Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, Н. М. Алиев, О спектре трехчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 387–403

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:34:08

© 2012 г.

М. Э. Муминов*, Н. М. Алиев*

О СПЕКТРЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассматривается система трех произвольных квантовых частиц на одномерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказывается конечность дискретного спектра соответствующего оператора Шредингера при всех значениях полного квазиимпульса в случае, когда массы двух частиц конечны. Показывается бесконечность дискретного спектра оператора Шредингера в случае, когда в трехчастичной системе массы двух частиц бесконечны.

Ключевые слова: трехчастичная система на решетке, оператор Шредингера, существенный спектр, дискретный спектр, компактный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование бесконечного числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра оператора Шредингера (эффект Ефимова [1]), изучалось во многих физических работах [2], [3]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова впервые было проведено в работе Яфеева [4] с использованием методов интегральных уравнений Фаддеева. Затем существование бесконечного числа связанных состояний было установлено в работах [5], [6] и для гамильтониана системы трех частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, доказано в работах [7], [8] при нулевом значении полного квазиимпульса системы. Конечность связанных состояний дискретного оператора Шредингера трех частиц доказывалась в работах [8], [9] при малых значениях полного квазиимпульса $K \neq 0$. В работе [10] найдено условие появления лакуны существенного спектра и доказано существование бесконечного числа собственных значений в этой лакуне для дискретного оператора Шредингера трех частиц.

Заметим, что в работах [7], [8] бесконечное число собственных значений появляется ниже существенного спектра в случае, когда два из трех двухчастичных подгамильтонианов имеют виртуальные уровни в нуле и нуль является регулярной

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: mmuminov@mail.ru

точкой для третьего гамильтониана или все двухчастичные подгамильтонианы имеют виртуальные уровни в нуле.

В настоящей работе рассматривается система трех произвольных частиц на одномерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Изучаются спектральные свойства соответствующего оператора Шредингера $H(K)$, $K \in T = (-\pi, \pi]$. Доказывается конечность дискретного спектра, лежащего левее существенного спектра соответствующего оператора Шредингера, при всех значениях энергии взаимодействия $\mu_\alpha > 0$ двух частиц β и γ системы трех частиц и при всех значениях полного квазиимпульса $K \in T$ в случае, когда массы хотя бы двух частиц конечны.

Отметим, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров канальных операторов $H_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 2, 3$. В отличие от трехчастичного оператора Шредингера на трехмерной решетке спектр канального оператора $H_\alpha(K)$ на одномерной решетке при всех значениях энергии взаимодействия $\mu_\alpha > 0$ (а не определенных значениях $\mu_\alpha > 0$) состоит из объединения спектра свободного гамильтониана $H_0(K)$ и некоторого отрезка $[\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)]$, т. е.

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \sigma(H_0(K)) \cup [\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)].$$

С увеличением $\mu_\alpha > 0$ этот отрезок сдвигается влево от m_K , а с уменьшением $\mu_\alpha > 0$ приближается к m_K , где m_K – левый край спектра свободного гамильтониана.

Доказано, что при $m_\alpha = \infty$, $m_\beta = \infty$ и $m_\gamma < \infty$ отрезок $[\lambda_i^{\min}(K), \lambda_i^{\max}(K)]$, $i = \alpha, \beta$, превращается в точку, т. е. $\lambda_i = \lambda_i^{\min}(K) = \lambda_i^{\max}(K)$, $i = \alpha, \beta$. В этом случае число λ_i является бесконечнократным собственным значением канального оператора $H_i(K)$, $i = \alpha, \beta$, и появляется бесконечное число собственных значений оператора $H(K)$, стремящихся к λ_i , $i = \alpha, \beta$. Вычисляются эти собственные значения и их кратности. Показано, что существование таких собственных значений не зависит от $\mu_\gamma > 0$. Поскольку структура существенного спектра имеет вид

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_0(K)) \cup \{\lambda_\alpha\} \cup \{\lambda_\beta\} \cup [\lambda_\gamma^{\min}(K), \lambda_\gamma^{\max}(K)], \quad \lambda_\gamma^{\min}(K) < \lambda_\gamma^{\max}(K),$$

наблюдается интересная картина: при некоторых значениях $\mu_\gamma > 0$ бесконечное число собственных значений оператора $H(K)$ появляется в существенном спектре, точнее, в отрезке $[\lambda_\gamma^{\min}(K), \lambda_\gamma^{\max}(K)]$, а при больших значениях $\mu_\gamma > 0$ найденные собственные значения могут находиться на лакуне (на интервале $(\lambda_\gamma^{\max}(K), m_K)$) существенного спектра оператора Шредингера.

2. ОПИСАНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть Z – одномерная целочисленная решетка, т. е. множество целых чисел, и $\ell_2(Z^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на Z^3 .

Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы трех произвольных квантовых частиц с дисперсионными соотношениями $\hat{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, 3$, на решетке Z определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2(Z^3)$:

$$(\hat{H}_0\hat{\psi})(n_1, n_2, n_3) = \sum_{s \in Z} [\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1 + s, n_2, n_3) + \hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1, n_2 + s, n_3) + \hat{\varepsilon}_3(s)\hat{\psi}(n_1, n_2, n_3 + s)],$$

где $\hat{\varepsilon}_i(s) = \hat{\varepsilon}(s)/2m_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, $m_\alpha > 0$ – масса частицы α , $\hat{\varepsilon}$ – элемент пространства $\ell_1(Z)$, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, определенный в Z по формуле

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}, & s = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & |s| = 1, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases}$$

Трехчастичный гамильтониан $\hat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными контактными потенциалами определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{H}_0$:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3,$$

где $(\hat{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) = \delta_{n_\beta n_\gamma} \psi(n_1, n_2, n_3)$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$. Здесь $\mu_\alpha > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть $L_2(T^n)$, $n = 1, 2, 3$, – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^n , $T = (-\pi, \pi]$.

