Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Козлов, Спектральная зависимость степени локализации в одномерной разупорядоченной модели Ллойда, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 124–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:39:14

© 2012 г.

Г. Г. Козлов*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ ЛОКАЛИЗАЦИИ В ОДНОМЕРНОЙ РАЗУПОРЯДОЧЕННОЙ МОДЕЛИ ЛЛОЙДА

Для одномерных диагонально разупорядоченных моделей с функцией распределения узельных энергий, не имеющей конечных четных моментов выше нулевого, вычислены критерий Андерсона и спектральная зависимость степени локализации в первом не исчезающем приближении по беспорядку. Показано, что для этого класса моделей (когда обычная теория возмущений оказывается неприменимой) может быть последовательно построена теория возмущений для совместной статистики опережающей и запаздывающей функций Грина. Расчеты для модели Ллойда показали, что критерий Андерсона является в этом случае линейной (а не квадратичной, как обычно) функцией степени разупорядочения. Расчеты иллюстрируются компьютерными экспериментами.

Ключевые слова: андерсоновская локализация, одномерная разупорядоченная система, функция Грина.

1. ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Одной из главных причин изучения одномерных ($1D$) систем в физике твердого тела является относительная простота соответствующих математических моделей. Это позволяет при анализе $1D$ -моделей в ряде случаев получать результаты в аналитическом виде и использовать их как наводящие при изучении более реалистичных двух- и трехмерных твердотельных моделей. В настоящее время, однако, есть основания полагать, что значение $1D$ -моделей этим не исчерпывается. Современные технологии производства материалов и методики экспериментов позволяют создавать и изучать низкоразмерные системы (например, квантовые сверхрешетки, $1D$ -фотонные кристаллы, оптические волокна), для анализа которых одномерные математические модели могут быть непосредственно использованы. Кроме того, в последнее время увеличивается интерес к известным естественным $1D$ -системам таким, как J -агрегаты [1], [2], спектроскопические свойства которых описываются в терминах $1D$ -экситона Френкеля.

* Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: gkozlov@photonics.phys.spbu.ru

Неизбежные флуктуации технологических режимов при изготовлении “искусственных” $1D$ -систем и флуктуации окружения естественных одномерных систем порождают беспорядок, который необходимо учитывать при их описании. Математические модели беспорядка в одномерных системах составляют важную часть теории разупорядоченных систем [3] и продолжают исследоваться в настоящее время [4]–[6]. Об одном классе таких моделей пойдет речь в предлагаемой статье. Матрица гамильтониана $\mathbf{H}$ моделей этого класса имеет стандартный вид¹⁾

$$H_{rr'} = \delta_{rr'}\varepsilon_r + \delta_{r,r'+1} + \delta_{r,r'-1}, \quad r, r' = 1, 2, \dots, N, \quad N \rightarrow \infty, \quad (1)$$

а специфика заключается в том, что функция распределения $P(\varepsilon)$ случайных узельных энергий ε_r может убывать настолько медленно, что все ее четные моменты, кроме нулевого, расходятся. Примером подобной модели может служить модель Ллойда [7], в которой $P(\varepsilon)$ является распределением Коши. Как известно, для модели Ллойда возможно точное вычисление усредненной функции Грина [3], [7], однако несмотря на то, что локализация собственных состояний в такой модели активно исследовалась [6], [8]–[12], полученные в нашей работе результаты, касающиеся спектральной зависимости степени локализации в смысле критерия Андерсона, по нашим сведениям, нигде не освещались. Отметим, что изучение подобных моделей представляет методический интерес, поскольку использование обычной теории возмущений в данном случае оказывается невозможным.

Для анализа локализации в моделях описанного выше класса мы применяем методику [13], основанную на построении совместной статистики опережающей и запаздывающей функций Грина. Целью настоящей работы является обобщение этой методики на случай диагонально разупорядоченных $1D$ -моделей описанного выше класса, когда формулы нашей работы [13], выражающие критерий Андерсона и спектральную зависимость локализации через второй момент функции распределения узельных энергий $\int P(\varepsilon)\varepsilon^2 d\varepsilon$, оказываются неприменимыми. В качестве примера мы приведем расчеты для модели Ллойда и покажем, что зависимость критерия Андерсона от параметра ширины распределения узельных энергий в этом случае *линейная*, а не квадратичная, как для быстроубывающих распределений [13].

