Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, В. Б. Таранов, Г. А. Эль, Обобщенные гидродинамические редукции кинетического уравнения для солитонного газа, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 294–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:18:18

© 2012 г. М. В. Павлов^{*†}, В. Б. Таранов[‡], Г. А. Эль[§]

ОБОБЩЕННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОЛИТОННОГО ГАЗА

Выводятся обобщенные многопоточные гидродинамические редукции нелокального кинетического уравнения для солитонного газа и исследуются их структура. Эти редукции не только позволяют глубже разобраться в свойствах нового кинетического уравнения, но также могут оказаться представителями нового класса интегрируемых систем гидродинамического типа за пределами общепринятой полугамильтоновой схемы.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, инварианты Римана, гидродинамическая редукция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное кинетическое уравнение для солитонного газа представляет собой интегродифференциальную систему уравнений [1]

$$f_t + (sf)_x = 0, \quad (1)$$

$$s(\eta) = S(\eta) + \frac{1}{\eta} \int_0^\infty G(\eta, \mu) f(\mu) [s(\mu) - s(\eta)] d\mu. \quad (2)$$

Здесь $f(\eta) \equiv f(\eta, x, t)$ – функция распределения и $s(\eta) \equiv s(\eta, x, t)$ – соответствующая скорость переноса. Заданные функции $S(\eta)$ и $G(\eta, \mu)$ не зависят от x и t . Функция $G(\eta, \mu)$ предполагается симметричной, т. е. $G(\eta, \mu) = G(\mu, \eta)$.

Система (1), (2), где

$$S(\eta) = 4\eta^2, \quad G(\eta, \mu) = \ln \left| \frac{\eta - \mu}{\eta + \mu} \right|, \quad (3)$$

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: maxim@math.sinica.edu.tw

[‡]Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: v.taranov@hotmail.ru

[§]Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, United Kingdom. E-mail: g.el@lboro.ac.uk

выведена в работе [2] как термодинамический предел (когда число зон стремится к бесконечности подходящим образом) уиземовских модуляционных уравнений, связанных с уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ) $\varphi_t - 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0$. Показано, что эта система описывает макроскопическую динамику солитонного газа – бесконечного набора солитонов, случайно распределенных в пространстве с конечной плотностью [3]. В контексте КдФ $\eta \geq 0$ – вещественный спектральный параметр и $f(\eta, x, t)$ – функция распределения солитонов по спектру, таким образом, $\kappa = \int_0^\infty f(\eta) d\eta = O(1)$ – пространственная плотность солитонов. Если $\kappa \ll 1$, кинетическое уравнение Захарова для разреженного газа солитонов КдФ [4] получается в первом приближении из формул (2), (3). Величина $S(\eta)$ в уравнении (2) имеет естественный смысл скорости изолированного (свободного) солитона со спектральным параметром η , а функция $G(\eta, \mu)/\eta$ – выражение для фазового сдвига этого солитона, появляющегося после его столкновения с другим солитоном, имеющим спектральный параметр $\mu < \eta$. Тогда $s(\eta, x, t)$ приобретает смысл самосогласованно определенной средней локальной скорости солитонов со спектральным параметром, близким к η . Прямой физический вывод кинетического уравнения (1), (2) для интегрируемых систем, основанный на использовании фазовых сдвигов солитонов (как это сделано в оригинальной работе Захарова [4]), предложен в работе [5].

В работе [1] многопоточные гидродинамические редукции кинетического уравнения (1), (2) изучены с помощью так называемого анзаца “холодного газа”

$$f(\eta, x, t) = \sum_{m=1}^N f^m(x, t) \delta(\eta - \eta^m), \quad (4)$$

где “спектральные” компоненты $\eta^N > \eta^{N-1} > \dots > \eta^1 > 0$ – произвольные числа. Было показано, что эти “изоспектральные” редукции холодного газа имеют форму систем гидродинамических законов сохранения:

$$u_t^i = (u^i v^i)_x, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где сохраняющиеся “плотности” $u^i = \eta^i f(\eta^i, x, t)$ и соответствующие скорости $v^i = -s(\eta^i, x, t)$ связаны алгебраически:

$$v^i = \xi_i + \sum_{m \neq i} \epsilon^{im} u^m (v^m - v^i), \quad \epsilon^{ik} = \epsilon^{ki}. \quad (6)$$

Здесь

$$\xi_i = -S(\eta^i), \quad \epsilon^{ik} = \frac{G(\eta^i, \eta^k)}{\eta^i \eta^k}, \quad i \neq k. \quad (7)$$

В работе [1] доказано, что изоспектральные редукции холодного газа (5), (6) являются интегрируемыми (полугамильтоновыми [6]) слабонелинейными системами гидродинамического типа (см. работы [7], [8]) для произвольного N . Это является строгим указанием на то, что полное кинетическое уравнение (1), (2) может оказаться интегрируемым в определенном смысле, в котором еще предстоит разобраться.