Используя преобразование Фурье и разложение в прямой операторный интеграл [8], [11], изучение спектральных свойств оператора $\hat{H}$ можно свести к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in T$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(T^2)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3,$$

где $H_0(K)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(x, y) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(x) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(y) + \frac{1}{m_3} \varepsilon(K - x - y), \quad \varepsilon(x) = 1 - \cos x,$$

и

$$\begin{aligned} (V_1 f)(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, s) ds, & (V_2 f)(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, y) ds, \\ (V_3 f)(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, x + y - s) ds, & f &\in L_2(T^2). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Для любого $K \in T^3$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров операторов каналов $H_\alpha(K) = H_0(K) - \mu_\alpha V_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)) \cup \sigma(H_3(K)).$$

Доказательство леммы можно найти в работе [11].

Пусть

$$m_K = \min_{x, y} \varepsilon_K(x, y), \quad M_K = \max_{x, y} \varepsilon_K(x, y).$$

Определим при каждом $z \notin [m_K, M_K]$ следующие функции:

$$\begin{aligned}\Delta_1(x; z) &= 1 - \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z}, \\ \Delta_2(x; z) &= 1 - \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z}, \\ \Delta_3(x; z) &= 1 - \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x - s) - z}.\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(K) &= \{z: \Delta_\alpha(x; z) = 0 \text{ хотя бы для одного } x \in T\}, \\ \lambda_\alpha^{\min}(K) &= \inf \sigma_\alpha(K), \quad \lambda_\alpha^{\max}(K) = \sup \sigma_\alpha(K).\end{aligned}$$

Имеет место равенство [10], [11]

$$\sigma(H_\alpha(K)) = [m_K, M_K] \cup \bigcup_{p \in T^3} \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(K - p)),$$

где $h_\alpha(k)$, $k \in T$, – оператор, действующий в $L_2(T)$ по формуле

$$h_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - \mu_\alpha v, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\},$$

$h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию $\varepsilon(p)/m_\beta + \varepsilon(k - p)/m_\gamma$ и

$$(vf)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds. \quad (1)$$

Элементарное вычисление показывает, что для всех $\mu_\alpha > 0$ и $k \in T$ оператор $h_\alpha(k)$ имеет единственное отрицательное собственное значение. Поэтому справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Для любого $\mu_\alpha > 0$ и $K \in T$ спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K))$ оператора $H_\alpha(K)$ состоит из множества*

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K)) = [\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)] \cup [m_K, M_K].$$

Теперь сформулируем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $m_\alpha < \infty$, $m_\beta < \infty$, $m_\gamma \leq \infty$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$. Тогда для любого μ_i , $i = 1, 2, 3$, и $K \in (-\pi, \pi]$ число собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее существенного спектра, конечно.*

В дальнейшем мы предполагаем, что $m_1 = \infty$, $m_2 = \infty$ и $m_3 < \infty$. При этом

$$\mathcal{E}_K(p, q) = \frac{1}{m_3} \varepsilon(K - p - q).$$

ЛЕММА 3. Пусть $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$, и $\mu_3 \geq 0$. Тогда для любого $K \in T$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\sigma(H_\alpha(K)) &= \{\lambda_\alpha\} \cup \left[0, \frac{2}{m_3}\right], & \alpha = 1, 2, \\ \sigma(H_3(K)) &= \Lambda_3 \cup \left[0, \frac{2}{m_3}\right],\end{aligned}$$

где λ_α – отрицательное бесконечнократное собственное значение оператора $H_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 2$ и $\Lambda_3 = \{z: z = \varepsilon(p)/m_3 - \mu_3, \quad p \in T\}$. При этом

$$\begin{aligned}\sigma(H_3(K)) &= \left[-\mu_3, \frac{2}{m_3}\right], & \mu_3 \leq \frac{2}{m_3}, \\ \sigma(H_3(K)) &= \left[-\mu_3, \frac{2}{m_3} - \mu_3\right] \cup \left[0, \frac{2}{m_3}\right], & \mu_3 > \frac{2}{m_3}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_{\min} = \inf\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_{\max} = \sup\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Для всякого фиксированного μ_1, μ_2 и μ_3 оператор $H(K)$ имеет бесконечное число собственных значений $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ и $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$, лежащих соответственно в $(-\infty, \lambda_{\min})$ и $(\lambda_{\max}, 0)$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lambda_{\min}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \lambda_{\max}$. Кратность каждого собственного значения ξ_n , $n > 0$ (ζ_n , $n > 0$), равна 2, а ξ_0 есть простое собственное значение оператора $H(K)$. Точнее,

$$\lambda_\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 + \mu_\alpha m_\alpha}}{m_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

а собственное значение ξ_n является решением рационального уравнения

$$\frac{\mu_1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_2}{\Delta_1(z)} \frac{m_3}{-z} \frac{[1 - m_3 z - \sqrt{(m_3 z)^2 - 2m_3 z}]^{2k}}{-m_3 z + 2} = 1, \quad z < \lambda_{\min},$$

где

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha \sqrt{m_3}}{\sqrt{2 - m_3 z}} \frac{1}{\sqrt{-z}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для доказательства теоремы 2 сначала строится инвариантное подпространство $\mathcal{H}_0$ относительно оператора $H(K)$, затем изучается спектр оператора $H(K)$ в этом инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_0$ и его дополнении $L_2(T^2) \ominus \mathcal{H}_0$. С помощью методов интегральных уравнений показывается существование бесконечного числа собственных значений и определяются соответствующие собственные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 числа $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ не зависят от μ_3 . Лемма 3 показывает возможность существования таких случаев, когда числа $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ могут находиться в существенном спектре $H(K)$ или же на лакуне существенного спектра. Например, в случае $\mu_1 = \mu_2$ имеет место $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$. При малых значениях μ_1 и $\mu_3 = 2/m_3$ это число находится в подмножестве $[-\mu_3, 2/m_3]$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}} H(K)$, а при больших μ_3 – на интервале (на лакуне существенного спектра) $(2/m_3 - \mu_3, 0)$. При этом по теореме 2 существуют такие случаи, что оператор $H(K)$ имеет бесконечное число собственных значений в существенном спектре или на лакуне существенного спектра.

3. КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

В этом разделе мы предполагаем, что $m_\alpha < \infty$, $m_\beta < \infty$, $m_\gamma \leq \infty$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$.

Пусть

$$\tau(K) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K))$$

и $W_\alpha(z)$ – оператор умножения на функцию $[\Delta_\alpha(x; z)]^{-1}$. Функция $\Delta_\alpha(x; z)$ является положительной при всех $z < \tau(K)$. Поэтому оператор $W_\alpha(z)$ положителен при всех $z \in (-\infty, \tau(K))$.

Определим самосопряженный компактный оператор $\mathbf{T}(z)$, $z < \tau(K)$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(T)$, заданный матрицей

$$\mathbf{T}(z) = (T_{ij}(z))_{i,j=1}^3, \quad T_{ij}(z) = \begin{cases} W_i^{1/2}(z) K_{ij}(z) W_j^{1/2}(z), & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Здесь $T_{ij}(z) = W_i^{1/2}(z) K_{ij}(z) W_j^{1/2}(z)$, $K_{ij}(z)$ – интегральный оператор, порожденный ядром $K_{ij}(z; x, s)$ такой, что $K_{ij}(z) = [K_{ji}(z)]^*$, где

$$K_{12}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1} \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mathcal{E}_K(x, s) - z}, \quad K_{13}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1} \sqrt{\mu_1 \mu_3}}{\mathcal{E}_K(x, s - x) - z},$$

$$K_{23}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1} \sqrt{\mu_2 \mu_3}}{\mathcal{E}_K(s - x, x) - z}.$$

Пусть $n(1, \mathbf{T}(z))$, $z < \tau(K)$, – число собственных значений (с учетом кратности) оператора $\mathbf{T}(z)$, лежащих правее от 1. Совершенно аналогично доказательству, приведенному в работе [10], пользуясь методами Фредгольма, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Для числа $N(z)$ (с учетом кратности) собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее от $z < \tau(K)$, имеет место равенство*

$$N(z) = n(1, \mathbf{T}(z)), \quad z < \tau(K).$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Возможны следующие случаи:

- 1) $\tau(K) = \lambda_\alpha^{\min}(K) < \lambda_\beta^{\min}(K) \leq \lambda_\gamma^{\min}(K)$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$;
- 2) $\tau(K) = \lambda_\alpha^{\min}(K) = \lambda_\beta^{\min}(K) < \lambda_\gamma^{\min}(K)$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$;
- 3) $\tau(K) = \lambda_1^{\min}(K) = \lambda_2^{\min}(K) = \lambda_3^{\min}(K)$.

Докажем теорему 1 для случая 3 (для случаев 1 и 2 доказательство аналогично). В этом случае существует $x_\alpha \in T$ такое, что

$$\Delta_\alpha(x; \tau(K)) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Напомним, что функция $\Delta_\alpha(\cdot; z)$ является аналитической при каждом $z \leq \tau(K)$. Поэтому число нулей этой функции конечно.

Обозначим через $p_1^{(\alpha)}, \dots, p_{n_\alpha}^{(\alpha)}$ нули функции $\Delta_\alpha(\cdot; \tau(K))$ и $k_l^{(\alpha)}$ – кратность нуля $p_l^{(\alpha)}$, $l = 1, \dots, n_\alpha$. Пусть $U_\varepsilon(a)$ – ε -окрестность точки $a \in T$.

Отметим, что разность $\mathcal{E}_K(\cdot; \cdot) - z$ является положительной при $z \leq \tau(K)$, следовательно, функция $K_{\alpha\beta}(z; \cdot, \cdot)$ аналитична в T^2 . Поэтому существует число $\varepsilon > 0$

такое, что для всех $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $l \in \{1, \dots, n_\alpha\}$, $s \in \{1, \dots, n_\beta\}$ и $z \leq \tau(K)$ имеют место представления

$$K_{\alpha\beta}(z; x, y) = \sum_{k=0}^{[k_l^{(\beta)}/2]} c_{lk}^{\alpha\beta}(z; x)(y - p_l^{(\beta)})^k + (y - p_l^{(\beta)})^{[k_\beta/2]+1} m_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y),$$

$$x \in T, \quad y \in U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}), \quad (2)$$

$$K_{\alpha\beta}(z; x, y) = \sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} d_{lk}^{\alpha\beta}(z; y)(x - p_l^{(\alpha)})^k + (x - p_l^{(\alpha)})^{[k_\alpha/2]+1} s_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y),$$

$$x \in U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}), \quad y \in T, \quad (3)$$

$$K_{\alpha\beta}(z; x, y) = \sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} \sum_{r=0}^{[k_s^{(\beta)}/2]} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z)(x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\alpha)})^r +$$

$$+ \sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} \sum_{r=[k_s^{(\beta)}/2]+1}^{\infty} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z)(x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\alpha)})^r +$$

$$+ \sum_{k=[k_l^{(\alpha)}/2]+1}^{\infty} \sum_{r=0}^{[k_s^{(\beta)}/2]} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z)(x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\alpha)})^r +$$

$$+ (x - p_l^{(\alpha)})^{[k_\alpha/2]+1} (y - p_s^{(\beta)})^{[k_\beta/2]+1} q_{\alpha\beta}^{(ls)}(z; x, y),$$

$$(x, y) \in U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}) \times U_\varepsilon(p_s^{(\beta)}), \quad (4)$$

где $[a]$ – целая часть числа a , $m_{\alpha\beta}^{(l)}(z; \cdot, \cdot)$, $s_{\alpha\beta}^{(l)}(z; \cdot, \cdot)$ и $q_{\alpha\beta}^{(ls)}(z; \cdot, \cdot)$ – некоторые аналитические функции соответственно на $T \times U_\varepsilon(p_l^{(\beta)})$, $U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}) \times T$ и $U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}) \times U_\varepsilon(p_s^{(\beta)})$.

