Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, В. Н. Рубцов, В. В. Соколов, Бигамильтоновы обыкновенные дифференциальные уравнения с матричными переменными, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 26–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 10:03:33

© 2012 г. А. В. Одесский*, В. Н. Рубцов^{†‡}, В. В. Соколов[§]

БИГАМИЛЬТОНОВЫ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАТРИЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассматривается специальный класс скобок Пуассона, связанный с системами обыкновенных дифференциальных уравнений с матричными переменными. Изучены общие свойства таких скобок, приведены примеры согласованной пары линейной и квадратичной скобок. Найдена соответствующая иерархия интегрируемых моделей, которая обобщает двухкомпонентную матричную систему Манакова на случай произвольного числа матриц.

Ключевые слова: интегрируемые ОДУ с матричными неизвестными, бигамильтонов формализм, модель Манакова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = F_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad (1)$$

где x_i – $(m \times m)$ -матрицы, а F_α – (некоммутативные) многочлены. Существуют системы (1), интегрируемые для любого m . Например, система

$$u_t = u^2 v - v u^2, \quad v_t = 0 \quad (2)$$

интегрируема методом обратной задачи рассеяния при любом размере m матриц u и v . Если u – матрица такая, что $u^T = -u$, а v – постоянная диагональная матрица, то система (2) эквивалентна m -мерному волчку Эйлера. Интегрируемость этой модели была установлена Манаковым [1].

В настоящей работе мы строим интегрируемое обобщение системы (2) на случай произвольного N , используя бигамильтонов подход [2]. Этот подход основан на

*Brock University, St. Catharines, Canada. E-mail: aodesski@brocku.ca

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[‡]LAREMA, CNRS, Université d'Angers, Angers, France. E-mail: volodya@univ-angers.fr

[§]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: sokolov@itp.ac.ru

понятии пары согласованных скобок Пуассона. Две скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ называются согласованными, если

$$\{\cdot, \cdot\}_\lambda = \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda \{\cdot, \cdot\}_2 \quad (3)$$

является скобкой Пуассона для любого λ .

Если скобка (3) вырождена для любого λ , то иерархия интегрируемых гамильтоновых ОДУ может быть построена с помощью следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1 [3], [4]. Пусть

$$C(\lambda) = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots, \quad \overline{C}(\lambda) = \overline{C}_0 + \lambda \overline{C}_1 + \lambda^2 \overline{C}_2 + \dots$$

– разложение в ряд Тейлора двух любых функций Казимира для скобки $\{\cdot, \cdot\}_\lambda$. Тогда коэффициенты $C_i, \overline{C}_j$ попарно коммутируют относительно обеих скобок $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$.

В противоположном случае, когда, скажем, скобка $\{\cdot, \cdot\}_1$ невырождена, имеется другой способ построения интегрируемой иерархии. Отношение $R = \Pi_2 \Pi_1^{-1}$, где Π_i – пуассонов тензор для $\{\cdot, \cdot\}_i$, определяет так называемый рекурсионный оператор, спектр которого является набором функций, находящихся в инволюции относительно обеих скобок. В этом случае формула $\Pi_k = R^k \Pi_1$ задает бесконечный набор попарно согласованных скобок Пуассона.

Для важного класса скобок Пуассона, связанного с системами (1), соответствующий гамильтонов оператор может быть выражен в терминах операторов левого и правого умножения на многочлены от $x_1, \dots, x_N$ [5]. Такие скобки обладают двумя следующими свойствами:

- 1) они инвариантны относительно GL_m -сопряжений;
- 2) скобка между следами любых матричных многочленов $P_i(x_1, \dots, x_N)$, $i = 1, 2$, является следом некоторого многочлена P_3 .

Такие скобки были названы *неабелевыми скобками Пуассона*.

Мы рассматриваем здесь согласованные пары неабелевых скобок Пуассона, где скобка $\{\cdot, \cdot\}_1$ линейна, а $\{\cdot, \cdot\}_2$ квадратична.