Общая постановка задачи и количественные определения вычисляемых ниже величин в точности соответствуют таковым из работы [13], поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким напоминанием. Рассмотрим длинную разупорядоченную цепочку, описываемую гамильтонианом (1), и будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ возбуждение было сосредоточено на крайнем узле N этой цепочки. Введем *критерий Андерсона* D как вероятность того, что возбуждение останется на исходном узле N при $t \rightarrow \infty$. Как известно, в упорядоченной системе $D = 0$, и появление (вследствии беспорядка) в спектре гамильтониана (1) локализованных состояний соответствует условию $D \neq 0$ [3], [13], [14].

Если Ψ^λ и E_λ суть собственные векторы и собственные числа матрицы (1), то величина D может быть представлена в виде [13]

$$D = \int W(U) dU, \quad \text{где} \quad W(U) dU = \left\langle \sum_{E_\lambda \in [U, U+dU]} |\Psi_N^\lambda|^4 \right\rangle. \quad (2)$$

¹⁾Гамильтониан такого вида описывает экситон Френкеля в одномерной диагонально разупорядоченной цепочке с взаимодействием только между ближайшими соседями.

Скобки $\langle \cdot \rangle$ показывают усреднение по случайным узельным энергиям ε_r . Отличие функции $W(U)$ от нуля при какой-либо энергии U свидетельствует о том, что собственные векторы (1) с энергией U локализованы в смысле критерия Андерсона, т. е. эту функцию можно назвать *спектральной зависимостью степени локализации*²⁾.

Как и в работе [13], функцию распределения энергий узлов $P(\varepsilon)$ мы представим в виде

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta} p\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right), \quad p(x) > 0, \quad \int p(x) dx = 1, \quad (3)$$

причем Δ является мерой разупорядочения системы, так как при $\Delta \rightarrow 0$ система становится упорядоченной. В работе [13] были получены следующие выражения для D и $W(U)$: $D = M_2 \Delta^2 / 2$ и $W(U) = M_2 \Delta^2 \sqrt{(4 - U^2)} / (4\pi)$, $|U| < 2$, где $M_2 = \int p(x) x^2 dx$. При $M_2 < \infty$ эти выражения применимы в случае слабаразупорядоченных систем, когда $D \ll 1$. Основным результатом настоящей работы являются следующие применимые при $D \ll 1$ выражения для функции $W(U)$ и величины D :

$$W(U) = \frac{(4 - U^2)^{3/2}}{4\pi} \int d\varepsilon P(\varepsilon) \ln\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4 - U^2}\right), \quad |U| < 2, \quad D = \int_{-2}^2 dU W(U). \quad (4)$$

Эти выражения справедливы фактически при любой мыслимой функции $P(\varepsilon)$. При $M_2 < \infty$ формулы (4) переходят (при малых Δ) в формулы работы [13]. При $M_2 = \infty$ зависимость D от Δ качественно меняется. В частности, для модели Ллойда, когда $p(x) = [\pi(1 + x^2)]^{-1}$, величина D оказывается пропорциональной первой степени Δ , что подтверждается описанным в заключительной части статьи компьютерным экспериментом.

2. РАСЧЕТ

Для решения задачи, поставленной в предыдущем разделе, мы будем использовать предложенную в работе [13] методику, которую сейчас кратко опишем. Вероятность возбуждения $|\Psi_N(t)|^2$ на краевом узле N разупорядоченной цепочки выражается через две краевые функции Грина (КФГ) $\gamma(U_1)$ и $\gamma(U_2)$ при разных энергиях U_1 и U_2 . Указанные КФГ являются случайными величинами, причем их совместная функция распределения $\rho(x_1 x_2)$ удовлетворяет уравнению [13]

$$x_1^2 x_2^2 \rho(x_1 x_2) = \int P(\varepsilon) \rho\left(U_1 - \frac{1}{x_1} - \varepsilon, U_2 - \frac{1}{x_2} - \varepsilon\right) d\varepsilon. \quad (5)$$

Искомая вероятность возбуждения на краевом узле $|\Psi_N(t)|^2$ связана с функцией $\rho(x_1 x_2) = \rho_{U_1 U_2}(x_1 x_2)$ следующим образом [13]:

$$|\Psi_N(t)|^2 = \frac{i}{\pi^2} \int dU d\omega e^{-i\omega t} \langle y_{2x_1} \rangle, \quad (6)$$

где

$$\langle y_{2x_1} \rangle = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \int x \rho_{U, U+\omega}(x, a) dx.$$

²⁾В работе [13] $W(U)$ названа функцией участия, поскольку $W(U)$ имеет много общего с IPR (inverse participation ratio) [4].

