Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Нестандартные лагранжевы торы и псевдоторические структуры, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 321–325

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:58:39

© 2012 г.

Н. А. Тюрин^{*†‡}

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ ТОРЫ И ПСЕВДОТОРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Показано, что экзотические лагранжевы торы, построенные Чекановым и Шленком, могут быть получены на большом классе торических многообразий. Для этого их оригинальная конструкция переводится на язык псевдоторических структур. В качестве примера построены экзотические лагранжевы торы на поверхности дель Педро степени 6.

Ключевые слова: лагранжевы торы, экзотические торы, торы Чеканова, псевдоторическая структура.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классификация лагранжевых торов (или, более общо, всевозможных лагранжевых подмногообразий) в симплектических многообразиях с точностью до симплектомофризма или гамильтоновой изотопии является важной математической задачей, решение которой требуется для многих подходов, принятых в математической физике. В настоящей работе мы исследуем скрученные торы [1], доставляющие примеры экзотических монотонных торов. Цепочка такого рода примеров начинается с тора $\Theta \in \mathbb{R}^4$, построенного в работах [2] и [3] в явном и неявном видах; тем самым была опровергнута гипотеза единственности класса монотонного тора в $\mathbb{R}^4$. С другой стороны, в работах [4], [5] была введена новая структура, обобщающая понятие торической структуры (такое обобщение естественно называть псевдоторической структурой), а также предложены примеры торических и неторических симплектических многообразий, обладающих такой структурой.

Настоящая работа представляет собой развернутый вариант краткой заметки [6], дополненный явными примерами нестандартных лагранжевых торов в торических поверхностях дель Педро. Мы показываем, что скрученный тор $\Theta^k \subset \mathbb{R}^{2k+2}$, определенный в работе [1], может быть построен в терминах псевдоторической структуры. Вследствие того что всякая торическая поверхность дель Педро обладает псевдоторической структурой, оказывается возможным построить нестандартные торы в этих поверхностях.

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

[†]Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва, Россия

[‡]Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия

2. ПСЕВДТОРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА $\mathbb{C}^{K+1}$ И СКРУЧЕННЫЙ ТОР Θ^K

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2k+2}$ со стандартными комплексной и симплектической структурами и обозначим снаряженное пространство как $\mathbb{C}^{k+1}$. Выберем некоторую систему комплексных координат $(z_1, \dots, z_{k+1})$. Тогда можно определить отображение $\psi: \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемое формулой

$$(z_1, \dots, z_{k+1}) \mapsto a = z_1 \cdot \dots \cdot z_{k+1} \in \mathbb{C}.$$

Обозначим область значений этого отображения при фиксированной координате a через $\mathbb{C}_a$. Слои отображения ψ – гиперповерхности в $\mathbb{C}^{k+1}$, задаваемые уравнением $z_1 \cdot \dots \cdot z_{k+1} = a$. Эти поверхности являются гладкими за исключением случая $a = 0$, а прообраз последнего состоит из $k + 1$ базисных гиперповерхностей.

Стандартное торическое действие T^{k+1} на $\mathbb{C}^{k+1}$ редуцируется до подтора T_0^k , действие которого сохраняет слои ψ . Соответствующее гамильтоново действие может быть описано в явном виде следующим образом. Возьмем набор самосопряженных операторов $A_1, \dots, A_k$, задаваемых в нашей системе координат диагональными матрицами: $A_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$, где $\lambda_i = 1$, $\lambda_{i+1} = -1$ и $\lambda_j = 0$ для прочих λ_j . Рассмотрим функции $F_i = \langle A_i \psi, \psi \rangle_h$, известные в квантовой механике как средние значения. Тогда нетрудно видеть, что $\{F_1, \dots, F_k\}$ – набор коммутирующих функций и каждая функция F_i своим гамильтоновым действием сохраняет каждый слой ψ . Структура такого вида называется *псевдоторической структурой* (детальное определение см. в статье [5]).