ЛЕММА 5. *Существуют $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $x \in U_\varepsilon(p_l^{(\alpha)})$, $z \leq \tau(K)$ и $l \in \{1, \dots, n_\alpha\}$ имеет место равенство*

$$\frac{|x - p_l^{(\alpha)}|^{[k_l^{(\alpha)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \leq C. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Delta_\alpha(x; \cdot)$ монотонно убывает:

$$\frac{|x - p_l^{(\alpha)}|^{[k_l^{(\alpha)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \leq \frac{|x - p_l^{(\alpha)}|^{[k_l^{(\alpha)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; \tau(K))}}.$$

Отсюда, заметив, что $k_l^{(\alpha)}$ – кратность нуля $p_l^{(\alpha)}$ функции $\Delta_\alpha(\cdot; \tau(K))$, и из аналитичности функции $\Delta_\alpha(\cdot; \tau(K))$ получаем неравенство (5).

ЛЕММА 6. *Оператор $T_{\alpha\beta}(z)$, $\alpha \neq \beta$, представляется в виде*

$$T_{\alpha\beta}(z) = \tilde{T}_{\alpha\beta}(z) + F_{\alpha\beta}(z), \quad \alpha \neq \beta,$$

где операторнозначная функция $\tilde{T}_{\alpha\beta}(\cdot)$ непрерывна по норме на $(-\infty, \tau(K)]$ и $F_{\alpha\beta}(z)$, $z < \tau(K)$, и независимо от z является конечномерным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что ядро $T_{\alpha\beta}(z; x, y)$ интегрального оператора $T_{\alpha\beta}(z)$ имеет вид $T_{\alpha\beta}(z; x, y) = [\Delta_\alpha(x; z)]^{-1/2} K_{\alpha\beta}(z; x, y) [\Delta_\beta(y; z)]^{-1/2}$. Пользуясь представлением (2)–(4), имеем

$$T_{\alpha\beta}(z) = \tilde{T}_{\alpha\beta}(z) + F_{\alpha\beta}(z), \quad \alpha \neq \beta.$$

Здесь ядра $\tilde{T}_{\alpha\beta}(z; x, y)$ и $F_{\alpha\beta}(z; x, y)$ интегральных операторов $\tilde{T}_{\alpha\beta}(z)$ и $F_{\alpha\beta}(z)$ соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha\beta}(z; x, y) &= [1 - \chi_\alpha(x)] [1 - \chi_\beta(y)] \tilde{T}_{\alpha\beta}(z; x, y) + \\ &+ \frac{[1 - \chi_\alpha(x)]}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \sum_{l=0}^{n_\beta} \frac{\chi_\beta(y)(y - p_l^{(\beta)})^{[k_l^{(\beta)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} M_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y) + \\ &+ \frac{[1 - \chi_\beta(y)]}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} \sum_{l=1}^{n_\alpha} \frac{\chi_\alpha(x)(x - p_l^{(\alpha)})^{[k_l^{(\alpha)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} S_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y) + \\ &+ \chi_\alpha(x) \chi_\beta(y) \sum_{l=1}^{n_\alpha} \sum_{s=1}^{n_\beta} \frac{(x - p_l^{(\alpha)})^{[k_l^{(\alpha)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \frac{(y - p_s^{(\beta)})^{[k_s^{(\beta)}/2]+1}}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} Q_{\alpha\beta}^{(ls)}(z; x, y), \\ F_{\alpha\beta}(z; x, y) &= \frac{[1 - \chi_\alpha(x)]}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \frac{\chi_\beta(y)}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} \sum_{s=0}^{n_\beta} \sum_{r=0}^{[k_s^{(\beta)}/2]} (y - p_s^{(\beta)})^r c_{sr}^{\alpha\beta}(z; x) + \\ &+ \frac{\chi_\alpha(x)}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \frac{[1 - \chi_\beta(y)]}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} \sum_{l=0}^{n_\alpha} \sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} (x - p_l^{(\alpha)})^k d_{lk}^{\alpha\beta}(z; y) + \\ &+ \frac{\chi_\alpha(x)}{\sqrt{\Delta_\alpha(x; z)}} \frac{\chi_\beta(y)}{\sqrt{\Delta_\beta(y; z)}} \sum_{l=0}^{n_\alpha} \sum_{s=0}^{n_\beta} \left[\sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} \sum_{r=0}^{[k_s^{(\beta)}/2]} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z) (x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\beta)})^r + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{[k_l^{(\alpha)}/2]} \sum_{r=[k_s^{(\beta)}/2]+1}^{\infty} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z) (x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\beta)})^r + \\ &\left. + \sum_{k=[k_l^{(\alpha)}/2]+1}^{\infty} \sum_{r=0}^{[k_s^{(\beta)}/2]} c_{kr}^{\alpha\beta}(l, s, z) (x - p_l^{(\alpha)})^k (y - p_s^{(\beta)})^r \right], \end{aligned}$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ – характеристическая функция множества $U_\alpha = \bigcup_{l=1}^{n_\alpha} U_\varepsilon(p_l^{(\alpha)})$,