При малых ω функция $\rho_{U,U+\omega}(x_1, x_2)$ имеет сингулярность типа полюса, т. е. представима в виде

$$\rho_{U,U+\omega}(x_1 x_2) \approx \text{sing } \rho_{U,U+\omega}(x_1 x_2) = \frac{1}{\omega} \mathcal{F}_U(x_1 x_2). \quad (7)$$

Подставляя представление (7) в выражение (6) и учитывая, что $\int d\omega e^{-i\omega t}/\omega = -i\pi$, получаем, что предельная при $t \rightarrow \infty$ вероятность возбуждения на крайнем узле D (2) определяется формулой

$$D = |\Psi_N(t = \infty)|^2 = \int W(U) dU, \quad \text{где } W(U) = \lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \int dx \mathcal{F}_U(x, a)x, \quad (8)$$

причем, как показано в работе [13], функция $W(U)$ в этом выражении имеет смысл спектральной зависимости степени локализации (2). Таким образом, для вычисления D и $W(U)$ следует найти сингулярную по разности энергий ω часть (7) решения уравнения (5). Эти сведения из статьи [13] являются исходными для настоящей работы. Ниже описывается схема расчета величин D и $W(U)$ в первом не исчезающем приближении по степени разупорядочения Δ (3), пригодная для фактически произвольной осмысленной функции $p(x)$ (3), в том числе и тогда, когда все четные (кроме нулевого) моменты $p(x)$ расходятся. Как и в работе [13], *все расчеты относятся к области энергий* $|U| < 2$, где плотность состояний упорядоченной модели отлична от нуля и находится подавляющее большинство состояний и в случае слабого беспорядка, который мы рассматриваем.

Нам будет удобно ввести функцию $\mathcal{R}(x_1 x_2) \equiv \rho(U_1 - x_1, U_2 - x_2)$. С помощью уравнения (5) нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{R}(x_1 x_2)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\mathcal{R}(U_1 - 1/x_1, U_2 - 1/x_2)}{x_1^2 x_2^2} \equiv \mathcal{H}_{U_1}(x_1) \mathcal{H}_{U_2}(x_2) \mathcal{R}(x_1 x_2) = \int P(\varepsilon) \mathcal{R}(x_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon) d\varepsilon. \quad (9)$$

В левой части этого уравнения фигурирует функциональный оператор $\mathcal{H}_U(x)$, который действует на произвольную функцию $f(x)$ следующим образом: $\mathcal{H}_U(x)f(x) \equiv f(U - 1/x)/x^2$. Используем описанную в работе [15] систему собственных функций оператора $\mathcal{H}_U(x)$ для того, чтобы записать уравнение (9) в матричном виде. Приведем полученные в работе [15] явные выражения для собственных функций $\sigma_U^n(x)$ и собственных значений λ_n этого оператора при $|U| < 2$:

$$\sigma_U^n(x) = \mathcal{L}_U(x) \left[\frac{R_U^* - x}{R_U - x} \right]^n \equiv \mathcal{L}_U(x) G_U^n(x), \quad \lambda_n = \left(\frac{U + i\sqrt{4 - U^2}}{U - i\sqrt{4 - U^2}} \right)^n, \quad |\lambda_n| = 1, \quad (10)$$

где

$$G_U(x) \equiv \frac{R_U^* - x}{R_U - x}, \quad R_U \equiv \frac{U + i\sqrt{4 - U^2}}{2}, \quad \mathcal{L}_U(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{x - R_U} - \frac{1}{x - R_U^*} \right]. \quad (11)$$

Нам понадобится также полученное в работе [15] правило проецирования на систему функций (10), которое заключается в том, что произвольная функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \sigma_U^n(x), \quad \text{где } A_n = \int \frac{f(x)}{G_U^n(x)} dx. \quad (12)$$

