Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Пополютов, Ш. Р. Шакиров, Резольвенты и представление Зайберга–Виттена для гауссова β -ансамбля, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 96–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:31:25

© 2012 г.

А. Д. Миронов^{*†}, А. Ю. Морозов[†],
А. В. Пополитов[†], Ш. Р. Шакиров^{†‡}

РЕЗОЛЬВЕНТЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАЙБЕРГА–ВИТТЕНА ДЛЯ ГАУССОВА β -АНСАМБЛЯ

Точная свободная энергия матричной модели всегда удовлетворяет уравнениям Зайберга–Виттена на комплексной кривой, определяемой сингулярностями классической резольвенты. Роль дифференциала Зайберга–Виттена в этом случае играет точная одноточечная резольвента. Показано, что эти свойства сохраняются при обобщении матричных моделей до β -ансамблей. Однако, поскольку интегрируемость и топологическая рекурсия Харера–Цагира все еще недоступны для β -ансамблей, приходится полагаться на обыкновенную рекурсию Александра–Миронова–Морозова/Эйнари–Орантэна при вычислении первых членов разложения по родам. Рассмотрение ограничено гауссовой моделью.

Ключевые слова: матричные модели, β -ансамбли, интегрируемость, теория Зайберга–Виттена.

1. ВВЕДЕНИЕ

Препотенциалы Зайберга–Виттена (ЗВ) $\mathcal{F}(\vec{a})$ [1]–[4] определяются из характерного набора неявных уравнений:

$$\vec{a} = \oint_{\vec{A}} \Omega, \quad \frac{\partial \mathcal{F}(\vec{a})}{\partial \vec{a}} = \oint_{\vec{B}} \Omega, \quad (1)$$

где Ω – аналитическая форма типа $(m, 0)$ (голоморфная, мероморфная или даже имеющая существенные сингулярности) на семействе $2m$ -мерных комплексных многообразий, на которых задана система канонически сопряженных циклов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Когда система (1) разрешима (ее разрешимость обеспечивается, например, условиями Римана), величины $\vec{a}$ называются плоскими координатами на пространстве модулей

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mironov@lpi.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mironov@itep.ru, morozov@itep.ru, popolit@itep.ru

[‡]Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA, USA.
E-mail: shakirov@itep.ru

(или просто плоскими модулями), а $\mathcal{F}(\vec{a})$ становится “квазиклассической” или уизе-мовской τ -функцией на этом пространстве, удовлетворяющей набору (обобщенных) уравнений Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (обычно вследствие справедливости формулы вычетов) [5]. К настоящему моменту это классическая область науки, которая подробно представлена в многочисленных статьях.

Недавно стало понятно, что, несмотря на “квазиклассическую” природу уравнений ЗВ, они прекрасно выдерживают различные процедуры квантования. Концептуальное значение этого явления все еще остается загадочным, но сам факт устанавливается все более и более достоверно. Последним примером может служить представление Бора–Зоммерфельда [6], [7] для свободной энергии Лосева–Мура–Некрасова–Шаташвили (ЛМНШ) [8] в пределе Некрасова–Шаташвили [9] $\epsilon_2 = 0$; если также положить $\epsilon_1 = 0$, то получившаяся свободная энергия – это в точности обыкновенный препотенциал ЗВ [1], [3], но удивительно то, что уравнения (1) остаются справедливы, по крайней мере, при включении первого “параметра квантования” ϵ_1 . В работах [10], [11] делается утверждение, что уравнения ЗВ на самом деле сохраняются и при дальнейшей деформации, когда оба параметра ϵ_1 и ϵ_2 не равны нулю. Идея этого предложения приходит из соотношений Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) [12]–[14], которые описывают матрично-модельное представление статистической суммы ЛМНШ [15], [10]. В ходе рассуждения используется следующий фундаментальный факт: точная свободная энергия матричной модели допускает представление ЗВ, причем роль дифференциала ЗВ играет одноточечная резольвента

$$\Omega^{\text{MM}}(z) = \rho_1(z) = \left\langle \text{Tr} \frac{dz}{z - M} \right\rangle_{\text{MM}}, \quad (2)$$

которая представляет собой мероморфный дифференциал на спектральной кривой Σ^{MM} . И снова справедливость представления ЗВ легко проверить для планарной свободной энергии (для которой оно обсуждалось еще в работах [16], [17]), но оно, как оказывается, сохраняется и тогда, когда мы включаем в рассмотрение все поправки высших родов по константе связи g_s (т.е. по константе связи 'т Хофта $\Lambda = gN$). Этот факт все еще мало известен и недооценен. Он вскользь упоминается в работах [18] и [19], однако его истинное значение видно из того, как он используется в концептуальном доказательстве соотношений АГТ, в котором процедура топологической рекурсии [18], [20] используется для того, чтобы построить двойную деформацию препотенциала ЗВ, где $g_s = \sqrt{-\epsilon_1 \epsilon_2} \neq 0$ и $\beta = b^2 = -\epsilon_1 / \epsilon_2 \neq 1$.

Цель настоящей работы – привести больше иллюстраций к представлению ЗВ для точных свободных энергий матричных моделей и сделать эту чрезвычайно важную технику более ясной и удобной в использовании. Статья посвящена этому вопросу, мы намеренно избегаем обсуждения других сюжетов. Первая иллюстрация подобного рода уже была приведена в приложении в статье [11], мы воспроизводим вывод этой работы здесь и обобщаем на случай $\beta \neq 1$. Мы не рассматриваем здесь негауссовы модели, так как это требует проведения довольно громоздких вычислений, но мы обратимся к этому вопросу в последующих работах. Конечно, в соотношениях АГТ используется существенно негауссовский β -ансамбль – интеграл Доценко–Фатеева по открытым контурам в духе работ [10], [21], который мы не рассматриваем в настоящей работе. Однако, вне всякого сомнения, представление ЗВ существует и для него, а также для произвольных β и во всех порядках разложения по родам.

2. СЛУЧАЙ $\beta = 1$: ИСТОЧНИК ВОПРОСОВ И ГРАМОТНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

Статсумма определяется как

$$Z(N) = \frac{1}{N!} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{2\beta} \exp \left[-\frac{1}{2g} \sum_i \lambda_i^2 \right]. \quad (3)$$

Для $\beta = 1$ она равна

$$Z(N) = (\sqrt{2\pi})^N \sqrt{g}^{N^2} \prod_{k=1}^{N-1} k!. \quad (4)$$

Следовательно, для свободной энергии $F = \ln Z$ имеем (с точностью до квадратичных и линейных по N членов)

$$F(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(k!). \quad (5)$$

Оказывается [22], что $Z(N)$ – τ -функция цепочки Тоды, а $F(N)$ обладает представлением ЗВ (1).

Именно, пусть $\rho_1(z)$ – одноточечная резольвента модели

$$\rho_1(z) = \left\langle \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle. \quad (6)$$

Тогда система уравнений ЗВ в частных производных

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_A \rho_1(z) dz = a, \quad -\oint_B \rho_1(z) dz = \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a} \quad (7)$$

определяет препотенциал ЗВ, который, как можно проверить, используя явные выражения для резольвенты из [11], равен свободной энергии

$$\mathcal{F}_{\text{SW}}(N) = F(N), \quad (8)$$

так что это равенство как раз дает представление ЗВ для свободной энергии матричной модели.

Другим заслуживающим внимания фактом является то, что одноточечная резольвента удовлетворяет разностному уравнению [23], [24]

$$\rho_1(N+1, z) + \rho_1(N-1, z) - 2\rho_1(N, z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho_1(N, z), \quad (9)$$

которое означает, что ее В-периоды удовлетворяют уравнению [11]

$$\Pi_B(N+1) + \Pi_B(N-1) - 2\Pi_B(N) = -\frac{1}{N}. \quad (10)$$

Уравнение (9) тесно связано с интегрируемостью $Z(N)$, т.е. с уравнением для цепочки Тоды [22]

$$Z(N) \partial_1^2 Z(N) - \partial_1 Z(N) \partial_1 Z(N) = Z(N+1) Z(N-1), \quad (11)$$

где $\partial_1 Z(N) = \langle \sum_i \lambda_i \rangle$ и $\partial_1^2 Z(N) = \langle (\sum_i \lambda_i)^2 \rangle$.