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y) &= \begin{cases} m_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y), & (x, y) \in T \times U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ S_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y) &= \begin{cases} s_{\alpha\beta}^{(l)}(z; x, y), & (x, y) \in U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}) \times T, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ Q_{\alpha\beta}^{(ls)}(z; x, y) &= \begin{cases} q_{\alpha\beta}^{(ls)}(z; x, y), & (x, y) \in U_\varepsilon(p_l^{(\beta)}) \times U_\varepsilon(p_s^{(\beta)}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Из равенства (5) видно, что функция $\tilde{T}_{\alpha\beta}(z; \cdot, \cdot)$ является квадратично-интегрируемой на T^2 при $z \leq \tau(K)$ и сходится почти всюду к $\tilde{T}_{\alpha\beta}(\tau(K); \cdot, \cdot)$ при $z \rightarrow \tau(K)$.

Поэтому по теореме Лебега оператор $\tilde{T}_{\alpha\beta}(z)$ сходится по норме к $\tilde{T}_{\alpha\beta}(\tau(K))$ при $z \rightarrow \tau(K)$. Конечномерность оператора $F_{\alpha\beta}(z)$ следует из определения $F_{\alpha\beta}(z; x, y)$. Лемма 6 доказана.

Определим оператор $\tilde{\mathbf{T}}(z)$, $z \leq \tau(K)$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(T)$, заданный матрицей

$$\tilde{\mathbf{T}}(z) = (\tilde{T}_{ij}(z))_{i,j=1}^3.$$

Поскольку для каждого ограниченного оператора $\mathbf{A}$, действующего в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(T)$, для любой $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in L_2^{(3)}(T)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\Phi\|_{L_2^{(3)}(T)}^2 &= (\mathbf{A}\Phi, \mathbf{A}\Phi)_{L_2^{(3)}(T)} = \sum_{i=1}^3 \|(\mathbf{A}\Phi)_i\|^2 = \sum_{i=1}^3 \left\| \sum_{j=1}^3 A_{ij}\varphi_j \right\|^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^3 3 \sum_{j=1}^3 \|A_{ij}\varphi_j\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^3 \sup_j \|A_{ij}(z)\|^2 \|\Phi\|^2, \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sup_j \|A_{ij}\|^2}.$$

Поэтому

$$\|\tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{j=1}^3 \sup_i \|\tilde{T}_{ij}(z) - \tilde{T}_{ij}(\tau(K))\|^2}, \quad z < \tau(K). \quad (6)$$

Из неравенства (6) и леммы 6 следует

ЛЕММА 7. Оператор $\mathbf{T}(z)$ представляется в виде

$$\mathbf{T}(z) = \tilde{\mathbf{T}}(z) + \mathbf{F}(z),$$

где операторнозначная функция $\tilde{\mathbf{T}}(\cdot)$ непрерывна по норме на $(-\infty, \tau(K)]$ и $\mathbf{F}(z)$, $z < \tau(K)$, независимо от z является конечномерным оператором.

Далее, пользуясь неравенством Вейля [12] $n(a+b, A+B) \leq n(a, A) + n(b, B)$ для компактных операторов A, B , получим

$$\begin{aligned} N(z) &\leq n\left(\frac{2}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z)\right) + n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right) \leq n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) + \\ &+ n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) + n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 7 оператор $\tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))$ является компактным, поэтому

$$n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) < \infty$$

и при малых $\tau(K) - z < 0$ имеет место равенство

$$n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{F}(z)$ есть конечномерный оператор и размерность пространства его значений не зависит от z , $z < \tau(K)$, существует число $F > 0$ такое, что для всех $z < \tau(K)$ верно

$$n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right) \leq F < \infty.$$

Таким образом, для всех $z < \tau(K)$ имеет место неравенство $n(1, \mathbf{T}(z)) < \infty$. Следовательно, по лемме 4 число собственных значений $H(K)$, лежащих на $(-\infty, \tau(K))$, является конечным.

Теорема 1 доказана.

4. СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ КАНАЛОВ ПРИ $m_1 = m_2 = \infty$

В настоящем разделе мы предполагаем, что $m_1 = m_2 = \infty$, $m_3 < \infty$. В этом случае функция $\Delta_\alpha(x; z)$ не зависит от $x \in T$. Для удобства обозначим ее через $\Delta_\alpha(z)$:

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\varepsilon(s)/m_3 - z}, \quad z \notin [m, M], \quad m = 0, \quad M = \frac{2}{m_3}, \quad \alpha = 1, 2.$$

ЛЕММА 8. Резольвенты $R_\alpha(z) = (H_\alpha(K) - zI)^{-1}$ операторов каналов $H_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 2, 3$, действующих в $L_2(T^2)$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} (R_1(z)f)(x, y) &= \frac{f(x, y)}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} + \frac{[2\pi\Delta_1(z)]^{-1}\mu_3}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} \times \\ &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s, y) ds}{\varepsilon(K - s - y)/m_3 - z}, \quad z \notin [m, M], \quad \Delta_1(z) \neq 0; \\ (R_2(z)f)(x, y) &= \frac{f(x, y)}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} + \frac{[2\pi\Delta_2(z)]^{-1}\mu_3}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} \times \\ &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x, s) ds}{\varepsilon(K - x - s)/m_3 - z}, \quad z \notin [m, M], \quad \Delta_2(z) \neq 0; \\ (R_3(z)f)(x, y) &= \frac{f(x, y)}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} + \\ &\quad + \frac{(2\pi)^{-1}}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} \frac{1}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - \mu_3 - z} \times \\ &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} f(s, x + y - s) ds, \quad z \notin [m, M] \cup \Lambda_3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для случая $\alpha = 3$. Рассмотрим резольвентное уравнение

$$(H_3(K) - zI)f = g$$

для заданного $g \in L_2(T^2)$. Отсюда, заметив, что $\varepsilon(x)/m_3 - z \neq 0$ при $z \notin [m, M] \cup \Lambda_3$ и $x \in T$, получим

$$f(x, y) = \frac{c(x+y)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z} + \frac{g(x, y)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z}, \quad (7)$$