С помощью правила (12) разложим правую и левую части уравнения (9) по системе функций (10):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_1 x_2) &= \sum_{nm} C_{nm} \sigma_{U_1}^n(x_1) \sigma_{U_2}^m(x_2), \\ \int P(\varepsilon) \mathcal{R}(x_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon) d\varepsilon &= \sum_{qp} \sum_{nm} \sigma_{U_1}^q(x_1) \sigma_{U_2}^p(x_2) J_{qp}^{nm} C_{nm}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$J_{qp}^{nm} \equiv \int P(\varepsilon) \frac{\sigma_{U_1}^n(\varepsilon + x_1) \sigma_{U_2}^m(\varepsilon + x_2)}{G_{U_1}^q(x_1) G_{U_2}^p(x_2)} dx_1 dx_2 d\varepsilon.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях $\sigma_{U_1}^n(x_1) \sigma_{U_2}^m(x_2)$ в правой и левой частях уравнения (9), получим

$$C_{qp} \lambda_q(U_1) \lambda_p(U_2) = \sum_{n,m} J_{qp}^{nm} C_{nm}. \quad (14)$$

Пронумеруем пары индексов одним индексом $qp \rightarrow \alpha$, причем паре индексов $q = p = 0$ сопоставим $\alpha = 1$. Тогда, если обозначить $\lambda_q(U_1) \lambda_p(U_2) \equiv \Lambda_\alpha$, то уравнение (14) для всех α запишется в виде

$$\sum_{\beta} M_{\alpha\beta} C_{\beta} = 0, \quad M_{\alpha\beta} = J_{\alpha}^{\beta} - \Lambda_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}. \quad (15)$$

Уравнение (15) и представляет собой искомый матричный эквивалент уравнения (9).

Решение уравнения (5) имеет смысл функции распределения и поэтому должно быть знакопостоянным. Аргументы, свидетельствующие о том, что *любое* решение (5) имеет определенный знак, приведены в приложении. Покажем, что из этого следует пропорциональность всех решений (5) друг другу, т.е. одномерность многообразия решений уравнения (5). Действительно, допустим, что существуют два линейно независимых решения (5) ρ_1 и ρ_2 . Без потери общности мы можем считать их положительными. Но тогда решением будет и произвольная линейная комбинация $\rho = \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2$, причем коэффициенты c_1 и c_2 можно выбрать разного знака, так что при некоторых значениях аргументов x_1 и x_2 функция ρ будет менять знак. Это противоречит полученному в приложении свойству знакопостоянства решений (5) и, следовательно, *двух (и более) линейно независимых решений у уравнения (5) (и связанных с ним уравнений (9) и (15)) быть не может.*

Для матричного уравнения (15) это утверждение соответствует тому, что у особой матрицы M (т.е. $\det M = 0$) все строки, кроме *одной*, являются линейно независимыми. Пусть линейно зависимой является строка матричного уравнения (15), соответствующая $\alpha = 1$. Поскольку $\int \sigma_U^n(x) dx = \delta_{n0}$ [15], то условие нормировки $\int dx_1 dx_2 \mathcal{R}(x_1 x_2) = 1$ соответствует требованию $C_{00} = 1 \rightarrow C_1 = 1$. Если теперь обозначить через L размер матрицы M (разумеется, при вычислениях следует считать $L \rightarrow \infty$), то нетрудно убедиться в том, что нормированное решение уравнения (15) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} C_{\alpha} &= K(\Delta) e_{\alpha, i_2, i_3, \dots, i_L} M_{2i_2} M_{3i_3} M_{4i_4} \dots M_{Li_L}, & L \rightarrow \infty, \\ K(\Delta) &= [e_{1, i_2, i_3, \dots, i_L} M_{2i_2} M_{3i_3} M_{4i_4} \dots M_{Li_L}]^{-1}, & L \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до L , а $e_{iklm\dots n}$ – символ Леви-Чивиты (полностью антисимметричная функция значков)³⁾. Напомним, что, во-первых, $e_{123\dots L} = 1$ и, во-вторых, перестановка двух любых значков приводит к изменению знака (например, $e_{21345\dots L} = -1$). Следовательно, $e_{iklm\dots n} \neq 0$, только если среди значков $iklm\dots n$ нет совпадающих (например, $e_{11345\dots L} = 0$).

