e^{\zeta(t, z)/\hbar}, \quad (6)$$

где $t + x = (t_1 + x, t_2, t_3, \dots)$ и $[z^{-1}] = (1/z, 1/2z^2, 1/3z^3, \dots)$. Мы рассмотрим $\hbar$ -разложение тау-функции в разделе 5.

Оператор Орлова–Шульмана M определяется как

$$M = \text{Ad}(W e^{\zeta(t, \hbar\partial)/\hbar})x = W \left(\sum_{n=1}^{\infty} n t_n (\hbar\partial)^{n-1} + x \right) W^{-1}, \quad (7)$$

где $\zeta(t, \hbar\partial) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n (\hbar\partial)^n$. Нетрудно видеть, что оператор M имеет вид

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n L^{n-1} + x + \alpha(\hbar)L^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\hbar, x, t)L^{-n-1} \quad (8)$$

и удовлетворяет условию $\text{ord}^{\hbar}(M) = 0$, каноническому коммутационному соотношению $[L, M] = \hbar$ и тем же уравнениям Лакса, что и L :

$$\hbar \frac{\partial M}{\partial t_n} = [B_n, M], \quad n = 1, 2, \dots$$

Утверждение А в следующем предложении (предложении 1.7.11 из работы [6]) представляет собой построение типа построения Римана–Гильберта для решений зависящей от $\hbar$ иерархии КП.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. А. Пусть $f(\hbar, x, \hbar\partial)$ и $g(\hbar, x, \hbar\partial)$ – операторы нулевого порядка ($\text{ord}^\hbar f = \text{ord}^\hbar g = 0$) с каноническим коммутационным соотношением $[f, g] = \hbar$, а операторы L и M имеют вид (2) и (8) и также коммутируют канонически, $[L, M] = \hbar$. Предположим, что $f(\hbar, M, L)$ и $g(\hbar, M, L)$ – дифференциальные операторы: $(f(\hbar, M, L))_{<0} = (g(\hbar, M, L))_{<0} = 0$, где $(\cdot)_{<0}$ – проекция на часть с отрицательными степенями: $P_{<0} := P - P_{\geq 0}$. Тогда оператор L представляет собой решение иерархии КП (1), а M – соответствующий оператор Орлова–Шульмана.

Б. Обратно, для любого решения (L, M) существует пара (f, g) , удовлетворяющая условиям п. А.

Главный член этой системы в $\hbar$ -порядке дает бездисперсионную иерархию КП. А именно, оператор

$$\mathcal{L} := \sigma^\hbar(L) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} u_{0,n+1} \xi^{-n}, \quad u_{0,n+1} := \sigma^\hbar(u_{n+1}), \quad (9)$$

удовлетворяет бездисперсионным уравнениям типа уравнений Лакса

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $(\cdot)_{\geq 0}$ – обрезание ряда Лорана до его полиномиальной части, а $\{\cdot, \cdot\}$ – скобки Пуассона, определяемые как

$$\{a(x, \xi), b(x, \xi)\} = \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial \xi}.$$

Операция одевания (3) для оператора L становится следующей операцией одевания для $\mathcal{L}$: $\mathcal{L} = e^{\text{ad}_{\{\cdot\}} X_0} \xi$, где $X_0 = \sigma^\hbar(X)$ и $\text{ad}_{\{\cdot\}}(f)(g) := \{f, g\}$.

Главный символ оператора Орлова–Шульмана имеет вид

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \mathcal{L}^{n-1} + x + \alpha_0 \mathcal{L}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{0,n} \mathcal{L}^{-n-1}, \quad (11)$$

$$v_{0,n} = \sigma^\hbar(v_n), \quad \alpha_0 = \sigma^\hbar(\alpha),$$

что равно

$$\mathcal{M} = e^{\text{ad}_{\{\cdot\}} X_0} e^{\text{ad}_{\{\cdot\}} \alpha_0 \ln \xi} e^{\text{ad}_{\{\cdot\}} \zeta(t, \xi)} x, \quad \zeta(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \xi^n.$$

Ряд $\mathcal{M}$ удовлетворяет каноническому коммутационному соотношению $\{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = 1$ и уравнениям типа уравнений Лакса:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Построение решения типа Римана–Гильберта по существу такое же, как и в случае предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. А. Пусть $f_0(x, \xi)$ и $g_0(x, \xi)$ – канонически коммутирующие функции, $\{f_0, g_0\} = 1$, а функции $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ имеют вид (9) и (11). Предположим, что функции $f_0(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ и $g_0(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ не содержат отрицательных степеней ξ , $(f_0(\mathcal{M}, \mathcal{L}))_{<0} = (g_0(\mathcal{M}, \mathcal{L}))_{<0} = 0$, где $(\cdot)_{<0}$ – проекция на часть с отрицательными степенями: $P_{<0} := P - P_{\geq 0}$. Тогда $\mathcal{L}$ представляет собой решение бездисперсионной иерархии КП (10), а $\mathcal{M}$ – соответствующая функция Орлова–Шульмана.