Уравнение (10) есть более слабое следствие уравнения (9).

Зная описанные выше факты, естественно задать следующие вопросы.

1. Справедливо ли соотношение (8) также в случае $\beta \neq 1$?
2. Существует ли некоторая β -деформированная версия уравнений (9) и (10)?

Работа посвящена утвердительному ответу на первый вопрос. Частичный прогресс в ответе на второй вопрос освещен в приложении.

3. РЕЗОЛЬВЕНТЫ

3.1. Тожества Уорда: общие сведения. Мощная техника вычисления корреляторов в матричных моделях известна под разными именами: условия Вирасоро, петлевые уравнения, тождества Уорда [25], [18]. Она основана на “общей ковариантности” статистической суммы, т.е. инвариантности интеграла по отношению к произвольным заменам переменных интегрирования. Для интеграла по собственным значениям, не обязательно гауссова, условия Вирасоро могут быть выведены следующим образом [26]. Рассмотрим очевидное тождество

$$\sum_k \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left(\lambda_k^n \Delta^{2\beta} \exp \left[-\frac{1}{g} \sum_i V(\lambda_i) \right] S_{i_1} \dots S_{i_m} \right) = 0, \quad (12)$$

где $S_i = \sum_a \lambda_a^i$, а Δ – модуль определителя Вандермонда. Здесь $V(\lambda) = \sum_k T_k \lambda^k$, в гауссовом случае только $T_2 = 1/2$ отлично от нуля.

Легко проверить, что

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\lambda_k^n \Delta^{2\beta}) = \left(\beta \sum_{a=0}^{n-1} S_a S_{n-1-a} + (1-\beta)n S_{n-1} \right) \Delta^{2\beta}, \quad (13)$$

и это единственная часть уравнения, которая меняется при изменении β . Дифференцирование члена с потенциалом дает

$$\sum_k \lambda_k^n \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[\exp \left(-\frac{1}{g} \sum_i V(\lambda_i) \right) \right] = \left(-\frac{1}{g} \sum_a V'(\lambda_a) \lambda_a^n \right) \exp \left[-\frac{1}{g} \sum_i V(\lambda_i) \right], \quad (14)$$

и это единственная часть, которая зависит от выбора модели. Дифференцирование оставшихся членов дает

$$\sum_k \lambda_k^n \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (S_{i_1} \dots S_{i_m}) = \sum_{j=1}^m i_j S_{i_1} \dots S_{i_j+n-1} \dots S_{i_m}. \quad (15)$$

Теперь, имея все составные части уравнений, можно записать их в различных формах.

Условия Вирасоро. Если обозначить несвязный коррелятор как

$$C_{i_0, \dots, i_m} = \langle S_{i_0} \dots S_{i_m} \rangle, \quad (16)$$

рассмотрение, проведенное выше, означает, что

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{a=0}^{n-1} C_{a, n-1-a, i_1, \dots, i_m} + (1-\beta)n C_{n-1, i_1, \dots, i_m} - \\ & - \frac{1}{g} \sum_k k T_k C_{n-1+k, i_1, \dots, i_m} + \sum_{j=1}^m i_j C_{i_1, \dots, i_j+n-1, \dots, i_m} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Дифференциальные ($\widetilde{W}$) операторы. Если работать со статистической суммой общего вида (в которой бесконечно много коэффициентов потенциала, не равных нулю и произвольных), то можно записать эти уравнения как дифференциальные уравнения на (полную) статистическую сумму. Именно, пусть потенциал имеет вид

$$V(\lambda) = (T_0 + t_0)N + \sum_{k=1}^{\infty} (T_k + t_k)\lambda^n, \quad (18)$$

где T_k – фоновые значения полей источников (обычно только конечное их число отлично от нуля), а t_k – возмущения этих фоновых значений. Статсумму тогда можно рассматривать как формальный ряд по t_k . Заметим, что для ненормированного среднего можно получить

$$\langle S_a \rangle = -g \frac{\partial}{\partial t_a} \langle 1 \rangle, \quad (19)$$

и, следовательно, условия Вирасоро (17) можно записать как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial t_{i_m}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(T_k + t_k) \frac{\partial}{\partial t_{k-1+n}} + \right. \\ & \left. + g(1 - \beta)n \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} + g^2 \beta \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_{n-1-a}} \right) Z = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Петлевые уравнения. Уравнения возникают, если просуммировать все условия Вирасоро с коэффициентами $1/z^{n+1}$ и записать получившиеся уравнения в терминах резольвент. Для этой цели удобно переписать вандермондову часть тождества в виде

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\lambda_k^n \Delta^{2\beta}) = \left(2\beta \sum_{i < j} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_a n \lambda_a^{n-1} \right) \Delta^{2\beta}. \quad (21)$$

Теперь, суммируя все вклады, получаем

$$\begin{aligned} & \beta r(z_0, z_0, z_1, \dots, z_m) + (\beta - 1) \frac{\partial}{\partial z_0} r(z_0, z_1, \dots, z_m) + \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{r(z_1, \dots, z_m) - r(z_1, \dots, z_0, \dots, z_m)}{z_m - z_0} - \\ & - \frac{1}{g} \sum_{k=0}^{\infty} k T_k z_0^{k-1} r(z_0, z_1, \dots, z_m) + \\ & + \frac{1}{g} \sum_{k=0}^{\infty} k T_k \sum_{j=0}^{k-2} z_0^j \frac{1}{2\pi i} \oint_{\infty} dz z^{k-2-j} r(z, z_1, \dots, z_m) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $r(z_0, \dots, z_m)$ означает несвязную резольвенту:

$$r(z_0, \dots, z_m) = \left\langle \sum_{i_0} \frac{1}{z_0 - \lambda_{i_0}} \cdots \sum_{i_m} \frac{1}{z_m - \lambda_{i_m}} \right\rangle. \quad (23)$$

Для того чтобы решать эти уравнения по теории возмущений по g , надо переписать несвязные резольвенты через связанные. После этого итеративная процедура становится хорошо определенной: на каждом шаге получается система линейных уравнений для $\rho_{i,j}$ с фиксированным значением $i+j$. Разложение по степеням k константы g , как обычно, считает вклады римановых поверхностей рода $k/2$ в струнном (или топологическом) разложении. Здесь $\rho_{i,j}$ обозначает вклад рода $j/2$ в i -точечную связную резольвенту.

3.2. Предварительные сведения: конкретные корреляторы. Тождества Уорда в форме условий Вирасоро очень полезны при вычислении конкретных корреляторов $C_{i_1, \dots, i_m}$. Преимущество этого метода в том, что ответы точны по g , а также в том, что можно не переписывать несвязные корреляторы через связанные для того, чтобы итеративная процедура работала (это кардинально упрощает работу, если использовать символьные вычисления на компьютере).