2. НЕАБЕЛЕВЫ СКОБКИ ПУАССОНА

Рассмотрим скобки Пуассона следующего вида:

$$\{x_{i,\alpha}^j, x_{i',\beta}^{j'}\}_1 = b_{\alpha,\beta}^\gamma x_{i,\gamma}^{j'} \delta_{i'}^j - b_{\beta,\alpha}^\gamma x_{i',\gamma}^j \delta_i^{j'} \quad (4)$$

и

$$\{x_{i,\alpha}^j, x_{i',\beta}^{j'}\}_2 = r_{\alpha\beta}^{\gamma\epsilon} x_{i,\gamma}^{j'} x_{i',\epsilon}^j + a_{\alpha\beta}^{\gamma\epsilon} x_{i,\gamma}^k x_{k,\epsilon}^{j'} \delta_{i'}^j - a_{\beta\alpha}^{\gamma\epsilon} x_{i',\gamma}^k x_{k,\epsilon}^j \delta_i^{j'}, \quad (5)$$

где $x_{i,\alpha}^j$ – элементы матриц x_α , а δ_i^j – символ Кронекера. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Здесь и далее мы используем латинские индексы для элементов матриц. Они меняются от 1 до m . Греческие индексы меняются от 1 до N и используются для нумерации матриц.

ТЕОРЕМА 2. Скобки (4) и (5) инвариантны относительно GL_m -действия $x_\alpha \rightarrow ux_\alpha u^{-1}$, где $u \in GL_m$. Кроме того, эти скобки удовлетворяют следующему свойству: скобка между следами любых двух матричных многочленов является следом матричного многочлена. Всякая линейная или квадратичная скобка Пуассона, обладающая этими двумя свойствами, имеет вид (4) или (5) соответственно.

Имеется множество публикаций, посвященных квадратичным скобкам Пуассона, появляющимся в классическом варианте метода обратной задачи рассеяния [6]. Однако эти скобки не имеют свойств, указанных в теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. 1. Формула (4) определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда

$$b_{\alpha\beta}^\mu b_{\mu\gamma}^\sigma = b_{\alpha\mu}^\sigma b_{\beta\gamma}^\mu. \quad (6)$$

2. Формула (5) определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены тождества

$$r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} = -r_{\beta\alpha}^{\epsilon\sigma}, \quad r_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma} r_{\sigma\tau}^{\mu\nu} + r_{\beta\tau}^{\mu\sigma} r_{\sigma\alpha}^{\nu\lambda} + r_{\tau\alpha}^{\nu\sigma} r_{\sigma\beta}^{\lambda\mu} = 0, \quad (7)$$

$$a_{\alpha\beta}^{\sigma\lambda} a_{\tau\sigma}^{\mu\nu} = a_{\tau\alpha}^{\mu\sigma} a_{\sigma\beta}^{\nu\lambda}, \quad a_{\alpha\beta}^{\sigma\lambda} a_{\sigma\tau}^{\mu\nu} = a_{\alpha\sigma}^{\mu\sigma} r_{\tau\sigma}^{\lambda\nu} + a_{\alpha\sigma}^{\mu\nu} r_{\beta\tau}^{\sigma\lambda}, \quad a_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma} a_{\tau\sigma}^{\mu\nu} = a_{\alpha\beta}^{\sigma\nu} r_{\sigma\tau}^{\lambda\mu} + a_{\sigma\beta}^{\mu\nu} r_{\tau\alpha}^{\sigma\lambda}. \quad (8)$$

Формула (6) означает, что $b_{\alpha\beta}^\sigma$ являются структурными константами ассоциативной алгебры. Аналогичные скобки Пуассона рассматривались в работах [7], [8].

Рассмотрим квадратичные скобки Пуассона (5). При замене базиса $x_\alpha \rightarrow g_\alpha^\beta x_\beta$ тензоры r и a преобразуются стандартным образом:

$$r_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow g_\alpha^\lambda g_\beta^\mu h_\nu^\gamma h_\epsilon^\sigma r_{\lambda\mu}^{\nu\epsilon}, \quad a_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow g_\alpha^\lambda g_\beta^\mu h_\nu^\gamma h_\epsilon^\sigma a_{\lambda\mu}^{\nu\epsilon}, \quad (9)$$

где $g_\alpha^\beta h_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$.

Система тождеств (7), (8) допускает следующую дискретную инволюцию:

$$r_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow r_{\beta\alpha}^{\sigma\gamma}, \quad a_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow a_{\beta\alpha}^{\sigma\gamma}. \quad (10)$$

Эта инволюция соответствует матричному транспонированию $x_\alpha \rightarrow x_\alpha^T$. Две скобки, связанные преобразованиями (9), (10), называются эквивалентными.

Существует еще одна дискретная инволюция:

$$r_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow r_{\gamma\sigma}^{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \rightarrow a_{\gamma\sigma}^{\alpha\beta}. \quad (11)$$

Скобки, связанные посредством (11), могут иметь совершенно различные свойства (например, разное число функций Казимира).