Б. И наоборот, для любого решения $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ существует пара (f_0, g_0) , удовлетворяющая условиям п. А.

Если f , g , L и M удовлетворяют условиям предложения 1, то $f_0 = \sigma^{\hbar}(f)$, $g_0 = \sigma^{\hbar}(g)$, $\mathcal{L} = \sigma^{\hbar}(L)$ и $\mathcal{M} = \sigma^{\hbar}(M)$ удовлетворяют условиям предложения 2. Другими словами, (f, g) и (L, M) представляют собой квантование канонических преобразований (f_0, g_0) и $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ соответственно. (О квантованных канонических преобразованиях см., например, [8].)

3. РЕКУРРЕНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОДЕВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

В настоящем разделе мы докажем, что решение иерархии КП, соответствующее квантованному каноническому преобразованию (f, g) , рекуррентно строится исходя из его главного члена, т. е. решения бездисперсионной иерархии КП, соответствующей данным Римана–Гильберта $(\sigma^{\hbar}(f), \sigma^{\hbar}(g))$.

По заданной паре (f, g) мы должны построить одевающий оператор W , или X и α в (4), так чтобы оба оператора

$$\begin{aligned} f(\hbar, M, L) &= \text{Ad}(We^{\zeta(t, \hbar\partial)/\hbar})f(\hbar, x, \hbar\partial), \\ g(\hbar, M, L) &= \text{Ad}(We^{\zeta(t, \hbar\partial)/\hbar})g(\hbar, x, \hbar\partial) \end{aligned} \quad (12)$$

были дифференциальными (ср. предложение 1). Разложим X и α в $\hbar$ -порядке:

$$X(\hbar, x, t, \hbar\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n X_n(x, t, \hbar\partial), \quad X_n(x, t, \hbar\partial) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{n,k}(x, t) (\hbar\partial)^{-k}, \quad (13)$$

$\alpha(\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \alpha_n$, где $\chi_{n,k}$ и α_n не зависят от $\hbar$.

Предположим, что дано решение $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ бездисперсионной иерархии КП, соответствующей $(\sigma^{\hbar}(f), \sigma^{\hbar}(g))$. А именно, $(\sigma^{\hbar}(f)(\mathcal{M}, \mathcal{L}), \sigma^{\hbar}(g)(\mathcal{M}, \mathcal{L}))$ не содержат отрицательных степеней ξ :

$$(\sigma^{\hbar}(f)(\mathcal{M}, \mathcal{L}))_{<0} = (\sigma^{\hbar}(g)(\mathcal{M}, \mathcal{L}))_{<0} = 0. \quad (14)$$

Пусть (X_0, α_0) – соответствующие одевающие функции. Требуется построить X_n и α_n рекуррентно, начиная с X_0 и α_0 . Явная процедура такова.

ШАГ 1. Предположим, что заданы $X_0, \dots, X_{i-1}$ и $\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}$. Положим

$$X^{(i-1)} := \sum_{n=0}^{i-1} \hbar^n X_n, \quad \alpha^{(i-1)} := \sum_{n=0}^{i-1} \hbar^n \alpha_n.$$

ШАГ 2. Положим

$$\begin{aligned} P^{(i-1)} &:= \text{Ad}(e^{\hbar^{-1} X^{(i-1)}} (\hbar \partial)^{\alpha^{(i-1)}/\hbar}) f_t, \\ Q^{(i-1)} &:= \text{Ad}(e^{\hbar^{-1} X^{(i-1)}} (\hbar \partial)^{\alpha^{(i-1)}/\hbar}) g_t. \end{aligned} \quad (15)$$

Разложим $P^{(i-1)}$ и $Q^{(i-1)}$ так, чтобы

$$P^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k P_k^{(i-1)}, \quad Q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k Q_k^{(i-1)}$$

$$(\text{ord}^{\hbar} P_k^{(i-1)} = \text{ord}^{\hbar} Q_k^{(i-1)} = 0).$$

ШАГ 3. Положим $\mathcal{P}_0 := \sigma^{\hbar}(P_0^{(i-1)})$, $\mathcal{Q}_0 := \sigma^{\hbar}(Q_0^{(i-1)})$, $\mathcal{P}_i^{(i-1)} := \sigma^{\hbar}(P_i^{(i-1)})$, $\mathcal{Q}_i^{(i-1)} := \sigma^{\hbar}(Q_i^{(i-1)})$ и определим постоянную α_i и ряд

$$\tilde{\mathcal{X}}_i(x, t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\chi}_{i,k}(x, t) \xi^{-k}$$