Чтобы дать представление о том, как выглядят конкретные корреляторы, мы приводим несколько первых одно- и двухточечных корреляторов (заметим, что K обозначает *связные* корреляторы и $\Lambda \equiv Ng$):

$$\begin{aligned} K_k &= C_k = \left\langle \sum_i \lambda_i^k \right\rangle = \left\langle \left\langle \sum_i \lambda_i^k \right\rangle \right\rangle, \\ K_0 &= \Lambda, \quad K_2 = \Lambda(\beta\Lambda - \beta + 1), \\ K_4 &= \Lambda(2\beta^2\Lambda^2 - 5\beta^2\Lambda + 3\beta^2 + 5\beta\Lambda - 5\beta + 3), \\ K_6 &= 5\beta^3\Lambda^4 + (22\beta^2 - 22\beta^3)\Lambda^3 + (32\beta^3 - 54\beta^2 + 32\beta)\Lambda^2 + \\ &\quad + (-15\beta^3 + 32\beta^2 - 32\beta + 15)\Lambda, \\ K_8 &= 14\beta^4\Lambda^5 + (93\beta^3 - 93\beta^4)\Lambda^4 + (234\beta^4 - 398\beta^3 + 234\beta^2)\Lambda^3 + \\ &\quad + (-260\beta^4 + 565\beta^3 - 565\beta^2 + 260\beta)\Lambda^2 + \\ &\quad + (105\beta^4 - 260\beta^3 + 331\beta^2 - 260\beta + 105)\Lambda, \quad \dots \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} K_{k,j} &= C_{k,j} - C_k C_j = \left\langle \left\langle \sum_i \sum_l \lambda_i^k \lambda_l^j \right\rangle \right\rangle, \\ K_{1,1} &= \Lambda, \\ K_{1,3} &= 3\Lambda(\beta(\Lambda - 1) + 1), \quad K_{2,2} = 2\Lambda(\beta(\Lambda - 1) + 1), \\ K_{1,5} &= 10\beta^2\Lambda^3 + 5(5\beta - 5\beta^2)\Lambda^2 + 5(3\beta^2 - 5\beta + 3)\Lambda, \\ K_{2,4} &= 4\Lambda(\beta(\Lambda - 1)(\beta(2\Lambda - 3) + 5) + 3), \\ K_{3,3} &= 3\Lambda(\beta(\Lambda - 1)(\beta(4\Lambda - 5) + 9) + 5), \quad \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Будучи выраженными через навешанные конформной теорией поля переменные $M = b\Lambda$ и $Q = b - 1/b$, $b = \sqrt{\beta}$, они имеют вид

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{M}{b}, \quad K_2 = M(M - Q), \quad K_4 = Mb(1 + 2M^2 - 5MQ + 3Q^2), \\ K_6 &= Mb^2(5M(2 + M^2) - (13 + 22M^2)Q + 32MQ^2 - 15Q^3), \\ K_8 &= Mb^3(21 + 14M^4 - 93M^3Q + 160Q^2 + 105Q^4 - \\ &\quad - 5MQ(43 + 52Q^2) + M^2(70 + 234Q^2)), \quad \dots \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned}
K_{1,1} &= \frac{M}{b}, & K_{1,3} &= 3M(M - Q), & K_{2,2} &= 2M(M - Q), \\
K_{1,5} &= 5Mb(1 + 2M^2 - 5MQ + 3Q^2), \\
K_{2,4} &= 4Mb(1 + 2M^2 - 5MQ + 3Q^2), \\
K_{3,3} &= 3Mb(1 + 4M^2 - 9MQ + 5Q^2), & \dots
\end{aligned} \tag{27}$$

Отметим значительное упрощение в сравнении с (24) и (25).

3.3. Ответ для резольвенты при $\beta = 1$. Для полноты картины (и отчасти, чтобы показать, насколько все сложнее в случае $\beta \neq 1$) мы начинаем с хорошо известной одноточечной резольвенты при $\beta = 1$ [18]:

$$\rho_1 = \left\langle \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{1,k} g^k. \tag{28}$$

Вклады отдельных родов равны

$$\rho_{1,0}(z) = \frac{1}{2}(z - y(z)), \quad \rho_{1,2}(z) = \frac{\Lambda}{y^5(z)}, \tag{29}$$

$$\rho_{1,4}(z) = \frac{21\Lambda(\Lambda + z^2)}{y^{11}(z)}, \quad \rho_{1,6}(z) = \frac{11\Lambda(158\Lambda^2 + 558\Lambda z^2 + 135z^4)}{y^{17}(z)}, \quad \dots, \tag{30}$$

где $y^2(z) = z^2 - 4\Lambda$ и все $\rho_{1,2k+1}$ равны нулю. Общие формулы для $\rho_{1,2n}$ могут быть получены с помощью интегральных преобразований из точных функций Харера–Цагира (см. [23], [18], [24]).

3.4. Решение для ρ_1 при общем $\beta \neq 1$. Петлевые уравнения (22) в случае гауссовой модели принимают очень простой вид:

$$\begin{aligned}
&\beta r(z_0, z_0, z_1, \dots, z_m) + (\beta - 1) \frac{\partial}{\partial z_0} r(z_0, z_1, \dots, z_m) + \\
&+ \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{r(z_1, \dots, z_j, \dots, z_m) - r(z_1, \dots, z_0, \dots, z_m)}{z_j - z_0} - \\
&- \frac{1}{g} z_0 r(z_0, z_1, \dots, z_m) + \frac{\Lambda}{g^2} r(z_1, \dots, z_m) = 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

где r обозначает несвязную резольвенту

$$r(z_1, \dots, z_m) = \left\langle \sum_{i_1} \frac{1}{z_1 - \lambda_{i_1}} \cdots \sum_{i_m} \frac{1}{z_m - \lambda_{i_m}} \right\rangle. \tag{32}$$

Для того чтобы решить эту систему уравнений, надо переписать несвязные резольвенты через связанные и заменить затем связанные резольвенты их разложениями в ряд Лорана [27].

Итак, полагая, что $\rho_1(z) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{1,i}(z) \cdot g^i$ (так что четные части ρ относятся к ориентируемым поверхностям, а нечетные части – к неориентируемым, с полуцелыми родами), получаем для первых нескольких членов

$$\begin{aligned}
 \rho_{1,0}(z) &= \frac{z}{2\beta} - \frac{y(z)}{2\beta} = \frac{1}{2\beta}(z - y(z)), \\
 \rho_{1,1}(z) &= \frac{1/2 - 1/(2\beta)}{y(z)} + \frac{z/(2\beta) - z/2}{y^2(z)} = \frac{\beta - 1}{2\beta y(z)} \left(1 - \frac{z}{y(z)}\right), \\
 \rho_{1,2}(z) &= \frac{5\beta^2\Lambda - 9\beta\Lambda + 5\Lambda}{y^5(z)} + \frac{\beta + 1/\beta - 2}{y^3(z)} + \frac{-\beta z - z/\beta + 2z}{y^4(z)}, \\
 \rho_{1,3}(z) &= (\beta - 1) \left(\frac{10 - 19\beta + 10\beta^2}{2\beta y^5(z)} \left(1 - \frac{z}{y(z)}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5\Lambda(5 - 9\beta + 5\beta^2)}{y^7(z)} - \frac{\Lambda z(30 - 43\beta + 30\beta^2)}{y^8(z)} \right), \\
 \rho_{1,4}(z) &= \frac{1}{y^7(z)} \left[37\beta^3 - \frac{273\beta^2}{2} + 199\beta + \frac{37}{\beta} - \frac{273}{2} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{y^8(z)} \left[-37\beta^3 z + \frac{273\beta^2 z}{2} - 199\beta z - \frac{37z}{\beta} + \frac{273z}{2} \right] + \\
 &\quad + \frac{419\beta^4\Lambda - 1357\beta^3\Lambda + 1897\beta^2\Lambda - 1357\beta\Lambda + 419\Lambda}{y^9(z)} + \\
 &\quad + \frac{-240\beta^4\Lambda z + 824\beta^3\Lambda z - 1168\beta^2\Lambda z + 824\beta\Lambda z - 240\Lambda z}{y^{10}(z)} + \\
 &\quad + \frac{1105\beta^5\Lambda^2 - 3240\beta^4\Lambda^2 + 4375\beta^3\Lambda^2 - 3240\beta^2\Lambda^2 + 1105\beta\Lambda^2}{y^{11}(z)}, \\
 \rho_{1,5}(z) &= (\beta - 1) \left[\frac{706 - 2379\beta + 3367\beta^2 - 2379\beta^3 + 706\beta^4}{2\beta y^9(z)(1 - z/y(z))} + \right. \\
 &\quad + \frac{4351 - 13458\beta + 18508\beta^2 - 13458\beta^3 + 4351\beta^4}{y^{11}(z)} - \\
 &\quad - \frac{3\Lambda z(1530 - 4241\beta + 5764\beta^2 - 4241\beta^3 + 1530\beta^4)}{y^{12}(z)} + \\
 &\quad + \frac{55\beta\Lambda^2(221 - 648\beta + 875\beta^2 - 648\beta^3 + 221\beta^4)}{y^{13}(z)} - \\
 &\quad \left. - \frac{4\beta\Lambda^2 z(3390 - 7883\beta + 10420\beta^2 - 7883\beta^3 + 3390\beta^4)}{y^{14}(z)} \right], \\
 \rho_{1,6}(z) &= \frac{1}{y^{11}(z)} \left[4081\beta^5 - \frac{40405\beta^4}{2} + 44699\beta^3 - 57155\beta^2 + 44699\beta + \frac{4081}{\beta} - \frac{40405}{2} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{y^{12}(z)} \left[-4081\beta^5 z + \frac{40405\beta^4 z}{2} - 44699\beta^3 z + 57155\beta^2 z - 44699\beta z - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4081z}{\beta} + \frac{40405z}{2} \right] + \frac{1}{y^{13}(z)} [77597\beta^6\Lambda - 340402\beta^5\Lambda + 702694\beta^4\Lambda -
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& - 878293\beta^3\Lambda + 702694\beta^2\Lambda - 340402\beta\Lambda + 77597\Lambda] + \\
& + \frac{1}{y^{14}(z)} [-59040\beta^6\Lambda z + 269328\beta^5\Lambda z - 564000\beta^4\Lambda z + 707424\beta^3\Lambda z - \\
& - 564000\beta^2\Lambda z + 269328\beta\Lambda z - 59040\Lambda z] + \frac{1}{y^{15}(z)} [451720\beta^7\Lambda^2 - \\
& - 1792898\beta^6\Lambda^2 + 3483419\beta^5\Lambda^2 - 4266464\beta^4\Lambda^2 + 3483419\beta^3\Lambda^2 - \\
& - 1792898\beta^2\Lambda^2 + 451720\beta\Lambda^2] + \frac{1}{y^{16}(z)} [-189840\beta^7\Lambda^2 z + 821128\beta^6\Lambda^2 z - \\
& - 1656256\beta^5\Lambda^2 z + 2049936\beta^4\Lambda^2 z - 1656256\beta^3\Lambda^2 z + 821128\beta^2\Lambda^2 z - \\
& - 189840\beta\Lambda^2 z] + \frac{1}{y^{17}(z)} [828250\beta^8\Lambda^3 - 3012930\beta^7\Lambda^3 + 5531740\beta^6\Lambda^3 - \\
& - 6644070\beta^5\Lambda^3 + 5531740\beta^4\Lambda^3 - 3012930\beta^3\Lambda^3 + 828250\beta^2\Lambda^3],
\end{aligned}$$