Допустим, что мы имеем дело с упорядоченной системой, т. е. $\Delta = 0$ и $P(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$. Тогда $J_\alpha^\beta(\Delta = 0) = \delta_{\alpha\beta}$ и, следовательно, $M_{\alpha\beta}(\Delta = 0) = \delta_{\alpha\beta}(1 - \Lambda_\alpha)$. Из формулы (16) получаем, что $C_\alpha(\Delta = 0) = \delta_{\alpha 1}$ (этот результат совпадает с результатом работы [13]) и

$$K(0) = \prod_{\alpha=1}^L (1 - \Lambda_\alpha)^{-1}, \quad L \rightarrow \infty. \quad (17)$$

При переходе к разупорядоченной системе у матрицы M появляются недиагональные элементы, малые по беспорядку Δ в том смысле, что они обращаются в нуль при $\Delta \rightarrow 0$. Поэтому для получения первого не исчезающего приближения для коэффициентов C_α в произведениях матричных элементов, входящих в формулу (16), следует оставить только один какой-либо недиагональный элемент, а остальные (диагональные) считать невозмущенными. Что касается нормировочного коэффициента $K(\Delta)$, то при вычислении первой не исчезающей поправки его следует положить равным $K(0)$ (17). При таком подходе характер малости (цело-степенной, дробно-степенной или какой-либо другой) недиагональных элементов матрицы M как функций Δ не играет роли. Таким образом, в первом не исчезающем приближении (мы показываем это приближенными равенствами) для коэффициентов C_α получаем выражение

$$\begin{aligned} C_\alpha \approx K(0) [& e_{\alpha, i_2, 3, 4, 5, \dots, L} J_2^{i_2} (1 - \Lambda_3)(1 - \Lambda_4) \dots (1 - \Lambda_L) + \\ & + e_{\alpha, 2, i_3, 4, 5, \dots, L} (1 - \Lambda_2) J_3^{i_3} (1 - \Lambda_4) \dots (1 - \Lambda_L) + \\ & + e_{\alpha, 2, 3, i_4, 5, \dots, L} (1 - \Lambda_2)(1 - \Lambda_3) J_4^{i_4} (1 - \Lambda_5) \dots (1 - \Lambda_L) + \dots]. \end{aligned} \quad (18)$$

В первом слагаемом в квадратных скобках недиагональный элемент стоит на месте M_{2i_2} (см. формулу (16)). Принимая во внимание явное выражение для $K(0)$ (17), нетрудно видеть, что это слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$K(0) e_{\alpha, i_2, 3, 4, 5, \dots, L} J_2^{i_2} (1 - \Lambda_3)(1 - \Lambda_4) \dots (1 - \Lambda_L) = e_{\alpha, i_2, 3, 4, 5, \dots, L} \frac{J_2^{i_2}}{1 - \Lambda_2}.$$

Это выражение отлично от нуля, только когда $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$. Случай $\alpha = 1$ соответствует вычислению поправки к нормировочной константе и интереса для нас не представляет [13]. В случае $\alpha = 2$ и $i_2 = 1$ рассматриваемое слагаемое даст коэффициент C_2 , поскольку остальные слагаемые в выражении (18) равны нулю при $\alpha = 2$. Аналогичные результаты могут быть получены для всех $\alpha \neq 1$:

$$C_\alpha \approx -\frac{J_\alpha^1}{1 - \Lambda_\alpha}, \quad \alpha \neq 1. \quad (19)$$

³⁾ Например, если $L = 3$, то двум линейно независимым строкам матрицы M можно сопоставить два непараллельных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Тогда решение (15) соответствует нахождению вектора $\mathbf{c}$, ортогонального этим двум. Этот вектор параллелен векторному произведению $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, компоненты которого, как известно, могут быть записаны с помощью трехмерного тензора Леви-Чивиты: $c_i \sim e_{ijk} a_j b_k$.

Как уже было отмечено, нас интересуют только сингулярные по $\omega = U_2 - U_1$ члены разложения (13). Такая сингулярность имеет место только у тех коэффициентов (19), номер которых α соответствует паре индексов с противоположными знаками, т.е. $\alpha \rightarrow n, -n$ [13]. Сингулярность возникает как нуль знаменателя в формуле (19) при $\omega = 0$, поэтому энергетические аргументы во всех величинах, кроме знаменателя (19), можно выровнять, положив $U_1 = U_2 \equiv U$. При этом величины J_α^1 будут определяться следующими интегралами:

$$\begin{aligned} J_\alpha^1 \rightarrow J_{-nn}^{00} &= \int P(\varepsilon) \frac{\mathcal{L}_U(\varepsilon + x_1) \mathcal{L}_U(\varepsilon + x_2)}{G_U^n(x_1) G_U^{-n}(x_2)} dx_1 dx_2 d\varepsilon = \\ &= \int d\varepsilon P(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 4 - U^2} \right)^{|n|}. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегралы по x_1 и x_2 , входящие в выражение (20), были вычислены в работе [13]. Таким образом, для сингулярной части первой неисчезающей поправки по беспорядку к функции $\mathcal{R}(x_1 x_2)$ (обозначим ее $\text{sing } \mathcal{R}(x_1 x_2)$) можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \text{sing } \mathcal{R}(x_1 x_2) &= \sum_{n \neq 0} C_{-nn} \sigma_U^n(x_1) \sigma_U^{-n}(x_2) = \\ &= - \sum_{n \neq 0} \frac{J_{-nn}^{00}}{1 - \lambda_n(U_1) \lambda_{-n}(U_2)} \sigma_U^n(x_1) \sigma_U^{-n}(x_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Для малых ω справедливо разложение (см. формулу (10))

$$1 - \lambda_n(U) \lambda_{-n}(U + \omega) = - \frac{2in\omega}{\sqrt{4 - U^2}} + O(\omega^2), \quad (22)$$

поэтому

$$\text{sing } \mathcal{R}(x_1 x_2) = \frac{\sqrt{4 - U^2}}{2i\omega} \sum_{n \neq 0} J_{-nn}^{00} \frac{\sigma_U^n(x_1) \sigma_U^{-n}(x_2)}{n}, \quad (23)$$

откуда, используя свойство функций (10) $\sigma_U^n(U - x) = \sigma_U^{-n}(x)$, получаем следующее выражение для входящей в формулу (7) функции $\mathcal{F}_U(x_1 x_2)$:

$$\mathcal{F}_U(x_1 x_2) = \frac{\sqrt{4 - U^2}}{2i} \sum_{n \neq 0} J_{-nn}^{00} \frac{\sigma_U^{-n}(x_1) \sigma_U^n(x_2)}{n}. \quad (24)$$

С помощью формул (8), (20) и (24) несложно получить, что

$$\begin{aligned} W(U) &= -\frac{i}{2} \sqrt{4 - U^2} \sum_{n \neq 0} \int d\varepsilon \frac{P(\varepsilon)}{n} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 4 - U^2} \right)^{|n|} \times \\ &\times \int \sigma_U^n(x) x dx \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_U^{-n}(a) a^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Имея в виду доказанные в работе [13] свойства функций (10)

$$\int \sigma_U^n(x) x dx = \frac{i}{2} \frac{n}{|n|} \sqrt{4 - U^2}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_U^{-n}(a) a^2 = \frac{\sqrt{4 - U^2}}{2\pi}, \quad (26)$$

а также то, что фигурирующий в выражении (25) ряд легко суммируется с помощью формулы $\sum_{n=1}^{\infty} q^n/n = -\ln(1-q)$, получаем для функции $W(U)$ и величины D выражения (4).

В качестве примера рассмотрим модель Ллойда [7] при $p(x) = [\pi(1+x^2)]^{-1}$. Вычисляя по вычетам интеграл в выражении (4), можно показать, что для этой модели

$$W(U) = \frac{[4-U^2]^{3/2}}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{4-U^2}}\right).$$

В актуальном для нас случае малых Δ получаем, что $W(U) \approx (4-U^2)\Delta/(2\pi)$ и $D \approx 16\Delta/(3\pi)$. Напомним, что для моделей с конечным вторым моментом M_2 , рассмотренных в работе [13], эти величины всегда пропорциональны Δ^2 . На рис. 1 приведены зависимость критерия Андерсона D от беспорядка Δ и спектральная зависимость степени локализации $W(U) dU|_{\Delta=0.007}$, полученные для модели Ллойда в компьютерном эксперименте⁴⁾. Построенные там же соответствующие теоретические зависимости, полученные с помощью формул (4) без какой-либо подгонки, позволяют судить о правильности выполненных в работе расчетов. Из рис. 1а видно, что при малом беспорядке критерий Андерсона D для модели Ллойда действительно линейно зависит от параметра разупорядочения Δ .