как

$$\alpha_i \ln \xi + \tilde{\mathcal{X}}_i := \int^{\xi} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_0}{\partial \xi} \mathcal{P}_i^{(i-1)} - \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \xi} \mathcal{Q}_i^{(i-1)} \right)_{\leq -1} d\xi. \quad (16)$$

Постоянная интегрирования неопределенного интеграла фиксирована так, чтобы правая часть согласовывалась с левой.

ШАГ 4. Определим ряд

$$\mathcal{X}_i(x, t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{i,k}(x, t) \xi^{-k}$$

как

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i &= \tilde{\mathcal{X}}'_i - \frac{1}{2} \{ \sigma^{\hbar}(X_0), \tilde{\mathcal{X}}'_i \} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} (\text{ad}_{\{\cdot\}}(\sigma^{\hbar}(X_0)))^{2p} \tilde{\mathcal{X}}'_i, \\ \tilde{\mathcal{X}}'_i &:= \alpha_i \ln \xi + \tilde{\mathcal{X}}_i(x, \xi) - e^{\text{ad}_{\{\cdot\}} \sigma^{\hbar}(X_0)} (\alpha_i \ln \xi), \end{aligned} \quad (17)$$

где B_{2p} – числа Бернулли.

ШАГ 5. Оператор $X_i(x, t, \hbar \partial)$ определяется как оператор с главным символом $\mathcal{X}_i$:

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{i,k}(x, t) (\hbar \partial)^{-k}.$$

Имеет место следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что X_0 и α_0 удовлетворяют условию (14), и рекуррентно построим X_i и α_i с помощью описанной выше процедуры. Тогда $W = e^{X/\hbar} (\hbar \partial)^{\alpha/\hbar}$ представляет собой одевающий оператор зависящий от $\hbar$ иерархии КП, отвечающей паре (f, g) в соответствии с предложением 1.*

4. АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

В настоящем разделе мы докажем, что одевающий оператор вида $W(\hbar, x, t, \hbar\partial) = e^{X(\hbar, x, \hbar\partial)/\hbar}$, $\text{ord}^\hbar X \leq 0$, $\text{ord} X \leq -1$, дает волновую функцию вида

$$\Psi(\hbar, x, t; z) = W e^{(xz + \zeta(t, z))/\hbar} = e^{S(\hbar, x, t, z)/\hbar},$$

$$S(\hbar, x, t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n S_n(x, t; z) + \zeta(t, z), \quad \zeta(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n,$$

и наоборот.

Поскольку в настоящем разделе временные переменные t_n не играют никакой роли, мы положим их равными нулю. Множитель $(\hbar\partial)^{\alpha/\hbar}$ в (4) становится постоянным множителем $z^{\alpha/\hbar}$ при применении к $e^{xz/\hbar}$, поэтому мы его здесь также опускаем.

Пусть

$$A(\hbar, x, \hbar\partial) = \sum_n a_n(\hbar, x) (\hbar\partial)^n$$

– микродифференциальный оператор. Полный символ оператора A представляет собой степенной ряд по ξ , определяемый как

$$\sigma_{\text{tot}}(A)(\hbar, x, \xi) := \sum_n a_n(\hbar, x) \xi^n$$

или, что эквивалентно, задаваемый формулой

$$A e^{xz/\hbar} = \sigma_{\text{tot}}(A)(\hbar, x, z) e^{xz/\hbar}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $X = X(\hbar, x, \hbar\partial)$ – микродифференциальный оператор такой, что $\text{ord} X = -1$ и $\text{ord}^\hbar X = 0$. Тогда полный символ оператора $e^{X/\hbar}$ имеет вид $\sigma_{\text{tot}}(e^{X(\hbar, x, \hbar\partial)/\hbar}) = e^{S(\hbar, x, \xi)/\hbar}$, где $S(\hbar, x, \xi)$ – степенной ряд по ξ^{-1} без неотрицательных степеней ξ , имеющий $\hbar$ -разложение $S(\hbar, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n S_n(x, \xi)$.

Более того, коэффициенты S_n определяются исходя из $X_0, \dots, X_n$ в $\hbar$ -разложении $X = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n X_n$.