Настоящая работа посвящена более общему многопоточному гидродинамическому приближению кинетического уравнения (1), (2), которое выводится с помощью

анзаца (см., например, монографию [9])

$$f(\eta, x, t) = \sum_{m=1}^N f^m(x, t) \delta(\eta - \eta^m(x, t)), \quad (8)$$

где “спектральные” компоненты $\eta^k = \eta^k(x, t)$ являются (неизвестными) функциями от x и t в отличие от произвольных констант в формуле (4). Мы показываем, что соответствующие N -поточковые неизоспектральные гидродинамические редукции имеют вид $2N$ -компонентных систем гидродинамического типа

$$u_t^i = (u^i v^i)_x, \quad \eta_t^i = v^i \eta_x^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где функции $u^i(x, t)$, $v^i(x, t)$ и $\eta^i(x, t)$ связаны алгебраически теми же самыми уравнениями (6), (7) при условии, что соблюдены определенные ограничения на поведение функции ядра $G(\eta, \mu)$ при $\eta \rightarrow \mu$.

Система (5), (6), (9) не является интегрируемой стандартным обобщенным методом годографа Царёва, потому что она имеет только N инвариантов Римана и удвоенные характеристические скорости. Однако, принимая во внимание то, что эта система получена как точная редукция интегрируемой системы (как минимум для $S(\eta)$, $G(\eta, \mu)$, определенных в случае КдФ (3)), можно ожидать, что многопоточковые редукции (9) будут интегрируемыми с помощью некоторой модификации обобщенного метода годографа [6]. Это может привести к расширению общепринятого понятия интегрируемой системы гидродинамического типа. Мы собираемся подробно исследовать эту проблему в дальнейшем.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ

2.1. Эволюционные уравнения. Подставляя анзац (8) в уравнение (1), получаем (здесь и далее будем использовать сокращенные обозначения η^i вместо $\eta^i(x, t)$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N f^i(x, t) \delta(\eta - \eta^i) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(s(\eta, x, t) \sum_{i=1}^N f^i(x, t) \delta(\eta - \eta^i) \right) = 0.$$

Дифференцируя и собирая слагаемые с $\delta(\eta - \eta^i)$ и $\delta'(\eta - \eta^i)$, получаем

$$\sum_{n=1}^N [f_t^n + (s(\eta, x, t) f^n)_x] \delta(\eta - \eta^n) - \sum_{n=1}^N [f^n \eta_t^n + s(\eta, x, t) f^n \eta_x^n] \delta'(\eta - \eta^n) = 0. \quad (10)$$

Здесь $f^i \equiv f^i(x, t)$. Рассматривая асимптотическое поведение этого выражения в окрестности каждой точки η^i , приходим к $2N$ -компонентной системе гидродинамического типа (ср. с формулой (5))

$$f_t^i + (s(\eta^i, x, t) f^i)_x = 0, \quad \eta_t^i + s(\eta^i, x, t) \eta_x^i = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Полезно вывести гидродинамическую редукцию (11) прямым вычислением. Она получается интегрированием выражения (10) по η в малой окрестности каждой точки $\eta = \eta^i$ с весами 1 и $(\eta - \eta^i)$ соответственно.

Положим $x = x_0$. Тогда, выбрав для определенности $\eta^N > \eta^{N-1} > \dots > \eta^1 > 0$, при любых t в малой окрестности x_0 вводим N замкнутых интервалов $\sigma_i = [\eta^i - \varepsilon_i, \eta^i + \varepsilon_i]$, выбирая $\varepsilon_i > 0$ таким образом, что $\eta^j(x, t) \in \sigma_i$, если и только если $j = i$ в окрестности x_0 .