где $y^2(z) = z^2 - 4\Lambda\beta$ определяет спектральную кривую, которая в данном случае является тором с одной вырожденной ручкой (расположенной на бесконечности комплексной плоскости).

Симметрия $\beta \rightarrow 1/\beta$. Соотношение АГТ приводит к тому, что β -деформированная матричная модель должна быть связана с некоторой конформной теорией поля, причем центральный заряд соответствующей конформной теории поля равен

$$c = 1 - 6 \left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^2. \quad (34)$$

Это указывает на то, что в матричной модели должна присутствовать симметрия $\beta \rightarrow 1/\beta$, хотя это далеко не очевидно в исходном выражении (3). Действительно, нетрудно видеть, что если перемасштабировать величины следующим образом:

$$z' = \sqrt{\beta}z, \quad \rho'_{1,g} = (\sqrt{\beta})^{g+1}\rho_{1,g}, \quad (35)$$

получившиеся выражения для $\rho'_{1,g}$ симметричны относительно замены $\beta \rightarrow 1/\beta$.

4. КОНСТРУКЦИЯ ЗАЙБЕРГА–ВИТТЕНА

4.1. Идеология. Конструкция ЗВ, исходно предложенная для того, чтобы получить низкоэнергетическое эффективное действие для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории, на самом деле является проявлением более общего принципа.

Объекты, с которых начинается рассмотрение в теории ЗВ, – это алгебраическая кривая и мероморфный дифференциал λ_{SW} на ней. Располагая такими данными, можно записать следующую систему уравнений:

$$\oint_{A_i} \lambda_{\text{SW}} \sim a_i, \quad \oint_{B_i} \lambda_{\text{SW}} \sim \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i}, \quad (36)$$

где A_i и B_i образуют симплектический базис циклов на алгебраической кривой и коэффициенты пропорциональности в уравнениях зависят от принятых соглашений.

Оказывается, что важным источником исходных данных ЗВ являются так называемые собственнзначные модели (СЗМ). А именно, роль алгебраической кривой

играет спектральная кривая СЗМ, а роль дифференциала ЗВ $-\rho_1(z) dz$, где ρ_1 – одноточечная резольвента. Заметим, что исходная конструкция ЗВ отвечает нулевому порядку в разложении по родам резольвенты, и включение в рассмотрение дальнейших членов разложения отвечает деформации (квантованию) исходных дифференциала ЗВ и препотенциала. Удивительно, но не только ее нулевое приближение, но и вся свободная энергия продолжает удовлетворять уравнениям ЗВ.

Мы фиксируем коэффициенты пропорциональности в уравнениях ЗВ следующим образом:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} \rho_1(z) dz = a_i, \quad -\beta \oint_{B_i} \rho_1(z) dz = \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{SW}}}{\partial a_i}, \quad (37)$$

так как связь между свободной энергией и препотенциалом в такой нормировке наиболее наглядна. Заметим, что величина β появилась в качестве коэффициента во втором уравнении [7].

4.2. Вычисление А- и В-периодов. Теперь применим конструкцию ЗВ к величинам ρ_1 , которые мы нашли в п. 3.4.

Спектральная кривая задается уравнением

$$y^2 = z^2 - 4\Lambda\beta. \quad (38)$$

А-цикл проходит вокруг точек ветвления $-\sqrt{4\Lambda\beta}$ и $\sqrt{4\Lambda\beta}$, а В-цикл – вокруг точек $\sqrt{4\Lambda\beta}$ и ∞ .

Поскольку в этом случае значение А-периода равно вычету резольвенты на бесконечности, вклад в А-период дают только $\rho_{1,0}$ и $\rho_{1,1}$:

$$a = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-\sqrt{4\Lambda\beta}}^{\sqrt{4\Lambda\beta}} \rho(z) dz = N + \frac{1-\beta}{2\beta}. \quad (39)$$

Заметим здесь, что зависимость $a(N)$ линейная и можно смело заменять $\partial/\partial a$ на $\partial/\partial N$ в уравнениях ЗВ для В-периодов и в дальнейшем все писать в терминах N , чтобы упростить вычисления.

Вычисление В-периодов более хитрое, необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$\oint_{\sqrt{4\Lambda\beta}}^{+\infty} \frac{dz}{y^p(z)} = \frac{1}{2^{2p-3}(\Lambda\beta)^{(p-1)/2}} \frac{\Gamma(p-1)\Gamma(1-p/2)}{\Gamma(p/2)}. \quad (40)$$

Чтобы вывести эту формулу, надо сделать замену переменных $z = ((2-\zeta)/\zeta)\sqrt{4\Lambda\beta}$ и заметить, что получающийся в результате интеграл пропорционален интегральному представлению В-функции Эйлера:

$$\begin{aligned} \oint_{\sqrt{4\beta\Lambda}}^{+\infty} (z^2 - 4\beta\Lambda)^{-p/2} dz &= (4\beta\Lambda)^{-p/2+1/2} \oint_1^{+\infty} (w^2 - 1)^{-p/2} dw = \\ &= (4\beta\Lambda)^{-p/2+1/2} 4^{-p/2} 2 \oint_0^1 (1-\zeta)^{-p/2} \zeta^{p-2} d\zeta = \\ &= 2^{-2p+3} (\beta\Lambda)^{-p/2+1/2} \frac{\Gamma(1-p/2)\Gamma(p-1)}{\Gamma(p/2)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Члены с нечетными степенями z в (33) не дают вклада в периоды, так как являются полными производными, например

$$\oint_{\sqrt{4\Lambda\beta}}^{+\infty} \frac{z dz}{y^p(z)} = -\frac{1}{p-2} \oint_{\sqrt{4\Lambda\beta}}^{+\infty} d\left(\frac{1}{y^{p-2}(z)}\right) = 0. \quad (42)$$

Заметим, что интеграл контурный и контур не проходит через сингулярности подынтегрального выражения.