где

$$c(x+y) = \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, x+y-s) ds. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), получаем

$$c(x+y) = c(x+y) \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\varepsilon(K-p-q)/m_3 - z} + \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(s, x+y-s)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z}.$$

Отсюда, учитывая $\varepsilon(x)/m_3 - \mu_3 - z \neq 0$ при $z \notin [m, M] \cup \Lambda_3$ и $x \in T$, находим

$$c(x+y) = \frac{1}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - \mu_3 - z} \frac{\mu_3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s, x+y-s) ds.$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (7), имеем $f(x, y) = (R_3(z)g)(x, y)$.

Случаи $\alpha = 1, 2$ доказываются аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть $z \notin [m, M] \cup \Lambda_3$ ($z \notin [m, M]$, $\Delta_i(z) \neq 0$, $i = 1, 2$). Тогда из леммы 8 следует, что z является регулярной точкой оператора $H_3(K)$ ($H_i(K)$, $i = 1, 2$). Следовательно,

$$\sigma(H_3(K)) \subset [m, M] \cup \Lambda_3, \quad \sigma(H_i(K)) \subset [m, M] \cup \{z: \Delta_i(z) = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что имеют место включения [11]

$$[m, M] \subset \sigma(H_\alpha(K)), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим уравнения для собственных функций

$$H_i(K)f_i = zf_i, \quad z \notin [m, M], \quad i = 1, 2.$$

Отсюда

$$f_1(x, y) = \frac{c_1(y)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z}, \quad f_2(x, y) = \frac{c_2(x)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z}, \quad (9)$$

где

$$c_1(y) = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s, y) ds, \quad c_2(x) = \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, s) ds. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) в формулы (10), имеем

$$c_i(y)\Delta_i(z) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что если число $z \notin [m, M]$ является собственным значением $H_i(K)$, $i = 1, 2$, то $c_i(\cdot) \neq 0$ и, значит, $\Delta_i(z) = 0$. Обратно, если $\Delta_i(z) = 0$, то функция

$$f_1(x, y) = \frac{\alpha_1(y)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z} \quad \left(f_2(x, y) = \frac{\alpha_2(x)}{\varepsilon(K-x-y)/m_3 - z} \right)$$

является собственной функцией $H_1(K)$ ($H_2(K)$), где $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, — любая непрерывная функция, определенная в T .

Функция $\Delta_i(\cdot)$ является монотонной в $(-\infty, m)$ и

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_i(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow m} \Delta_i(z) = -\infty.$$

Следовательно, функция $\Delta_i(\cdot)$ имеет единственный нуль $z = \lambda_i$, $i = 1, 2$.

Для оператора $H_3(K)$ подпространство $\mathcal{H}_0 = \{f \in L_2(T^2): f(p, q) = g(p+q)\}$ пространства $L_2(T^2)$ является инвариантным для $H_3(K)$, и оператор $H_3(K)$ действует как оператор умножения:

$$(H_3(K)g)(p+q) = \left[\frac{1}{m_3} \varepsilon(K-p-q) - \mu_3 \right] g(p+q), \quad g \in \mathcal{H}.$$

Отсюда следует, что $\Lambda_3 \subset \sigma(H_3(K))$.

5. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА $H(K)$ ПРИ $m_1 = m_2 = \infty$

В этом разделе мы предполагаем, что $m_1 = m_2 = \infty$. Тогда оператор $H(K)$ оставляет каждое из подпространств $\mathcal{H}_0 = \{f \in L_2(T^2): f(p, q) = g(p+q)\}$ и $\mathcal{H}_0^\perp = L_2(T^2) \ominus \mathcal{H}_0$ инвариантным. При этом

$$\sigma_{\text{disc}}(H(K)) = \sigma_{\text{disc}}(H^0) \cup \sigma_{\text{disc}}(H^1), \quad (11)$$

где $H^0 = PH(K)P$, $H^1 = P^\perp H(K)P^\perp$, P — ортогональный проектор в $\mathcal{H}_0$, $P^\perp = I - P$.

Поскольку $\mathcal{H}_0$ изоморфно $L_2(T)$, оператор H^0 унитарно-эквивалентен оператору $\bar{H}^0$, действующему в $L_2(T)$ по формуле

$$\bar{H}^0 = E_0(K) - \mu_3 I - (\mu_1 + \mu_2)v,$$

где $E_0(K)$ — оператор умножения на функцию $\varepsilon(K - \cdot)/m_3$, I — единичный оператор, v — оператор, действующий по формуле (1).

Оператор H^1 действует в $\mathcal{H}_0^\perp$ по формуле

$$H^1 = H_0(K) - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2.$$

ЛЕММА 9. Число $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ является собственным значением оператора H^1 тогда и только тогда, когда $D(z) = 0$, где

$$D(z) = \prod_{k=0}^{\infty} D_k(z),$$

$$D_k(z) = 1 - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mu_1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_2}{\Delta_1(z)} d_k^2(z), \quad d_k(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iks} ds}{\varepsilon(s)/m_3 - z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если число $z_k \notin \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ — собственное значение H^1 с $D_k(z_k) = 0$, то соответствующая собственная функция имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} \left[\mu_1 e^{\pm ik(K/2 - y)} d_k(z_k) + \mu_2 \frac{\mu_1}{2\pi \Delta_2(z)} d_k(z_k) e^{\pm ik(K/2 - x)} \right],$$