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе вычислены величина критерия Андерсона и спектральная зависимость степени локализации для диагонально разупорядоченных $1D$ -моделей, у которых функция распределения энергий узлов $P(\varepsilon)$ не имеет конечных четных моментов, кроме нулевого. Для вычислений производится обобщение предложенной в работе [13] методики построения совместной статистики опережающей и запаздывающей функций Грина на случай случайных систем с расходящимися четными моментами функции $P(\varepsilon)$. Предложенная схема вычислений, опирающаяся на систему специальных функций [15], оказывается более компактной и универсальной, чем описанная в работе [13], и позволяет вычислять критерий Андерсона и спектральную зависимость степени локализации в тех случаях, когда обычная теория возмущений неприменима. В качестве примера рассматривается модель Ллойда [7], для которой получена нетривиальная линейная зависимость критерия Андерсона от степени разупорядочения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем аргументы, показывающие, что, по крайней мере, в случае слабого беспорядка любое решение уравнения (5) при $|U_{1,2}| < 2$ есть знакопостоянная функция. Из уравнения (5) непосредственно вытекает, что при $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$ функция $\rho(x_1x_2) \approx x_1^{-2}x_2^{-2} \int d\varepsilon P(\varepsilon)\rho(U_1-\varepsilon, U_2-\varepsilon)$ и, следовательно, при больших по модулю x_1 и x_2 функция $\rho(x_1x_2)$ имеет определенный знак. Убедимся теперь в постоянстве знака функции $\rho(x_1x_2)$ в отсутствие беспорядка. Уравнение (5) в этом случае имеет вид

$$x_1^2 x_2^2 \rho(x_1 x_2) = \rho\left(U_1 - \frac{1}{x_1}, U_2 - \frac{1}{x_2}\right). \quad (27)$$

⁴⁾Методика компьютерного эксперимента описана в работе [13].

Рис. 1. Зависимость критерия Андерсона D от параметра беспорядка Δ для модели Ллойда; гладкая линия – расчет по формулам (4), зашумленная линия – компьютерный эксперимент (а). Распределение степени локализации состояний $W(U)dU$ для одномерной модели Ллойда при $\Delta = 0.007$ и $dU = 7/300$; гладкая кривая – расчет по формуле (4), зашумленная кривая – компьютерный эксперимент, при котором было выполнено усреднение по 2000 реализаций случайных матриц (1) размером $N = 2000$ (б).

Отсюда следует, что на множестве точек с координатами $(x_{1,n}, x_{2,n})$ таких, что $x_{i,n+1} = U_i - 1/x_{i,n}$, $i = 1, 2$, функция $\rho(x_{1,n}, x_{2,n})$ сохраняет знак (стартовую точку $(x_{1,1}, x_{2,1})$ выберем в области больших по модулю x_1 и x_2 , где в соответствии со сделанными выше замечаниями постоянство знака имеет место). Процесс построения

Рис. 2. Процесс построения последовательности точек x_n .

последовательности точек x_n по каждой переменной может быть наглядно представлен стандартным образом с помощью графиков функций $y = U - 1/x$ и $y = x$. На рис. 2 показаны первые несколько шагов этого процесса. Как известно, точки x_n , получаемые последовательным применением отображения $x_{n+1} = U - 1/x_n$, при $|U| < 2$ (когда уравнение $x = U - 1/x$ не имеет вещественных решений) заполняют числовую ось с плотностью, определяемой распределением Коши [15], которое нигде не обращается в нуль. Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ точки $(x_{1,n}, x_{2,n})$ (в которых функция $\rho(x_1 x_2)$ имеет один и тот же знак) “покрывают” всю плоскость x_1, x_2 и, следовательно, при отсутствии беспорядка функция $\rho(x_1 x_2)$ знакопостоянна. Неоднозначность выбора стартовой точки дает дополнительные основания для такого заключения.

Аналогичное рассуждение можно провести и в том случае, когда имеет место малый беспорядок. Если функция распределения энергий узлов $P(\varepsilon)$ отлична от нуля только в некотором конечном интервале $[-a, a]$ (т.е. $\int_{-a}^a P(\varepsilon) d\varepsilon = 1$), то для произвольной функции $f(x)$ имеет место соотношение

$$\int P(\varepsilon) f(x - \varepsilon) d\varepsilon = f(x - \bar{\varepsilon}(x)), \quad (28)$$

причем функция $\bar{\varepsilon}(x)$ при любом x удовлетворяет условию $\bar{\varepsilon}(x) \in [-a, a]$. Если функция $P(\varepsilon)$ везде отлична от нуля, то соотношение (28) сохраняет силу, однако о функции $\bar{\varepsilon}(x)$ можно сказать лишь, что она ограничена и стремится к нулю при уменьшении беспорядка (т.е. при $\Delta \rightarrow 0$ (3)). Имея это в виду, уравнение (5) может быть переписано в виде

$$x_1^2 x_2^2 \rho(x_1 x_2) = \rho\left(U_1 - \frac{1}{x_1} - \bar{\varepsilon}, U_2 - \frac{1}{x_2} - \bar{\varepsilon}\right) \equiv \rho\left(\tilde{U}_1 - \frac{1}{x_1}, \tilde{U}_2 - \frac{1}{x_2}\right), \quad (29)$$