Каждый гладкий слой $N_a = \psi^{-1}(a)$, снабженный набором функций $\{F_1^a, \dots, F_k^a\}$, где $F_i^a = F_i|_{N_a}$, есть вполне интегрируемая система [7]. Тогда выбор некритических значений $c_1, \dots, c_k$ для функций $F_1^a, \dots, F_k^a$ на гладком слое N_a (т. е. $-1 < c_i < 1$) определяет совместное множество уровня

$$S_{(c_1, \dots, c_k)}^a = \{F_i^a = c_i\} \subset N_a,$$

которое является гладким лагранжевым тором для любого $a \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как $F_1, \dots, F_k$ – глобальные функции на $\mathbb{C}^{k+1}$, мы можем фиксировать значения $c_1, \dots, c_k$ одновременно для всех слоев N_a и всех интегралов $F_1^a, \dots, F_k^a$. С другой стороны, некритические значения для F_i и F_i^a при $a \neq 0$ разные: для последних c_i могут равняться нулю. Это отличие отражает тот факт, что критические точки функций $F_1, \dots, F_k$ с нулевыми критическими значениями лежат в особом слое N_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Выбор $c_1, \dots, c_k$, $-1 < c_i < 1$, в качестве значений для функций $F_1^a, \dots, F_k^a$ и гладкой петли $\gamma \subset \mathbb{C}_a$, не проходящей через ноль, порождает лагранжесв тор в $\mathbb{C}^{k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $a \in \gamma \subset \mathbb{C}_a$ рассмотрим соответствующие торы $S_{(c_1, \dots, c_k)}^a$ в слоях ψ и объединим их:

$$S_{\gamma, (c_1, \dots, c_k)} = \bigcup_{a \in \gamma} S_{(c_1, \dots, c_k)}^a;$$

очевидно, это даст гладкий тор $S_{\gamma, (c_1, \dots, c_k)} \in \mathbb{C}^{k+1}$.

Покажем, что этот тор лагранжев. Касательное расслоение $TS_{\gamma, (c_1, \dots, c_2)}$ порождено $k+1$ не обращающимися в ноль векторными полями: гамильтоновыми векторными полями X_{F_i} функций $F_1, \dots, F_k$ и еще одним дополнительным векторным полем $\nabla_{\psi} \rho_{\gamma}$, являющимся результатом поднятия посредством симплектической связности ∇_{ψ} (напомним, что слои ψ симплектические) не обращающегося в ноль касательного векторного поля ρ_{γ} петли γ . Так как векторное поле $\nabla_{\psi} \rho_{\gamma}$ симплектически ортогонально слоям ψ , касательное пространство $T_p S_{\gamma, (c_1, \dots, c_n)}$ лагранжево в каждой точке p .

Следуя Ору [8], мы различаем два случая:

- 1) стандартный тип – петля γ не стягиваема в $\mathbb{C}_a^* = \mathbb{C}_a - \{0\}$;
- 2) тип Чеканова – петля γ стягиваема в $\mathbb{C}_a^*$.

Такое различие основано на следующем наблюдении. Возьмем $c_1 = \dots = c_k = 0$. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}_a$ определена условием $\gamma_0 = e^{i\phi}$. Тогда несложно понять, что $S_{\gamma_0, (0, \dots, 0)}$ – стандартный тор в $\mathbb{C}^{k+1}$. С другой стороны, параметризующее слои пространство $\mathbb{C}_a$ накрывает диагональ $\Delta \subset \mathbb{C}^{k+1}$, задаваемую условием $z_1 = \dots = z_{k+1}$, так что $z^{n+1}: \Delta \rightarrow \mathbb{C}_a$. Таким образом, пространство петель в $\mathbb{C}_a$ имеет компоненту, состоящую из петель следующего вида: возьмем сектор

$$\mathcal{S}(k) = \left\{ re^{i\phi} \mid 0 < \phi < \frac{2\pi}{k+1} \right\} \in \Delta$$

и рассмотрим такие петли в $\mathbb{C}_a$, которые получаются из петель, лежащих в секторе $\mathcal{S}(k)$, взятием $(n+1)$ -й степени (ср. с работой [1]). Зафиксируем гладкую петлю $\gamma \subset \Delta$, лежащую в $\mathcal{S}(k) \cap D^2(k+1+\epsilon)$, как и в конструкции из работы [1]. Для каждой точки кривой γ возьмем $(k+1)$ -ю степень соответствующего комплексного числа и получим гладкую петлю $\gamma_1 \in \mathbb{C}_a$. Тогда имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В условиях предложения 1 возьмем $c_1 = \dots = c_k = 0$ и петлю γ_1 , описанную выше. Тогда соответствующий лагранжев тор $S_{\gamma_1, (0, \dots, 0)}$ совпадает с тором Θ^k из работы [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямым вычислением.