Теперь проинтегрируем (10) по интервалу σ_i :

$$\int_{\sigma_i} \left[\sum_{n=1}^N [f_t^n + (s(\eta, x, t)f^n)_x] \delta(\eta - \eta^n) - \sum_{n=1}^N [f^n \eta_t^n + s(\eta, x, t)f^n \eta_x^n] \delta'(\eta - \eta^n) \right] d\eta = 0,$$

что после интегрирования слагаемого с множителем $\delta'(\eta - \eta^i)$ по частям приводит к

$$\int_{\sigma_i} \left[\sum_{n=1}^N \left[f_t^n + s(\eta, x, t)f_x^n + \frac{\partial s(\eta, x, t)}{\partial x} f^n + \frac{\partial s(\eta, x, t)}{\partial \eta} f^n \eta_x^n \right] \delta(\eta - \eta^n) \right] d\eta = 0. \quad (12)$$

Далее, интегрирование по интервалу σ_i немедленно приводит к гидродинамическому закону сохранения

$$f_t^i + (s(\eta^i, x, t)f^i)_x = 0, \quad (13)$$

который верен в малой окрестности x_0 . Если мы будем считать, что вышеприведенные ограничения на поведение функций $\eta^i(x, t)$ сохраняются для всех $x = x_0 \in \mathbb{R}$, $t > 0$, то уравнение (13) будет верным на всей вещественной прямой. Полагая $i = 1, \dots, N$ в формуле (12), немедленно получаем первые N уравнений системы (11).

Чтобы вывести вторую половину уравнений (11), умножим выражение (10) на $(\eta - \eta^i)$ и проинтегрируем по интервалу σ_j . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} \left[\sum_{n=1}^N [f_t^n + (s(\eta, x, t)f^n)_x] \delta(\eta - \eta^n)(\eta - \eta^i) \right] d\eta - \\ - \int_{\sigma_j} \left[\sum_{n=1}^N [f^n \eta_t^n + s(\eta, x, t)f^n \eta_x^n](\eta - \eta^i) \delta'(\eta - \eta^n) \right] d\eta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если $j = i$, первый из интегралов обращается в нуль, в то время как второй интегрированием по частям приводится к виду

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \eta} ((\eta - \eta^i)[f^i \eta_t^i + s(\eta, x, t)f^i \eta_x^i]) \delta(\eta - \eta^i) d\eta = \\ = \int_{\sigma_i} \left([f^i \eta_t^i + s(\eta, x, t)f^i \eta_x^i] + (\eta - \eta^i) \frac{\partial s(\eta, x, t)}{\partial \eta} f^i \eta_x^i \right) \delta(\eta - \eta^i) d\eta = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы учли, что каждый интервал σ_i содержит только “свое” значение η^i . Вычисляя интеграл в формуле (15), получаем

$$\eta_t^i + s(\eta^i, x, t)\eta_x^i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что при $j \neq i$ снова получаются уравнения (13). Таким образом, совместимость неизоспектрального анзаца (8) с кинетическим уравнением (1), (2) приводит к уравнениям (16) для функций $\eta^i(x, t)$.

В целом $2N$ -компонентная система гидродинамического типа (11) имеет N законов сохранения

$$\partial_t(\varphi_i(\eta^i)f^i) + (s(\eta^i, x, t)\varphi_i(\eta^i)f^i)_x = 0,$$

где $\varphi_i(\eta^i)$ – произвольные функции одной переменной. Для последующих вычислений удобно выбрать $\varphi_i(\eta^i) = \eta^i$, так что система (11) приводится к виду (ср. с формулой (5))

$$u_t^i = (u^i v^i)_x, \quad \eta_t^i = v^i \eta_x^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где $u^i = \eta^i f^i$, $v^i = -s(\eta^i, x, t)$.

2.2. Полная система соотношений. Полная система соотношений, связывающая полевые переменные u^i , η^i , а также v^i в формуле (17), получается подстановкой того же самого анзаца (8) в интегральное уравнение (2). Так как мы собираемся использовать полевые переменные u^i вместо f^i , мы слегка модифицируем анзац (8) следующим образом:

$$\eta f(\eta, x, t) = \sum_{i=1}^N u^i(x, t) \delta(\eta - \eta^i). \quad (18)$$

Подстановка анзаца (18) в уравнение (2) дает

$$s(\eta, x, t) = S(\eta) + \sum_{m=1}^N u^m \frac{G(\eta, \eta^m)}{\eta \eta^m} [s(\eta^m, x, t) - s(\eta, x, t)]. \quad (19)$$

Так же как и в работе [1], мы вводим (см. формулу (7))

$$\epsilon^{ik} = \frac{G(\eta^i, \eta^k)}{\eta^i \eta^k}, \quad i \neq k. \quad (20)$$

Здесь мы сделаем важное замечание. В случае слабонелинейных редукций (5), (6), связанных с изоспектральным анзацем (4), зависимости $\xi^i = -S(\eta^i)$ и $\epsilon^{ik}(\eta^i, \eta^k)$ от соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^N\}$ (где η^i – произвольные константы) не являются важными с точки зрения интегрируемости – они только отвечают за связь с исходным кинетическим уравнением (2) (см. работу [1]). Однако в анзаце (8) η^i – зависимые переменные, $\eta^i = \eta^i(x, t)$, так что вышеприведенные зависимости становятся существенными для структуры соответствующих гидродинамических редукций.