Пусть V – векторное пространство с базисом v_α , $\alpha = 1, \dots, N$. Определим линейные операторы r , a на пространстве $V \otimes V$ формулами

$$rv_\alpha \otimes v_\beta = r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} v_\sigma \otimes v_\epsilon, \quad av_\alpha \otimes v_\beta = a_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} v_\sigma \otimes v_\epsilon.$$

Тогда тождества (7), (8) могут быть переписаны как

$$r^{12} = -r^{21}, \quad r^{23}r^{12} + r^{31}r^{23} + r^{12}r^{31} = 0, \\ a^{12}a^{31} = a^{31}a^{12}, \quad \sigma^{23}a^{13}a^{12} = a^{12}r^{23} - r^{23}a^{12}, \quad a^{32}a^{12} = r^{13}a^{12} - a^{32}r^{13}.$$

Здесь все операторы действуют на $V \otimes V \otimes V$, через σ^{ij} мы обозначаем перестановку i -й и j -й компонент тензорного произведения и a^{ij} , r^{ij} означают операторы a , r , действующие на произведении i -й и j -й компонент.

Инволюция (11) соответствует преобразованию $a \rightarrow a^*$, $r \rightarrow r^*$, где a^* , r^* действуют на двойственном пространстве V^* . Инволюция (10) соответствует преобразованию $a \rightarrow \sigma a \sigma$, $r \rightarrow \sigma r$, где σ действует перестановкой векторных пространств в $V \otimes V$. Преобразование эквивалентности (9) соответствует сопряжению $a \rightarrow GaG^{-1}$, $r \rightarrow GrG^{-1}$, где $G = g \otimes g$ и $g \in GL(V)$.

Существует подкласс скобок (5), соответствующий нулевому тензору a . Соотношения (7) означают, что r является постоянным решением ассоциативного уравнения Янга–Бакстера [9], [10]. Такие тензоры r могут быть построены следующим алгебраическим способом.

Антифробениусовой алгеброй называется ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ (не обязательно с единицей) с невырожденной антисимметрической билинейной формой $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющей условию

$$(x, yz) + (y, zx) + (z, xy) = 0 \quad (12)$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Другими словами, форма $(\cdot, \cdot)$ определяет циклический коцикл на алгебре $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 4. *Существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (7) с точностью до эквивалентности и точными представлениями антифробениусовых алгебр с точностью до изоморфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тензор r может быть записан как $r_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} = \sum_{i,j=1}^p g^{ij} y_{\alpha,i}^{\gamma} y_{\beta,j}^{\sigma}$, где $g^{ij} = -g^{ji}$, матрица $G = (g^{ij})$ невырожденна и p – наименьшее возможное. Подставляя это выражение в (7), мы получаем, что существует тензор ϕ_{ij}^k такой, что $y_{\gamma,i}^{\alpha} y_{\beta,j}^{\gamma} = \phi_{ij}^k y_{\beta,k}^{\alpha}$. Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра с базисом $y_1, \dots, y_p$ и умножением $y_i y_j = \phi_{ij}^k y_k$. Определим антисимметрическую билинейную форму $(y_i, y_j) = g_{ij}$, где $(g_{ij}) = G^{-1}$. Тогда соотношения (7) эквивалентны антифробениусовости для этой формы.

ПРИМЕР 1 (ср. [11]). Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра $(N \times N)$ -матриц с нулевой N -й строкой. Для элемента l из $\mathcal{A}^*$ общего вида билинейная форма $(x, y) = l([x, y])$ невырожденна, антисимметрична и удовлетворяет условию (12). Она может быть записана как $(x, y) = \text{tr}([x, y]k^T)$, где $k \in \mathcal{A}$. Выберем $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $k_{\alpha\alpha} = \mu_{\alpha}$ и $k_{\alpha N} = 1$, где $\alpha, \beta = 1, \dots, N-1$. Соответствующее решение уравнений (7) имеет вид

$$r_{N\alpha}^{\alpha\alpha} = -r_{\alpha N}^{\alpha\alpha} = 1, \quad r_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} = r_{\beta\alpha}^{\alpha\alpha} = -r_{\alpha\beta}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{\mu_{\alpha} - \mu_{\beta}},$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N-1.$$