где $\bar{\varepsilon}(x_1 x_2)$ – ограниченная функция, $\varepsilon_{\min} < \bar{\varepsilon}(x_1 x_2) < \varepsilon_{\max}$, стремящаяся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$. Как видно, уравнение (29) отличается от уравнения (27) только заменой $U_{1,2}$ на $\tilde{U}_{1,2} \equiv U_{1,2} - \bar{\varepsilon}(x_1 x_2)$, где функция $\bar{\varepsilon}(x_1 x_2)$ мала при слабом беспорядке. Произведем теперь графическое построение системы точек $(x_{1,n}, x_{2,n})$, в которых функция $\rho(x_1 x_2)$ сохраняет знак, аналогичное описанному выше для случая нулевого беспорядка. При этом следует заменить гиперболическую функцию $U - 1/x$ на функцию $U - \bar{\varepsilon}(x, z) - 1/x$, и при построении $x_{1,n+1}$ следует положить $x = x_{1,n}$, $z = x_{2,n}$, а при построении $x_{2,n+1} - x = x_{2,n}$, $z = x_{1,n}$. Схематически такая замена показана на рис. 2 пунктиром. При малом беспорядке указанная замена не может качественно изменить картину получения множества точек, в которых функция ρ имеет один и тот же знак, поскольку для предельных функций $U_{1,2} - \varepsilon_{\min} - 1/x$ и $U_{1,2} - \varepsilon_{\max} - 1/x$ (показанных на рис. 2 пунктиром во втором квадранте) построение ничем не отличается от описанного выше для случая $\Delta = 0$. Качественное изменение было бы возможно, например, при появлении точек пересечения графиков функций $y = \tilde{U}(x) - 1/x$ и $y = x$. Однако при малом беспорядке (и, следовательно, при малой функции $\bar{\varepsilon}(x_1 x_2)$) такая возможность может возникнуть лишь при условии, что энергетические параметры $|U_{1,2}|$ находятся в малой области вблизи 2, размер которой стремится к нулю при $\Delta \rightarrow 0$. Для выполненных в настоящей работе расчетов первого не исчезающего приближения для спектральной зависимости локализации $W(U)$ это несущественно.

Список литературы

- [1] E. E. Jelley, *Nature*, **38**:3502 (1936), 1009–1010.
- [2] G. Scheibe, *Angew. Chem.*, **50**:11 (1937), 212–219.
- [3] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, М., 1982.
- [4] A. Rodríguez, V. A. Malyshev, G. Sierra, M. A. Martín-Delgado, J. Rodríguez-Laguna, F. Domínguez-Adame, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:2 (2003), 027404, 4 pp.
- [5] V. A. Malyshev, A. Rodríguez, F. Domínguez-Adame, *Phys. Rev. B*, **60**:20 (1999), 14140–14146, arXiv: cond-mat/9908438.
- [6] M. Titov, H. Schomerus, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:17 (2003), 176601, 4 pp., arXiv: cond-mat/0302580.
- [7] P. Lloyd, *J. Phys. C*, **2**:10 (1969), 1717–1725.
- [8] D. J. Thouless, *J. Phys. C*, **16**:26 (1983), L929.
- [9] A. MacKinnon, *J. Phys. C*, **17**:10 (1984), L289–L292.
- [10] D. E. Rodrigues, H. M. Pastawski, J. F. Weisz, *Phys. Rev. B*, **34**:12 (1986), 8545–8549.
- [11] S. Fishman, R. E. Prange, M. Griniasty, *Phys. Rev. A*, **39**:4 (1989), 1628–1633.
- [12] Lev I. Deych, A. A. Lisyansky, B. L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:12 (2000), 2678–2681.
- [13] Г. Г. Козлов, *ТМФ*, **162**:2 (2010), 285–303.
- [14] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **109**:5 (1958), 1492–1505.
- [15] G. G. Kozlov, *Spectrum and eigen functions of the operator $H_U f(x) \equiv f(U - 1/x)/x^2$ and strange attractor's density for the mapping $x_{n+1} = 1/(U - x_n)$* , arXiv: 0803.1920.

Поступила в редакцию 19.05.2011