Иначе можно вычислить В-периоды, используя тот факт, что функция $y(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} y^p = -2\beta p y^{p-2}, \quad (43)$$

как и ее В-периоды. Вместе с начальными условиями

$$\oint_{\text{В}} \frac{dz}{y(z)} = -\ln \beta \Lambda \quad (44)$$

и

$$\oint_{\text{В}} y^p dz = 0|_{\Lambda=0}, \quad p \neq -1, \quad (45)$$

это дает выражения для интегралов по В-периодам от нечетных степеней $y(z)$, приведенные в табл. 1 (интегралы от четных степеней равны нулю).

ТАБЛИЦА 1

n	$\oint_{\text{В}} y^n dz$	$\oint_{\text{В}} y^{-n} dz$
1	$-2\beta(\Lambda - \Lambda \ln(\beta\Lambda))$	$-\ln(\beta\Lambda)$
3	$-6\beta\left(\beta\Lambda^2 \ln(\beta\Lambda) - \frac{3\beta\Lambda^2}{2}\right)$	$-\frac{1}{2\beta\Lambda}$
5	$-10\beta\left(\frac{11\beta^2\Lambda^3}{3} - 2\beta^2\Lambda^3 \ln(\beta\Lambda)\right)$	$\frac{1}{12\beta^2\Lambda^2}$
7	$-14\beta\left(5\beta^3\Lambda^4 \ln(\beta\Lambda) - \frac{125\beta^3\Lambda^4}{12}\right)$	$-\frac{1}{60\beta^3\Lambda^3}$
9	$-18\beta\left(\frac{959\beta^4\Lambda^5}{30} - 14\beta^4\Lambda^5 \ln(\beta\Lambda)\right)$	$\frac{1}{280\beta^4\Lambda^4}$
11	$-22\beta\left(42\beta^5\Lambda^6 \ln(\beta\Lambda) - \frac{1029\beta^5\Lambda^6}{10}\right)$	$-\frac{1}{1260\beta^5\Lambda^5}$
13	$-26\beta\left(\frac{11979\beta^6\Lambda^7}{35} - 132\beta^6\Lambda^7 \ln(\beta\Lambda)\right)$	$\frac{1}{5544\beta^6\Lambda^6}$

Итак, для В-периодов $\rho_{1,i}$ получаем (в случае $\rho_{1,0}$ и $\rho_{1,1}$ надо вычислять интегралы при $p = -1 + \epsilon$ и $1 + \epsilon$ соответственно, а затем отбрасывать члены, которые

расходятся при $\epsilon \rightarrow 0$; поскольку эти члены постоянные и линейные по Λ , это не влияет на ответ)

$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,0}(z) dz &= -\Lambda \ln \Lambda, & \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,1}(z) dz &= \frac{1-\beta}{2\beta} \ln \Lambda, \\
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,2}(z) dz &= \frac{-1+3\beta-\beta^2}{12\beta^2\Lambda}, & \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,3}(z) dz &= \frac{1-\beta}{24\beta^2\Lambda^2}, \\
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,4}(z) dz &= \frac{1-5\beta^2+\beta^4}{360\beta^4\Lambda^3}, & \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,5}(z) dz &= \frac{-1+\beta^3}{240\beta^4\Lambda^4}, \\
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,6}(z) dz &= \frac{-2+7\beta^2+7\beta^4-2\beta^6}{2520\beta^6\Lambda^5}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Примечательно, что хотя сложность $\rho_{1,i}$ растет очень быстро (экспоненциально) с ростом i , сложность выражений для их В-периодов растет не так быстро (линейно).

Уже на этом этапе можно видеть, что эти формулы согласуются с формулами для общих членов из работы [27]

$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,2m+2} dz &= \sum_{s=0}^{m+1} B_{2m-2s} B_{2s} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2s+1)\Gamma(2m-2s+3)} \beta^{-2s} \frac{1}{N^{2m+1}}, \quad m \geq 0, \\
 \oint_{\mathbb{B}} \rho_{1,2m+1} dz &= \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\beta^{2m}} \right) \frac{B_{2m+2}(2m-1)}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{N^{2m}}, \quad m \geq 1.
 \end{aligned} \tag{47}$$

В [27] эти формулы были получены из формулы (51), которую в настоящей работе мы проверяем.

4.3. Связь препотенциала со свободной энергией. Статсумма для β -деформированного гауссова интеграла по собственным значениям определена как

$$Z(N) = \frac{1}{N!} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{2\beta} \exp\left(-\frac{1}{2g} \sum_i \lambda_i^2\right) \tag{48}$$

и может быть вычислена явно. Соответствующее обобщение выражения (4) на случай $\beta \neq 1$ имеет вид (см. [27])

$$Z(N) = (\sqrt{2\pi})^N (\sqrt{g})^{\beta N^2 + (1-\beta)N} \prod_{k=1}^N \frac{\Gamma(1+\beta k)}{\Gamma(1+\beta)} \cdot \frac{1}{\Gamma(N+1)}. \tag{49}$$

Теперь мы можем проверить, что свободная энергия

$$F(N) = \ln Z \sim \sum_{k=1}^N \ln \Gamma(1+\beta k) - \ln N! \tag{50}$$

в точности равна препотенциалу ЗВ.

В самом деле, можно вычислить производную по N от $F(N)$, воспользовавшись формулой Эйлера–Маклорена (см. (72) в приложении), и получить в результате

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial N} F\left(\frac{\Lambda}{g}\right) &= \frac{1}{g} \beta \Lambda \ln \Lambda + \frac{\beta-1}{2} \ln \Lambda + g \frac{1-3\beta+\beta^2}{12\beta\Lambda} + g^2 \frac{\beta-1}{24\beta\Lambda^2} + g^3 \frac{-1+5\beta^2-\beta^4}{360\beta^3\Lambda^3} + \\
 &+ g^4 \frac{1-\beta^3}{240\beta^3\Lambda^4} + g^5 \frac{2-7\beta^2-7\beta^4+2\beta^6}{2520\beta^5\Lambda^5} + o\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right).
 \end{aligned}$$

Это выражение можно теперь сравнить с (45), принимая во внимание множитель $-\beta$ в (37).

Наконец, получаем

$$F = \mathcal{F}_{\text{SW}}. \quad (51)$$

Это и есть главный результат настоящей работы:

Точная свободная энергия гауссова β -ансамбля удовлетворяет уравнениям ЗВ (37), если точные резольвенты выступают в роли дифференциала ЗВ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

На пути к полной теории ($\beta \neq 1$)-ансамблей

Здесь мы освещаем несколько сюжетов, которые в настоящий момент являются плохо понятыми, но имеют решающее значение в построении будущей теории β -ансамблей.

А.1. Интегрируемость. При $\beta = 1$ мы видели, что свободная энергия и резольвенты удовлетворяют интегрируемым дифференциально-разностным уравнениям (9) и (10). Эти уравнения тесно связаны с интегрируемой структурой Тоды гауссовой матричной модели (в случае негауссовых моделей роль иерархии Тоды играет иерархия Кадомцева–Петвиашвили). В частности, уравнения Тоды могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln Z(N) = \frac{Z(N+1)Z(N-1)}{Z^2(N)}, \quad (52)$$

или, через свободную энергию,

$$F(N+1) - 2F(N) + F(N-1) = \ln \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} F(N) \right). \quad (53)$$

Дифференцируя по t_i и применяя условия Вирасоро, получаем

$$K_i(N+1) - 2K_i(N) + K_i(N-1) = \frac{i(i-1)}{N} K_{i-2}(N). \quad (54)$$

Суммируя эти уравнения с весами $1/z^{i+1}$, получаем уравнение (9). Уравнение (10) можно получить из (9), проинтегрировав его по В-циклу спектральной кривой.