где k — некоторое натуральное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ – собственное значение оператора H^1 и f – соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение $H_{12}(K)f = zf$ имеет нетривиальное решение f . Так как при $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ оператор $R_0(z)$ ограничен в $L_2(T^2)$, имеем

$$f = R_0(z)[\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2]f. \quad (12)$$

Отсюда следует, что число z является собственным значением оператора H^1 тогда и только тогда, когда 1 является собственным значением $R_0(z)[\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2]$, причем кратности z и 1 совпадают. Введем обозначения

$$\tilde{\varphi}_\alpha = V_\alpha f, \quad \alpha = 1, 2. \quad (13)$$

Из равенства (12) имеем

$$f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(K - p - q)/m_3 - z} [\mu_1 \tilde{\varphi}_1(y) + \mu_2 \tilde{\varphi}_2(x)]. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в (13), получим, что функции $\tilde{\varphi}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(y) &= \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\varphi}_1(y) ds}{\varepsilon(K - y - s)/m_3 - z} + \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\varphi}_2(s) ds}{\varepsilon(K - y - s)/m_3 - z}, \\ \tilde{\varphi}_2(x) &= \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\varphi}_1(s) ds}{\varepsilon(K - s - x)/m_3 - z} + \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\varphi}_2(x) ds}{\varepsilon(K - s - x)/m_3 - z}. \end{aligned}$$

Пользуясь периодичностью подынтегральных функций в этой системе уравнений, производя замену переменных $K/2 - s = t$ в первом и втором интегралах правой части равенств и заметив, что $\Delta_\alpha(z) \neq 0$, $\alpha = 1, 2$, при $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H_{12}(K))$, убедимся, что φ_α , $\alpha = 1, 2$, удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \frac{1}{\Delta_1(z)} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_2(t) dt}{\varepsilon(y + t)/m_3 - z}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_1(t) dt}{\varepsilon(t + x)/m_3 - z}, \quad \varphi_i(y) = \tilde{\varphi}_i\left(y + \frac{K}{2}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

При этом вектор f , определенный по формуле (14), является собственным вектором оператора $H_{12}(K)$, соответствующим собственному числу $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H_{12}(K))$, тогда и только тогда, когда $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ является решением системы (15). Число таких линейно независимых собственных векторов f и Φ совпадает.

Подставляя второе из равенств (15) в первое, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(y + t)/m_3 - z} \frac{\varphi_1(s) dt ds}{\varepsilon(s + t)/m_3 - z}, \\ \varphi_i(y) &= \tilde{\varphi}_i\left(y + \frac{K}{2}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

или

$$\varphi_1 = Q(z)\varphi_1, \quad Q(z) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} QQ^*,$$

Q – интегральный оператор, действующий в $L_2(T)$ по формуле

$$(Q\varphi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\varepsilon(x+t)/m_3 - z}.$$

При этом если $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ является решением системы (15), то φ_1 является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению 1. Обратно, если φ_1 является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению 1, то $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_2 = (1/\Delta_2(z))(\mu_1/2\pi)Q\varphi_1$ является решением системы (15). Число таких линейно независимых собственных векторов φ_1 и Φ совпадает.

Так как функция $1/(\varepsilon(\cdot)/m_3 - z)$ непрерывна на T , то оператор Q является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, оператор $Q(z)$ принадлежит классу операторов со следом.

Поэтому детерминант $\det(I - Q(z))$ оператора $I - Q(z)$ существует и определяется по формуле (см. теорему XIII.106 в книге [13])

$$\det(I - Q(z)) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda_k(z)), \quad (17)$$

где $\{\lambda_k(z)\}$ – собственные значения $Q(z)$, выписанные с учетом алгебраической кратности. По теореме XIII.105 книги [13] число 1 есть собственное значение оператора $Q(z)$ тогда и только тогда, когда $\det(I - Q(z)) = 0$.

Пусть φ – собственная функция оператора $Q(z)$, соответствующая собственному значению λ , т. е.

$$\lambda\varphi(y) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(y+t)/m_3 - z} \frac{\varphi(s)}{\varepsilon(s+t)/m_3 - z} dt ds. \quad (18)$$

Разлагая функцию φ в ряд по базису $\{e^{ikx}\}_{k \in Z}$ и учитывая периодичность подынтегральной функции, получим

$$c_k \lambda e^{ikx} = c_k e^{ikx} \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(s)e^{iks}/m_3 - z} ds \right|^2,$$

или

$$\lambda(z) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} |d_k(z)|^2.$$

Таким образом, собственное значение $\lambda_k(z)$, $k \in Z$, оператора $Q(z)$, участвующее в формуле (17), имеет вид

$$\lambda_k(z) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{4\pi^2} |d_k(z)|^2,$$

а $\psi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in Z$, является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению $\lambda_k(z)$, $k \in Z$.

Заметим, что $d_k(z) = d_{-k}(z)$ для любого натурального k и $z \notin \sigma_{\text{ess}}(H_{12}(K))$. Поэтому, если число $1 = \lambda_k(z_k)$, $z_k \notin \sigma_{\text{ess}}(H_{12}(K))$, – собственное значение $Q(z_k)$, то $\varphi_k = e^{\pm ikx}$ является соответствующей собственной функцией оператора $Q(z_k)$.