3. ОБОБЩЕНИЯ

В работе [1] конструкция экзотического тора Θ^k переносится на случай многообразий $\mathbb{CP}^k$ и $S^2 \times \dots \times S^2$. Оказывается, что и в этих случаях можно воспользоваться языком псевдоторических структур. Случай проективного пространства был подробно разобран в статье [5]; для прямого произведения $X = S_1^2 \times \dots \times S_k^2$ это может быть сделано следующим образом. Зафиксируем однородные координаты $[x_j : y_j]$ на j -м прямом слагаемом $S_j^2 = \mathbb{CP}_j^1$ и рассмотрим отображение

$$\psi: X - B \rightarrow S_w^2 = \mathbb{CP}_w^1,$$

задаваемое соотношениями $w_0 = x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, $w_1 = y_1 \cdot \dots \cdot y_k$. Здесь B – базисное множество пучка

$$(\mathbb{CP}_w^1)^{\vee} = \{\alpha x_1 \cdot \dots \cdot x_k + \beta y_1 \cdot \dots \cdot y_k = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

на X . Тогда компактифицированный слой $D_p = \overline{\psi^{-1}(p)}$ является гладким дивизором в X , за исключением случаев, когда p имеет координаты $[0:1]$ или $[1:0]$. Этот

слои является торическим многообразием с одним и тем же топологическим типом, кодируемым выпуклым многогранником P . Открытая часть $D_p - B$ расслоена на гладкие торы, и выбор внутренней точки в P задает лагранжевы торы в каждом слое D_p . Тогда для любой гладкой петли $\gamma \subset \mathbb{CP}_w^1$, не проходящей через северный и южный полюсы многообразия $\mathbb{CP}_w^1$, получаем гладкий лагранжев тор в X . Снова имеются два случая: петля γ либо не стягиваема в многообразии $\mathbb{CP}_w^1$ с выколотыми полюсами (стандартный тип), либо стягиваема (тип Чеканова). Нетрудно видеть, что эти случаи в точности соответствуют примеру из работы [1].

Кроме того, более сложные скрученные торы, обозначаемые в работе [1] через Θ_l^k , могут быть построены в рамках теории псевдоторических структур. Дело в том, что слои ϕ в наших построениях снова являются торическими многообразиями, и в них можно рассматривать не стандартные торы $S_{(c_1, \dots, c_k)}$, а экзотические. Тогда мы получим абсолютно такую же древесную иерархию, как в работе [1]. Однако в свете возможности построения псевдоторической структуры на произвольном торическом многообразии (набросок доказательства этого факта см. в статье [5], полную версию мы планируем привести в готовящейся публикации) лагранжевы торы типа Θ_l^k существуют в произвольных торических многообразиях, и древесная иерархия имеется также в этом общем случае. При этом открытым остается вопрос о различении этих торов в задаче классификации лагранжевых торов с точностью до гамильтоновой изотопии.

В конце нашего рассмотрения приведем пример псевдоторической структуры и нестандартных лагранжевых торов на торической поверхности дель Педро. В работе [1] поставлен вопрос о нестандартных торах в $\mathbb{CP}_3^2$ – проективной плоскости с тремя раздутыми точками. Именно этот случай мы и рассмотрим.

ПРИМЕР 1. Проективная плоскость $\mathbb{CP}_3^2$ с тремя раздутыми точками моделируется как полное пересечение в $\mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, задаваемое уравнениями

$$U = \{x_0y_0 = x_1y_1 = x_2y_2\};$$

при этом каноническая проекция “сдутия” $\pi: \mathbb{CP}_3^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ получается просто путем проецирования на любой из прямых сомножителей.