Какова β -деформация определения интегрируемости иерархии Тоды или Кадомцева–Петвиашвили – очень важный и интригующий вопрос, но на него сложно ответить сходу. Как мы увидим, уравнение (10) может быть β -деформировано сравнительно легко, но для существования интегрируемости этого мало: надо β -деформировать (9), что пока не удалось сделать.

А.1.1. Разностное уравнение для периодов. Для $\beta = 1$ уравнение (10) выглядит как

$$\text{П}_V(\Lambda + 1) - 2\text{П}_V(\Lambda) + \text{П}_V(\Lambda - 1) = -\frac{1}{\Lambda}, \quad (55)$$

где $\text{П}_V(\Lambda)$ обозначает В-период ρ . Можно показать (например, разлагая левую часть равенства в ряд по $1/\Lambda$), что для $\beta \neq 1$ это уравнение принимает вид

$$\text{П}_V\left(\Lambda + \frac{1}{\beta}\right) - \text{П}_V(\Lambda) - \text{П}_V\left(\Lambda + \frac{1-\beta}{\beta}\right) + \text{П}_V(\Lambda - 1) = -\frac{1}{\beta\Lambda}. \quad (56)$$

А.1.2. Разностное уравнение для резольвент. Нам, тем не менее, не удалось найти β -деформированный аналог уравнения (9), даже поправки первого порядка по разности $\beta - 1$ не поддались исследованию. Можно сказать наверняка, что требуемое обобщение сильнее деформирует обе части равенства (9), нежели это происходит в (56).

А.2. Топологическая рекурсия Харера–Цагира. Подробное описание функций Харера–Цагира для $\beta = 1$ может быть найдено, например, в работах [24]. Описание корреляторов в матричной модели через обычные резольвенты имеет два преимущества: оно позволяет записать тождества Уорда (17) в простой форме петлевых уравнений (22) и оно выявляет важную скрытую структуру – спектральную кривую. Недостатками являются расходимость ряда петлевого разложения и отсутствие явных формул для точных по константе связи корреляторов.

Две последние проблемы можно разрешить, например, переходя от точных резольвент к функциям Харера–Цагира, в которых корреляторы суммируются с дополнительными факториальными множителями, т.е. методом Паде.

При $\beta \neq 1$ известно гораздо меньше. До сих пор удалось получить только функции Харера–Цагира для конкретных значений $\beta \neq 1$. Попытки найти, по крайней мере, первые поправки по $\beta - 1$ привели к некоторому обобщению гипергеометрических уравнений, что является указанием на то, что надо сделать нечто концептуально новое, для того чтобы результаты стали простыми при произвольных β . Ниже приведены наши предварительные результаты.

Одноточечная функция Харера–Цагира определена как

$$\phi(z) = \frac{4\beta}{\tau^2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} C_k\left(\frac{N}{\beta}, \beta\right) \frac{z^k}{(2k-1)!!} \left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)^N, \quad (57)$$

где $C_k(N/\beta, \beta)$ – одноточечный коррелятор в β -деформированной матричной модели с размером матрицы, равным N/β .

Случай $\beta = 1$. Функция Харера–Цагира имеет вид

$$\phi(\beta = 1, z, \tau) = \frac{1}{1 - \tau z^2}. \quad (58)$$

Это классический результат Харера и Цагира. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению, выводимому из условий интегрируемости

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} \varphi(\lambda, x) \right) = x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \varphi(\lambda, x)), \quad (59)$$

где $\varphi = ((\tau^2 - 1)/4)\phi$ и $\lambda = (\tau - 1)/(\tau + 1)$.

Оказывается, что двух- и трехточечные функции Харера–Цагира также можно найти, и они выражаются через арктангенсы [24], т.е. остаются элементарными функциями.

Случай $\beta = 2$. Функция Харера–Цагира для $SO(N)$ матричной модели имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(\beta = 2, z, \tau) = & \frac{\tau}{\tau - z - z^2 \tau} + \\ & + \frac{\sqrt{z}(\tau + 1)}{2(\tau - z - z^2 \tau)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{z}(\tau - z - 1)\sqrt{\tau - z - z^2 \tau}}{1 + (2 - 3\tau)z + (2 - 2\tau + 2\tau^2)z^2} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{2z + 2\tau^2 z + \tau}{2z} + (z - \tau + \tau^2 z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \phi(\beta = 2, z, \tau) = \frac{\tau}{2z} + \frac{2 + 2\tau + 2\tau^2 z + \tau^2}{2(2z + 1)(1 - z\tau)} \quad (61)$$

с асимптотикой $\phi(\beta = 2, z, \tau) = 1 + (\tau - 1)z + \dots$.

Случай $\beta = 1/2$. Функция Харера–Цагира для $Sp(N)$ матричной модели имеет вид

$$\phi(\beta = 1/2, z, \tau) = \frac{1}{1 - \tau z} + \sqrt{\frac{z}{1 + \tau}} \frac{1}{(1 - \tau z)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{z + \tau z} \sqrt{1 - z\tau}}{2 - z - 2\tau z} \right) \quad (62)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\left[\left(\frac{1}{z} - 3\tau - \frac{5}{2} \right) - z(1 + \tau) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{(1 + \tau)(2 - \tau z)}{z} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \phi \left(\beta = \frac{1}{2}, z, \tau \right) = \frac{1}{z} \quad (63)$$

с асимптотикой $\phi(\beta = 1/2, z, \tau) = 1 + (\tau + 1/2)z + \dots$.

Можно видеть, что в обоих случаях $\beta = 2, 1/2$, которые отвечают классическим группам, функции Харера–Цагира все еще выражаются через арктангенсы. В случае общего положения эта закономерность, тем не менее, нарушается.

Случай $\beta = 3$. Функция Харера–Цагира для $\beta = 3$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} (1 + 8z^2\tau + 24z^2\tau^2 + 9z^3\tau - z\tau - 6z - 33z^2)\phi + (11z^2\tau - 18z^3 - 2z + 9z^4\tau) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \\ + (9z - 12z^2\tau + 12z^2\tau^3 - 9z\tau^2) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 1 - 4z - 4z\tau, \end{aligned} \quad (64)$$

при конкретных значениях z оно становится гипергеометрическим уравнением и, следовательно, не имеет решений, выражаемых через элементарные функции. Так что, по-видимому, надо искать некоторую деформацию арктангенса, игравшего роль “строительного блока” в описанных выше случаях.

Мы наблюдаем, что по мере удаления от $\beta = 1$ сложность ответов возрастает. Чтобы прояснить ситуацию, требуется дальнейшая работа.

А.3. Тожества для свободной энергии. Оказывается, что для $\beta \neq 1$ в гауссовой свободной энергии содержится больше структур, чем можно было бы ожидать.

А.3.1. Определения. Определим статистическую сумму без нормировочного множителя $1/N!$. Чтобы избежать разночтений, будем обозначать все величины, вычисленные в этой нормировке, буквами с тильдой.

Статсумма гауссовой модели, которую мы рассматриваем, равна

$$\tilde{Z}(N, \beta) = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^{2\beta} \exp \left(-\frac{1}{2g} \sum_i \lambda_i^2 \right) = N! Z(N, \beta). \quad (65)$$

Вместо (49) теперь мы имеем

$$\tilde{Z}(N, \beta) = (\sqrt{2\pi})^N (\sqrt{g})^{\beta N^2 + (1-\beta)N} \prod_{k=1}^N \frac{\Gamma(1 + \beta k)}{\Gamma(1 + \beta)}. \quad (66)$$

Свободная энергия определяется теперь как

$$\tilde{F}(N, \beta) = \ln \tilde{Z} \sim \sum_{k=1}^N \ln \Gamma(1 + \beta k), \quad (67)$$

где эквивалентность означает равенство с точностью до квадратичных и линейных по размеру матрицы N членов (они могут быть убраны переопределением констант β и g).