Отсюда если число $z_k \notin \sigma_{\text{ess}}(H_{12}(K))$ – собственное значение $H_{12}(K)$ с $D_k(z_k) = 1 - \lambda_k(z_k) = 0$, то из формул (14) и (15) получаем соответствующую собственную функцию

$$f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(K - x - y)/m_3 - z} \left[\mu_1 e^{\pm ik(K/2 - y)} d_k(z_k) + \mu_2 \frac{\mu_1}{2\pi \Delta_2(z)} d_k(z_k) e^{\pm ik(K/2 - x)} \right].$$

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. 1. *Имеют место равенства*

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha \sqrt{m_3}}{\sqrt{2 - m_3 z}} \frac{1}{\sqrt{-z}}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$d_k(z) = \frac{2\pi m_3 [1 - m_3 z - \sqrt{(m_3 z)^2 - 2m_3 z}]^k}{\sqrt{(m_3 z)^2 - 2m_3 z}}.$$

2. *Обозначим через $z = \lambda_i$ отрицательный ноль функции $\Delta_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, и положим $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Тогда функция $D_k(\cdot)$ имеет ноль $z_k \in (-\infty, \lambda_{\min})$ при каждом $k = 0, 1, \dots$, а также существует последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$ и число $\xi_{k_n} \in (\lambda_{\max}, 0)$ такие, что $D_{k_n}(\xi_{k_n}) = 0$ при каждом $n = 0, 1, \dots$. При этом*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lambda_{\min}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{k_n} = \lambda_{\max}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Используя известное равенство

$$\int_0^\pi \frac{\cos(kt) dt}{1 - 2a \cos t + a^2} = \frac{\pi a^k}{1 - a^2},$$

где $k = 0, 1, \dots$ и $0 < a < 1$, имеем

$$\int_0^\pi \frac{\cos(kt) dt}{1 - (2a/(1 + a^2)) \cos t} = \frac{\pi(1 + a^2)a^k}{1 - a^2}. \quad (19)$$

С учетом равенства

$$\frac{(1 - a^2)^2}{(1 + a^2)^2} = 1 - \frac{(2a)^2}{(1 + a^2)^2}$$

формула (19) имеет вид

$$\int_0^\pi \frac{\cos(kt) dt}{1 - (2a/(1 + a^2)) \cos t} = \frac{\pi a^k}{\sqrt{1 - (2a)^2/(1 + a^2)^2}}. \quad (20)$$

Так как $\varepsilon(\cdot)$ – четная функция, то $d_k(z)$ принимает вид

$$d_k(z) = 2 \int_0^\pi \frac{\cos(ks) ds}{(1 - \cos s)/m_3 - z} = \frac{2m_3}{1 - m_3 z} \int_0^\pi \frac{\cos(ks) ds}{1 - \cos s/(1 - m_3 z)}.$$

Введя обозначение $b = 1 - m_3 z - \sqrt{(m_3 z)^2 - 2m_3 z}$, получаем

$$d_k(z) = \frac{2m_3}{1 - m_3 z} \int_0^\pi \frac{\cos(ks) ds}{1 - 2b \cos s/(1 + b^2)}.$$

Отсюда с учетом включения $b \in (0, 1)$ и выражения (20) следует

$$d_k(z) = \frac{2m_3\pi [1 - m_3z - \sqrt{(m_3z)^2 - 2m_3z}]^k}{\sqrt{(m_3z)^2 - 2m_3z}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Поскольку $\Delta_\alpha(z) = 1 - (\mu_\alpha/2\pi) d_0(z)$, получаем

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha \sqrt{m_3}}{\sqrt{2 - m_3z}} \frac{1}{\sqrt{-z}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

2. Для каждого $k = 0, 1, \dots$ имеют место равенства

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} D_k(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \lambda_{\min} - 0} D_k(z) = -\infty.$$

Отсюда согласно непрерывности $D_k(\cdot)$ следует существование $z_k \in (-\infty, \lambda_{\min})$ тако- го, что $D_k(z_k) = 0$. Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} D(z) = 1$ и $D(\cdot)$ – аналитическая функция на $\mathbf{C} \setminus [\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup [0, 2/m_3]]$ (где $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость), то должно быть $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lambda_{\min}$.

Отметим, что функция $D_k(\cdot)$ определена на $(\lambda_{\max}, 0)$ и

$$0 < 1 - m_3z - \sqrt{(m_3z)^2 - 2m_3z} < 1$$

для всех $z < 0$. Поэтому для каждого фиксированного $z \in (\lambda_{\max}, 0)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_k(z) = 1.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{k_n\}$ натуральных чисел такая, что $D_{k_n}(\lambda_{\max}/2) > 0$. Далее, заметив, что $\lim_{z \rightarrow \lambda_{\max} - 0} D_k(z) = -\infty$, из непрерывно- сти функции $D_k(\cdot)$ получаем $D_{k_n}(\xi_{k_n}) = 0$ для некоторого $\xi_{k_n} \in (\lambda_{\max}, \lambda_{\max}/2)$.

Из аналитичности функции $D(\cdot)$ на $\mathbf{C} \setminus [\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup [0, 2/m_3]]$ следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{k_n} = \lambda_{\max}$. Лемма 10 доказана.

Аналогично лемме 9 доказывается

ЛЕММА 11. Для всякого $\mu_i > 0, i = 1, 2, 3$, оператор $\bar{H}^0$ имеет единственное собственное значение $\lambda_3 < \inf \sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^0)$ с $\Delta_3(\lambda_3) = 0$, где

$$\Delta_3(z) = 1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\varepsilon(s)/m_3 - \mu_3 - z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство теоремы 2 следует из формулы (11) и лемм 9–11.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные за- мечания.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов, *ЯФ*, **12:5** (1970), 1080–1091.
- [2] R. D. Amado, J. V. Noble, *Phys. Rev. D*, **5:8** (1972), 1992–2002.
- [3] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.

- [4] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [5] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal, *Ann. Phys.*, **123**:2 (1979), 274–295.
- [6] H. Tamura, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 433–459.
- [7] С. Н. Лакаев, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [8] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [9] С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:2 (1999), 84–88.
- [10] М. Э. Муминов, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 299–317.
- [11] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [12] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 24.05.2011,
после доработки 6.09.2011