Оставшиеся элементы тензора r и все элементы тензора a предполагаются нулями. Отметим, что тензор r антисимметричен относительно инволюции (10). Он эквивалентен тензору

$$r_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} = r_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} = r_{\beta\alpha}^{\alpha\alpha} = -r_{\alpha\beta}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – произвольные попарно различные параметры. Формула (5) определяет соответствующую скобку Пуассона для элементов матриц $x_1, \dots, x_N$ произвольного размера m . Для $m = 1$ мы имеем скалярную скобку Пуассона

$$\{x_\alpha, x_\beta\} = \frac{(x_\alpha - x_\beta)^2}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N.$$

Если N четно, то пуассонова структура (13) невырождена, т. е. ранг пуассонова тензора Π равен Nm^2 . В нечетном случае $\text{rank } \Pi = (N - 1)m^2$.

Можно проверить, что условия совместности линейной и квадратичных скобок (4) и (5) имеют вид

$$\begin{aligned} b_{\alpha\gamma}^s a_{s\beta}^{vu} - b_{\gamma\beta}^s a_{\alpha s}^{vu} + b_{s\beta}^u a_{\alpha\gamma}^{vs} - b_{\alpha s}^v a_{\gamma\beta}^{su} &= 0, \\ b_{\beta\alpha}^s r_{s\gamma}^{uv} - b_{\beta s}^u r_{\alpha\gamma}^{sv} - b_{s\alpha}^v r_{\beta\gamma}^{us} - b_{\gamma s}^v a_{\beta\alpha}^{us} + b_{s\gamma}^u a_{\beta\alpha}^{sv} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Существует следующий способ (так называемый метод сдвига аргумента) для построения линейной скобки Пуассона, согласованной с данной квадратичной скобкой. Вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ называется *допустимым*, если для любых α, β

$$(a_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} - a_{\beta\alpha}^{\epsilon\sigma} + r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon})\kappa_\sigma\kappa_\epsilon = 0.$$

Для любого допустимого вектора сдвиг аргумента $x_\alpha \rightarrow x_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{1}$ приводит к линейной скобке Пуассона (4) с

$$b_{\alpha\beta}^\sigma = (a_{\alpha\beta}^{\epsilon\sigma} + a_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon} + r_{\alpha\beta}^{\sigma\epsilon})\kappa_\epsilon,$$

совместной с исходной квадратичной. Для примера 1 любой допустимый вектор пропорционален $(1, 1, \dots, 1)$ и соответствующая линейная скобка тривиальна.

ПРИМЕР 2. Применяя инволюцию (11) к (13), мы получаем еще один пример квадратичной скобки с нулевым тензором a :

$$r_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} = r_{\alpha\alpha}^{\beta\alpha} = -r_{\alpha\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Легко проверить, что в этом случае любой вектор $(\kappa_1, \dots, \kappa_N)$ является допустимым. Все элементы матрицы $\sum_{\alpha=1}^N x_\alpha$ представляют собой функции Казимира для обеих скобок: квадратичной скобки $\{\cdot, \cdot\}_2$, задаваемой формулой (15), и соответствующей ей линейной скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$. Таким образом, мы можем фиксировать

$$\sum_{\alpha=1}^N x_\alpha = C,$$

где C – произвольная постоянная матрица. Гамильтонианы иерархии, коммутирующие относительно обеих скобок $\{\cdot, \cdot\}_2$ и $\{\cdot, \cdot\}_1$, имеют вид

$$\text{tr } x_\alpha^k, \quad \text{tr } x_\alpha^k \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции Казимира для скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$ принадлежат этому множеству. Линейные функции Казимира для $\{\cdot, \cdot\}_1$ — это $\text{tr } x_\alpha$, где $\alpha = 1, \dots, N$. Динамическая система, соответствующая простейшему гамильтониану $\text{tr } x_N$ и квадратичной пуассоновой структуре $\{\cdot, \cdot\}_2$, имеет вид

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{x_N x_\alpha - x_\alpha x_N}{\lambda_N - \lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N-1.$$

Существует следующая квадратичная функция Казимира линейной скобки:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{c_\alpha} \text{tr } x_\alpha^2,$$

где c_α — произвольные постоянные. Система, соответствующая этому гамильтониану и квадратичной скобке $\{\cdot, \cdot\}_2$, задается формулами

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_\alpha x_\beta^2 - x_\beta^2 x_\alpha}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) c_\beta} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_\beta x_\alpha^2 - x_\alpha^2 x_\beta}{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) c_\alpha}. \quad (16)$$