А.3.2. Разностное уравнение. Определенная таким образом свободная энергия удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению. Рассмотрим функцию

$$\tilde{G}(N, \beta) = \tilde{F}(N, \beta) - \tilde{F}(N - 1, \beta) = \ln \Gamma(1 + \beta N), \quad (68)$$

тогда очевидно, что

$$\tilde{G}(N, \beta) - \tilde{G}\left(N - \frac{1}{\beta}, \beta\right) = \ln(\beta N), \quad (69)$$

а это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial N} \tilde{G}(N, \beta) - \frac{\partial}{\partial N} \tilde{G}\left(N - \frac{1}{\beta}, \beta\right) = \frac{1}{N}. \quad (70)$$

А.3.3. Точные соотношения между $\mathcal{F}_{SW}$ и $\tilde{F}$. Сравнение (56) и (70) дает

$$\mathcal{F}_{SW}(N, \beta) = \tilde{F}\left(N - \frac{1}{\beta}, \beta\right) = \sum_k^{N-1/\beta} \ln \Gamma(1 + \beta k), \quad (71)$$

так что единственная тонкость заключается в изменении верхнего предела суммирования. В случае $\beta = 1$ предел становится равным $N - 1$ и приобретает ясный физический смысл: деление статистической суммы на $N!$ означает, что собственные значения считаются попарно неразличимыми бозонами.

А.3.4. Прямое сравнение рядов. Можно не использовать существование уравнения (70), а обойтись более простыми средствами. Например, можно посмотреть на разложения препотенциала и свободной энергии по теории возмущений при больших N . Глядя на эти разложения, можно выдвинуть несколько гипотез о связи между этими величинами. Одной из возможностей получения этих разложений является использование формулы Эйлера–Маклорена.

Формула Эйлера–Маклорена. Нам эта формула нужна в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} \sum_k^{N-1} f(k) &= f(N) - \frac{1}{2} f'(N) + \frac{1}{12} f''(N) - \frac{1}{720} f'''(N) - \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \partial^m f(N), \end{aligned} \quad (72)$$

где B_m – числа Бернулли, $\sum (B_m/m!)t^m = t/(e^t - 1)$. Нижний предел суммирования не существен, так как он не зависит от N . В следующих примерах он выбран равным $k = 0$:

$$\begin{aligned} f(k) &= 1, & \frac{\partial}{\partial N} N &= 1; \\ f(k) &= k, & \frac{\partial}{\partial N} \frac{N(N-1)}{2} &= N - \frac{1}{2}; \\ f(k) &= k^2, & \frac{\partial}{\partial N} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} &= N^2 - N + \frac{1}{6} = N^2 - \frac{2N}{2} + \frac{2}{12}; \\ f(k) &= k^3, & \frac{\partial}{\partial N} \frac{N^2(N-1)^2}{4} &= N^3 - \frac{3}{2}N^2 + \frac{1}{2}N = N^3 - \frac{3N^2}{2} + \frac{6N}{12} + 0; \quad \dots \end{aligned}$$

Различные ряды, как они есть. Здесь все равенства понимаются как верные с точностью до постоянных и линейных по N или Λ членов.

Суммируя все вклады различных родов, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{F}_{\text{SW}} \left(\frac{\Lambda}{g} \right) &= \frac{1}{g} \beta \Lambda \ln \Lambda + \frac{\beta - 1}{2} \ln \Lambda + g \frac{1 - 3\beta + \beta^2}{12\beta\Lambda} + g^2 \frac{\beta - 1}{24\beta\Lambda^2} + \\ &+ g^3 \frac{-1 + 5\beta^2 - \beta^4}{360\beta^3\Lambda^3} + g^4 \frac{1 - \beta^3}{240\beta^3\Lambda^4} + g^5 \frac{2 - 7\beta^2 - 7\beta^4 + 2\beta^6}{2520\beta^5\Lambda^5} + o\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right). \end{aligned} \quad (73)$$

Разлагая F в различных точках, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} \tilde{F} \left(\frac{\Lambda}{g} - \frac{1}{\beta} \right) &= \frac{1}{g} \beta \Lambda \ln \Lambda + \frac{\beta - 1}{2} \ln \Lambda + g \frac{1 - 3\beta + \beta^2}{12\beta\Lambda} + g^2 \frac{\beta - 1}{24\beta\Lambda^2} + \\ &+ g^3 \frac{-1 + 5\beta^2 - \beta^4}{360\beta^3\Lambda^3} + g^4 \frac{1 - \beta^3}{240\beta^3\Lambda^4} + g^5 \frac{2 - 7\beta^2 - 7\beta^4 + 2\beta^6}{2520\beta^5\Lambda^5} + o\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right), \\ \frac{\partial}{\partial N} \tilde{F} \left(\frac{\Lambda}{g} \right) &= \frac{1}{g} \beta \Lambda \ln \Lambda + \frac{1 + \beta}{2} \ln \Lambda + g \frac{1 + 3\beta + \beta^2}{12\beta\Lambda} - g^2 \frac{1 + \beta}{24\beta\Lambda^2} - \\ &- g^3 \frac{1 - 5\beta^2 + \beta^4}{360\beta^3\Lambda^3} + g^4 \frac{1 + \beta^3}{240\beta^3\Lambda^4} + g^5 \frac{2 - 7\beta^2 - 7\beta^4 + 2\beta^6}{2520\beta^5\Lambda^5} + o\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right), \\ \frac{\partial}{\partial N} \tilde{F} \left(\frac{\Lambda}{g} - 1 \right) &= \frac{1}{g} \beta \Lambda \ln \Lambda + \frac{1 - \beta}{2} \ln \Lambda + g \frac{1 - 3\beta + \beta^2}{12\beta\Lambda} + g^2 \frac{1 - \beta}{24\beta\Lambda^2} - \\ &- g^3 \frac{1 - 5\beta^2 + \beta^4}{360\beta^3\Lambda^3} + g^4 \frac{\beta^3 - 1}{240\beta^3\Lambda^4} + g^5 \frac{2 - 7\beta^2 - 7\beta^4 + 2\beta^6}{2520\beta^5\Lambda^5} + o\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right). \end{aligned} \quad (74)$$

Интерпретация. Глядя на написанные выше ряды, можно легко предположить существование следующих соотношений:

$$\mathcal{F}_{\text{SW}} \left(\frac{\Lambda}{g}, \beta \right) = \tilde{F} \left(\frac{\Lambda}{g} - \frac{1}{\beta}, \beta \right) = -\tilde{F} \left(-\frac{\Lambda}{g} - 1, \beta \right) = -\tilde{F} \left(\frac{\Lambda}{g}, -\beta \right). \quad (75)$$

Первое равенство было ожидаемо из приведенного выше анализа разностного уравнения для свободной энергии.

Оказывается, что $\tilde{F}$ со сдвинутыми аргументами также удовлетворяет тому же разностному уравнению. В самом деле,

$$\begin{aligned} -\tilde{F}(N, -\beta) + \tilde{F}(N - 1, -\beta) &= -\ln \Gamma(1 - \beta N), \\ -\ln \Gamma(-\beta N) + \ln \Gamma(1 - \beta N) &= \ln(-\beta N). \end{aligned} \quad (76)$$

Для $\tilde{F}(-N-1, \beta)$ надо предположить, что нижний предел суммирования меньше, чем $-N-1$ (что с точки зрения здравого смысла выглядит довольно странным):

$$-\tilde{F}(-N-1, \beta) + \tilde{F}(-N, \beta) = -\ln \Gamma(1 - \beta N). \quad (77)$$

Обычно сдвиг точки, в которой мы разлагаем функцию, не приводит к ряду, похожему на исходный. То, что это не так в этом случае, может служить указанием на то, что существует некоторая еще не открытая математическая структура, связанная с этим сюжетом. Возможно, это всего лишь причудливое свойство гауссового потенциала, а возможно, что такие же равенства имеют место и в более сложных случаях. Интересно проверить, какие из этих неожиданных тождеств сохраняются при обобщении на негауссовы модели.