Рассмотрим отображение $\psi: \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2 - B \rightarrow \mathbb{CP}_w^1$, задаваемое соотношениями $w_0 = x_0x_1y_2^2$, $w_1 = x_2^2y_0y_1$. Ограничим ψ на $U \subset \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2$, исключая базисное множество $B_U = B \cap U$, состоящее из шести прямых вида $x_i = x_j = y_k = 0$ или $x_i = y_j = y_k = 0$, где i, j, k – произвольный набор неодинаковых чисел из множества $\{0, 1, 2\}$. Обозначим такое ограничение как $\psi_U: U - B_U \rightarrow \mathbb{CP}_w^1$. Нетрудно видеть, что компактифицированные слои отображения ψ_U являются дивизорами на U вида $B_U \cup \Sigma_p$, где $p \in \mathbb{CP}_w^1$. В самом деле, каждый компактифицированный слой есть пересечение U и соответствующего элемента пучка

$$\{-w_1(p)x_0x_1y_2^2 + w_0(p)x_2^2y_0y_1 = 0\}.$$

Очевидно, что пересечение всегда содержит множество B_U , однако для каждой точки p с ненулевыми координатами $[w_0(p) : w_1(p)]$ имеется еще одна компонента Σ_p , соответствующая квадрике

$$Q_x = \{\sqrt{-w_1(p)}x_0x_1 + \sqrt{w_0(p)}x_2^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}_x^2.$$

Найдем гладкую функцию f на U , которая сохраняет слои отображения ψ_U . Ис-
кать будем, как всегда, в виде

$$f = f(\lambda_i; \mu_j) = \frac{\sum \lambda_i |x_i|^2}{\sum |x_i|^2} + \frac{\sum \mu_i |y_i|^2}{\sum |y_i|^2}.$$

Условие сохранения множества U при инфинитезимальном действии гамильтонова
поля такой функции дает

$$\lambda_0 + \mu_0 = \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2,$$

и без ограничения общности мы можем положить $\lambda_i = -\mu_i$. Отсюда можно по-
лучить две коммутирующие алгебраически независимые функции на U , например
функции $f_1 = f(1, -1, 0; -1, 1, 0)|_U$ и $f_2 = f(0, 1, -1; 0, -1, 1)|_U$, которые вместе да-
дут отображения действия $F_{\text{act}}: U \rightarrow P$ в выпуклый шестиугольник $P \subset \mathbb{R}^2$. Но
нам нужно из этих двух функций оставить только одну, которая сохраняет слои
отображения ψ_U . Такая функция должна удовлетворять условиям

$$\lambda_0 + \lambda_1 + 2\mu_2 = 2\lambda_2 + \mu_0 + \mu_1 = 0,$$

отсюда $2\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$. Этому условию удовлетворяет только функция f_1 , она и
будет функцией f , сохраняющей слои отображения ψ_U . Заметим, что f имеет на
множестве U только невырожденные критические точки, расположенные в верши-
нах базисного шестиугольника B_U ; критические значения f равны $2, 1, 1, -1, -1, -2$.
Отсюда следует, что компонента Σ_p гладкая вне B_U за исключением северного и
южного полюсов многообразия $\mathbb{CP}_w^1$.

Подводя итог, получаем псевдоторическую структуру ($f = f_1, \psi_U$) на торической
поверхности дель Пеццо $U = \mathbb{CP}_3^2$. И снова, выбирая петлю $\gamma \subset \mathbb{CP}_w^1$, не проходя-
щую через северный и южный полюсы, и значение функции $f \neq \pm 2$, мы получаем
лагранжев тор, тип которого определяется тем, стягиваема или нет петля γ в мно-
гообразии $\mathbb{CP}_w^1$ с выколотыми полюсами.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраиче-
ской геометрии Государственного университета – Высшая школа экономики, под-
держана грантом Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0023), а также РФФИ
(гранты № 10-01-93113, 11-01-00980_a).

Список литературы

- [1] Yu. Chekanov, F. Schlenk, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, **17** (2010), 104–121.
- [2] Yu. V. Chekanov, *Math. Z.*, **223**:4 (1996), 547–559.
- [3] Ya. Eliashberg, L. Polterovich, “The problem of Lagrangian knots in four-manifolds”, *Geometric Topology: 1993 Georgia International Topology Conference* (University of Georgia, Athens, GA, August 2–13, 1993), AMS-IP Studies in Advanced Mathematics Series, ed. W. H. Kazez, AMS, Cambridge, MA, 1993, 323–327.
- [4] С. А. Белев, Н. А. Тюрин, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 48–59.
- [5] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 307–333.
- [6] Н. А. Тюрин, *УМН*, **66**:1(397) (2011), 185–186.
- [7] Н. Н. Нехорошев, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 67–69.
- [8] D. Auroux, J. Gökova *Geom. Topol. GGT*, **1** (2007), 51–91.