Теперь мы переходим к пределу при $\eta \rightarrow \eta^i$ в выражении (19):

$$v^i = \sum_{m \neq i} \epsilon^{im} u^m (v^i - v^m) - S(\eta^i) + \frac{u^i}{(\eta^i)^2} \lim_{\eta \rightarrow \eta^i} G(\eta, \eta^i) (s(\eta, x, t) - s(\eta^i, x, t)), \quad (21)$$

где $v^i = -\lim_{\eta \rightarrow \eta^i} s(\eta, x, t)$ (непрерывность). Если

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta^i} G(\eta, \eta^i) (s(\eta, x, t) - s(\eta^i, x, t)) \quad (22)$$

существует, то выражение (21) принимает вид

$$v^i = \sum_{m \neq i} \epsilon^{im} u^m (v^i - v^m) - S(\eta^i) + g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}), \quad (23)$$

где

$$g_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{u^i}{(\eta^i)^2} \lim_{\eta \rightarrow \eta^i} G(\eta, \eta^i) [s(\eta, x, t) - s(\eta^i, x, t)].$$

Существование предела (22) означает, что функция $G(\eta, \mu)$ имеет особенность не более простого полюса на диагонали $\mu = \eta$.

Если предел (22) зануляется для всех $i = 1, \dots, N$ (что случается, если $G(\eta, \mu)$ либо зануляется, либо имеет особенность слабее чем простой полюс при $\mu \rightarrow \eta$), то $g_i \equiv 0$ и уравнение (23) приводится к замкнутым условиям (6), (7), полученным для изоспектральной редукции холодного газа. Ниже мы ограничим наше рассмотрение только этим наиболее важным случаем который возникает, в частности, в случае кинетического уравнения для солитонов КдФ [2], когда функция ядра $G(\eta, \mu)$ имеет только логарифмическую особенность на диагонали (см. формулу (3)).

В заключение этого раздела мы отметим, что несуществование предела (22) для некоторой данной функции $G(\mu, \eta)$ означает несовместность дельта-функционального анзаца (18) с интегральным уравнением (2) для соответствующего ядра $G(\mu, \eta)$.

3. СТРУКТУРА ОБОВЩЕННЫХ МНОГОПОТОКОВЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕДУКЦИЙ

Используя результаты работы [1] для изоспектральных гидродинамических редукций холодного газа (5), (6), мы вводим симметричную матрицу $\hat{\epsilon} = [\epsilon^{mn}]_{N \times N}$, где внедиагональные элементы $\epsilon^{ik}(\boldsymbol{\eta})$ определены с помощью соотношений (20), а диагональные элементы ϵ^{kk} – некоторые новые полевые переменные $r^k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$.

ТЕОРЕМА 1 (см. работу [1]). *Алгебраическая система (6) допускает параметрическое решение*

$$u^i = \sum_{m=1}^N \beta_{mi}, \quad v^i = \frac{1}{u^i} \sum_{m=1}^N \xi_m \beta_{mi}, \quad (24)$$

где симметрические функции $\beta_{ik}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})$ являются элементами матрицы $\hat{\beta} = [\beta_{mn}]_{N \times N}$ такой, что $\hat{\beta} \hat{\epsilon} = -\mathbf{1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим (6) эквивалентной системой

$$v^i = \xi_i + \sum_{m=1}^N \epsilon^{im} u^m (v^m - v^i) \quad (25)$$

(заметим, что суммирование осуществляется по всем m , включая $m = i$ (ср. с формулой (6)), которая может быть переписана в виде

$$v^i \left(1 + \sum_{m=1}^N \epsilon^{im} u^m \right) = \xi_i + \sum_{m=1}^N \epsilon^{im} u^m v^m.$$

Подставляя выражения (24) в вышеприведенную формулу, получаем

$$v^i \left(1 + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_{mk} \epsilon^{ki} \right) = \xi_i + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \xi_m \beta_{mk} \epsilon^{ki}. \quad (26)$$