Благодарности. Работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ (контракт 02.740.11.5194), грантами РФФИ 10-02-00509_а (А. Д. Мионов и А. В. Пополитов) и 10-02-00499 (А. Ю. Морозов и Ш. Р. Шакиров), а также совместными грантами 11-02-90453-Укр, 09-02-93105-CNRS, 09-02-91005-ANF, 10-02-92109-Яф_а, 11-01-92612-Royal Society.

Список литературы

- [1] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv:hep-th/9408099; **431**:3 (1994), 484–550, arXiv:hep-th/9407087.
- [2] A. Klemm, W. Lerche, S. Yankielowicz, S. Theisen, *Phys. Lett. B*, **344**:1–4 (1995), 169–175, arXiv:hep-th/9411048; P. C. Argyres, A. D. Shapere, *Nucl. Phys. B*, **461**:3 (1996), 437–459, arXiv:hep-th/9509175.
- [3] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–477, arXiv:hep-th/9505035; R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334, arXiv:hep-th/9510101.
- [4] I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475, arXiv:hep-th/9205110; *Commun. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429; B. Dubrovin, *Nucl. Phys. B*, **379**:3 (1992), 627–689; H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **491**:3 (1997), 529–573, arXiv:hep-th/9512161; A. Marshakov, *Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems*, World Scientific, Singapore, 1999; A. Gorsky, A. Mironov, *Integrable many-body systems and gauge theories*, arXiv:hep-th/0011197.
- [5] E. Witten, *Surv. Diff. Geom.*, **1** (1991), 243–310; R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **389**:1 (1996), 43–52, arXiv:hep-th/9607109; *Modern Phys. Lett. A*, **12**:11 (1997), 773–787, arXiv:hep-th/9701014; *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:8 (2000), 1157–1206, arXiv:hep-th/9701123; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **424**:1–2 (1998), 48–52, arXiv:hep-th/9712177; A. P. Veselov, *Phys. Lett. A*, **261**:5–6 (1999), 297–302, arXiv:hep-th/9902142; H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **448**:3–4 (1999), 195–202, arXiv:hep-th/9812078.
- [6] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **04** (2010), 040, 15 pp., arXiv:0910.5670; *J. Phys. A*, **43**:19 (2010), 195401, 11 pp., arXiv:0911.2396; A. Popolitov, *On relation between Nekrasov functions and BS periods in pure $SU(N)$ case*, arXiv:1001.1407; Wei He, Yan-Gang Miao, *Phys. Rev. D*, **82**:2 (2010), 025020, 9 pp., arXiv:1006.1214; K. Maruyoshi, M. Taki, *Nucl. Phys. B*, **841**:3 (2010), 388–425, arXiv:1006.4505; F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, D. Ricci Pacifici, *JHEP*, **05** (2011), 098, arXiv:1103.4495; Y. Zenkevich, *Phys. Lett. B*, **701**:5 (2011), 630–639, arXiv:1103.4843.

- [7] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *J. Geom. Phys.*, **61**:7 (2011), 1203–1222, arXiv: 1011.4491.
- [8] A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534** (1998), 549–611, arXiv: hep-th/9711108; *Testing Seiberg–Witten solution*, arXiv: hep-th/9801061; G. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 97–121, arXiv: hep-th/9712241; 77–95, arXiv: hep-th/9803265.
- [9] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories*, arXiv: 0908.4052.
- [10] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2010), 030, 26 pp., arXiv: 0911.5721.
- [11] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models*, arXiv: 1011.5629.
- [12] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219; N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv: 0907.2189; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv: 0908.2190; *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2009), 1–37, arXiv: 0908.2569.
- [13] L. Hadasz, Z. Jaskolski, P. Suchanek, *JHEP*, **01** (2010), 063, 13 pp., arXiv: 0911.2353; *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, arXiv: 1004.1841; V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *JHEP*, **02** (2010), 014, 17 pp., arXiv: 0912.0504; V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, G. M. Tarnopolsky, *Lett. Math. Phys.*, **98**:1 (2011), 33–64, arXiv: 1012.1312; A. Belavin, V. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **850**:1 (2011), 199–213, arXiv: 1102.0343.
- [14] H. Itoyama, T. Oota, *Nucl. Phys. B*, **838**:3 (2010), 298–330, arXiv: 1003.2929; A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **843**:2 (2011), 534–557, arXiv: 1003.5752; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **02** (2011), 067, 41 pp., arXiv: 1012.3137.
- [15] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $N = 2$ gauge systems*, arXiv: 0909.2453; H. Itoyama, K. Maruyoshi, T. Oota, *Prog. Theor. Phys.*, **123**:6 (2010), 957–987, arXiv: 0911.4244; T. Eguchi, K. Maruyoshi, *JHEP*, **02** (2010), 022, 21 pp., arXiv: 0911.4797; *Seiberg–Witten theory, matrix model and AGT relation*, arXiv: 1006.0828; R. Schiappa, N. Wyllard, *An A_r threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d $N = 2$ gauge theories*, arXiv: 0911.5337.
- [16] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20; arXiv: hep-th/0206255; 21–39, arXiv: hep-th/0207106; *A perturbative window into non-perturbative physics*, arXiv: hep-th/0208048.
- [17] L. Chekhov, A. Mironov, *Phys. Lett. B*, **552**:3–4 (2003), 293–302, arXiv: hep-th/0209085; A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen, *JHEP*, **03** (2003), 051, 21 pp., arXiv: hep-th/0211216; V. Kazakov, A. Marshakov, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3107–3136, arXiv: hep-th/0211236; H. Itoyama, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **657**:1–3 (2003), 53–78, arXiv: hep-th/0211245; *Phys. Lett. B*, **555**:3–4 (2003), 287–295, arXiv: hep-th/0211259; *Prog. Theor. Phys.*, **109**:3 (2003), 433–463, arXiv: hep-th/0212032; *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:32 (2003), 5889–5906, arXiv: hep-th/0301136; L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338, arXiv: hep-th/0301071; Л. О. Че-хов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, *Тр. МИАН*, **251** (2005), 265–306, arXiv: hep-th/0506075; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2481–2517, arXiv: hep-th/0412099; *Fortsch. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521, arXiv: hep-th/0412205; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 77–89, arXiv: hep-th/0506158.
- [18] A. Alexandrov, A. Morozov, A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv: hep-th/0310113.
- [19] B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452, arXiv: math-ph/0702045.
- [20] А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv: hep-th/0605171; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv: hep-th/0608228; *JHEP*, **12** (2009), 053, 48 pp., arXiv: 0906.3305;

- A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv:0811.2825; B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv:hep-th/0407261; L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv:hep-th/0504116; *JHEP*, **12** (2006), 026, 29 pp., arXiv:math-ph/0604014; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv:0808.0635; I. Kostov, N. Orantin, *JHEP*, **11** (2010), 056, 30 pp., arXiv:1006.2028; Л. О. Чехов, Б. Эйнард, О. Маршал, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 163–215, arXiv:1009.6007.
- [21] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:16 (2010), 3173–3207, arXiv:1001.0563.
- [22] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [23] J. Harer, D. Zagier, *Invent. Math.*, **85**:3 (1986), 457–485; S.K. Lando, A.K. Zvonkin, *Embedded graphs*, Preprint Series, **63**, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2001.
- [24] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 003, 33 pp., arXiv:0906.0036; *From Brezin-Hikami to Harer-Zagier formulas for Gaussian correlators*, arXiv:1007.4100.
- [25] A. A. Migdal, *Phys. Rep.*, **102**:4 (1983), 199–290; J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Yu. M. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **251**:4 (1990), 517–524; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52; J. Ambjørn, Yu. M. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763; H. Itoyama, Y. Matsuo, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208.
- [26] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 99–107; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak, *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750, arXiv:hep-th/9208044; H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, *Phys. Lett. B*, **347**:1–2 (1995), 49–55, arXiv:hep-th/9411053; *Soryushiron Kenkyū*, **91** (1995), A69–A75, arXiv:hep-th/9503028.
- [27] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **08** (2010), 066, 37 pp., arXiv:1004.2917.

Поступила в редакцию 17.05.2011