Она может быть записана в следующей бигамильтоновой форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \{\mathbf{x}, \text{grad}(\text{tr } H)\}_2 = \{\mathbf{x}, \text{grad}(\text{tr } K)\}_1,$$

где

$$K = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{c_\alpha^2} \text{tr } x_\alpha^3.$$

Если $N = 2$, то система (16) эквивалентна системе (2).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье построены примеры линейных и квадратичных скобок Пуассона, естественно связанных с матричными ОДУ. Аналогичные пуассоновы, симплектические и многие другие интересные алгебраические и геометрические структуры рассматривались недавно в ряде работ, развивающих идеи подхода М. Концевича к построению некоммутативной симплектической геометрии [12]. Отметим в этой связи книги и статьи П. Этингофа, В. Гинзбурга, У. Краули-Боеви, Л. Ле Брюна, М. Ван ден Берга и многих других, посвященные пространствам Калоджеро–Мозера, симплектической и пуассоновой геометрии алгебр путей колчанов, “ожерельевым” (nesklase) и двойным структурам Пуассона, алгебрам Лодэ–Лейбница, операторам Рота–Бакстера и их обобщениям и т. п.

В нашей следующей статье, находящейся в процессе завершения, мы устанавливаем роль и место наших неабелевых структур в рамках перечисленных выше (не)коммутативных алгебро-геометрических понятий. Мы обсудим связь наших квадратичных пуассоновых структур с пуассоновой геометрией аффинных многообразий, являющихся координатными кольцами пространств модулей представлений ассоциативных алгебр (по модулю присоединенного действия GL), опишем классификацию квадратичных скобок для свободных ассоциативных алгебр и ее связь

с классификацией “квадратичных двойных” пуассоновых структур. Мы дадим описание симплектических листов и функций Казимира наших скобок, а также их связи с некоммутативными интегрируемыми системами.

Другая интересная проблема большой важности заключается в построении квантования неабелевых скобок и соответствующих интегрируемых уравнений и выяснении их связи с динамическим уравнением Янга–Бакстера и его различных версий. Эти вопросы в настоящей статье не обсуждаются, но мы надеемся рассмотреть их в отдельных публикациях.

Благодарности. Авторы признательны А. Алексееву, Ж. Авану, Е. Б. Винбергу, М. Концевичу, А. Полищуку и М. Семенову–Тян–Шанскому за ценные обсуждения, а Ю. Кордюкову – за полезные замечания. В. В. Соколов благодарен Университетам Анже, Брока и Дижона за гостеприимство в процессе работы над статьей. В. В. Соколов и В. Н. Рубцов приносят благодарность МАРТУЛ (проекты “Non-commutative integrable systems” ANR и “DIADEMS”) за финансовую поддержку визитов В. В. Соколова в Анже. Они также благодарны РФФИ за частичную финансовую поддержку (грант № 11-01-00341_а). Работа В. Н. Рубцова поддержана грантом FASI RF 14.740.11.0347, а работа В. В. Соколова – Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6501.2010.2).

Список литературы

- [1] С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 93–94.
- [2] F. Magri, *J. Math. Phys.*, **19:5** (1978), 1156–1162.
- [3] F. Magri, P. Casati, G. Falqui, M. Pedroni, “Eight lectures on Integrable Systems”, *Integrability of Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Physics, **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, Springer, Heidelberg, 1997, 256–296.
- [4] I. M. Gelfand, I. Zakharevich, *Selecta Math. (N.S.)*, **6:2** (2000), 131–183.
- [5] A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, *Comm. Math. Phys.*, **211:1** (2000), 231–251.
- [6] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Phys. Lett. A*, **130:8–9** (1988), 456–460.
- [7] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, *J. Phys. A*, **39:40** (2006), 12447–12456.
- [8] A. Pichereau, G. Van de Weyer, *J. Algebra*, **319:5** (2008), 2166–2208.
- [9] M. Aguiar, *J. Algebra*, **244:2** (2001), 492–532.
- [10] T. Schedler, *Math. Res. Lett.*, **10:2–3** (2003), 301–321.
- [11] А. Р. Элашвили, *Функц. анализ и его прил.*, **16:4** (1982), 94–95.
- [12] M. Kontsevich, “Formal (non)commutative symplectic geometry”, *The Gelfand Mathematical Seminars*, 1990–1992, eds. L. Corwin, I. Gelfand, J. Lepowsky, Birkhäuser, Boston, MA, 1993, 173–187.

Поступила в редакцию 7.05.2011