Мы опускаем явную формулу для коэффициентов S_n (см. [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $S = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n S_n$ – степенной ряд для ξ^{-1} без неотрицательных степеней ξ . Тогда существует микродифференциальный оператор $X(\hbar, x, \hbar\partial)$ такой, что $\text{ord} X \leq -1$, $\text{ord}^\hbar X \leq 0$ и $\sigma_{\text{tot}}(e^{X(\hbar, x, \hbar\partial)/\hbar}) = e^{S(\hbar, x, \xi)/\hbar}$. Более того, коэффициент $X_n(x, \xi)$ в $\hbar$ -разложении $X = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n X_n$ полного символа $X = X(\hbar, x, \xi)$ определяется исходя из $S_0, \dots, S_n$ в $\hbar$ -разложении для S .

Мы опускаем явную формулу для коэффициентов X_n (см. [7]).

Предложения 3 и 4 в совокупности с результатами раздела 3 в принципе позволяют получить рекуррентную формулу для коэффициентов S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, в волновой функции решения иерархии КП, соответствующей квантованному каноническому преобразованию (f, g) следующим образом. Пусть заданы $S_0, \dots, S_{i-1}$.

Тогда:

- 1) из предложения 4 получаем коэффициенты $X_0, \dots, X_{i-1}$;
- 2) имеем рекуррентную формулу для X_i из теоремы 1;
- 3) предложение 3 дает формулу для S_i .

Если учесть множитель $(\hbar\partial)^{\alpha/\hbar}$, процесс становится несколько более сложным, но остается в сущности тем же самым.

5. АСИМПТОТИКИ ТАУ-ФУНКЦИИ

В настоящем разделе мы выведем $\hbar$ -разложение $\ln \tau(\hbar, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-2} F_n(t)$ тау-функции (ср. (6)). Заметим, что мы опускаем переменную x , полагая, что она входит в t_1 .

Логарифмическое дифференцирование равенства (6) дает

$$-\hbar D'(z) \ln \tau(t) = \hbar^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \hbar D'(z) \right) \widehat{S}(t; z), \quad (18)$$

где $\widehat{S}(t; z) = S(t; z) - \zeta(t, z)$ и $D'(z) := -\sum_{j=1}^{\infty} z^{-j-1} (\partial/\partial t_j)$.

Подставляя $\hbar$ -разложения

$$\ln \tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-2} F_n(t), \quad \widehat{S}(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n S_n(t; z)$$

и разлагая $S_n(t; z)$ как

$$S_n(t; z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} v_{n,k},$$

получаем уравнения

$$\frac{\partial F_n}{\partial t_j} = v_{n,j} + \sum_{\substack{k+l=j \\ k \geq 1, l \geq 1}} \frac{1}{l} \frac{\partial v_{n-1,l}}{\partial t_k}, \quad v_{-1,j} = 0. \quad (19)$$

Эта система определяет F_n с точностью до постоянных интегрирования.

Эти уравнения вместе с результатами разделов 3 и 4 означают, что если заданы функция F_0 , определяющая решение бездисперсионной иерархии КП, и соответствующее квантованное каноническое преобразование (f, g) , то можно рекуррентно построить F_n и, следовательно, тау-функцию решения зависящей от $\hbar$ иерархии КП.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору А. Цучия за то, что он обратил их внимание на данную проблему. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Japan Society for the Promotion of Science (Grants-in-Aid for Scientific Research № 19540179 и грант № 22540186 (К. Такасаки)). Работа одного из авторов (Т. Такебе) частично поддержана грантом ГУ ВШЭ (Россия) в рамках индивидуального исследовательского проекта № 10-01-0043 (2010). Т. Такебе благодарен организаторам Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS-2011) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **129**:4 (1988), 223–226; Y. Kodama, J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170.
- [2] I. M. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **143**:2 (1991), 415–426.
- [3] K. Takasaki, T. Takebe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**:Suppl. 1B (1992), 889–922.
- [4] A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12**:3 (1986), 171–179; A. Yu. Orlov, “Vertex operators, $\bar{\partial}$ -problems, symmetries, variational identities and Hamiltonian formalism for 2+1 integrable systems”, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* (Alushta, 1989), eds. A. A. Belavin, A. U. Klimyk, A. B. Zamolodchikov, World Scientific, Singapore, 1988, 116–134; P. G. Grinevich, A. Yu. Orlov, *Problems of Modern Quantum Field Theory*, Springer, Berlin, 1989.
- [5] T. Aoki, *Ann. Inst. Fourier*, **36**:2 (1986), 143–165.
- [6] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–803.
- [7] K. Takasaki, T. Takebe, *$\hbar$ -Expansion of KP hierarchy: Recursive construction of solutions*, arXiv: 0912.4867.
- [8] P. Schapira, *Microdifferential Systems in the Complex Domain*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **269**, Springer, Berlin, New York, 1985.