Принимая во внимание соотношение $\hat{\beta}\hat{\epsilon} = -\mathbf{1}$, легко видеть, что выражения в обеих частях формулы (26) обращаются в нуль независимо. Таким образом, (26) – тождество, следовательно, параметрическое представление (24) совместно с системой (6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Полевые переменные $r^k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ являются рациональными функциями плотностей законов сохранения u^m , а именно

$$r^k = -\frac{1}{u^k} \left(1 + \sum_{m \neq k} u^m \epsilon^{mk}(\boldsymbol{\eta}) \right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (27)$$

В самом деле, умножая обе стороны первого соотношения (24) на ϵ^{ik} и выполняя суммирование по i , получаем

$$\sum_{m=1}^N u^m \epsilon^{mk} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \beta_{mn} \epsilon^{nk} = -1.$$

Таким образом,

$$\sum_{m \neq k} u^m \epsilon^{mk} + r^k u^k = -1,$$

что немедленно приводит к выражению (27).

ТЕОРЕМА 2. Параметризация (24) позволяет привести систему гидродинамического типа (17), (6), (7) к блочно-диагональной форме:

$$\eta_t^i = v^i \eta_x^i, \quad i = 1, \dots, N; \quad (28)$$

$$r_t^k = v^k r_x^k + \frac{1}{u^k} \left(\sum_{n \neq k} u^n (v^n - v^k) \frac{\partial \epsilon^{nk}}{\partial \eta^k} + \xi_k' \right) \eta_x^k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эволюционные уравнения (28) для функции $\eta^i(x, t)$ те же, что и в (17), т. е. необходимо только вывести уравнения (29) для функций $r^k(x, t)$, $k = 1, \dots, N$. Подставляя параметрическое представление (24) в законы сохранения (17), получаем

$$\partial_t \left(\sum_{m=1}^N \beta_{mi} \right) = \partial_x \left(\sum_{m=1}^N \xi_m \beta_{mi} \right).$$

Умножая обе стороны на ϵ^{ik} , выполняя суммирование по повторяющемуся индексу i и используя соотношение $\hat{\beta}\hat{\epsilon} = -\mathbf{1}$, получаем уравнения

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \beta_{mi} \partial_t \epsilon^{ik} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \xi_m \beta_{mi} \partial_x \epsilon^{ik} + \partial_x \xi_k. \quad (30)$$

С учетом очевидного свойства матрицы $\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})$

$$\frac{\partial \epsilon^{nk}}{\partial r^s} = \delta_{nk} \delta_{ks},$$

а также эволюционных уравнений (28) для функций η^k простое, но не вполне тривиальное вычисление показывает, что уравнения (30) приводятся к виду

$$r_t^k = v^k r_x^k + \frac{1}{u^k} \sum_{s=1}^N \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \beta_{mn} (\xi_m - v^s) \frac{\partial \epsilon^{nk}}{\partial \eta^s} + \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta^s} \right) \eta_x^s, \quad k = 1, \dots, N. \quad (31)$$

Так как (см. формулу (24))

$$\sum_{m=1}^N \beta_{mi} = u^i, \quad \sum_{m=1}^N \xi_m \beta_{mi} = u^i v^i,$$

уравнения (31) приводятся к блочно-диагональному виду (29). Теорема доказана.

Исключая u^i из формулы (24), получаем выражения, связывающие $\mathbf{v}$ с $\boldsymbol{\eta}$ и $\mathbf{r}$:

$$v^i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\sum_{m=1}^N \xi_m \beta_{mi}}{\sum_{m=1}^N \beta_{mi}}, \quad (32)$$

в то время как сами $u^i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})$ определяются из первого уравнения (24). Теперь система (28), (29) стала замкнутой.

В изоспектральном случае, когда η^i , $i = 1, 2, \dots, N$, – константы (т.е. $\partial_t \eta^i = \partial_x \eta^i = 0$), из выражения (29) следует представление системы (5), (6) в диагональной форме:

$$r_t^i = v^i(\mathbf{r}) r_x^i, \quad (33)$$

найденное в работе [1] благодаря использованию свойства слабонелинейности изоспектральных гидродинамических редукций холодного газа. Фактически теперь можно видеть, что уравнения, записанные в инвариантах Римана (33), могут быть получены прямо из системы (5), (6) с помощью параметризации (24).

Таким образом, $2N$ -компонентная гидродинамическая редукция (17) допускает параметризацию (24) алгебраической системы (6), приводящую эволюционные уравнения к форме (28), (29). Система (28), (29) имеет сдвоенные характеристические скорости $v^k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})$ (32). Однако в общем случае только N функций $\eta^k(x, t)$ являются инвариантами Римана (т.е. только половина полной системы гидродинамического типа (17) может быть записана в диагональной форме), тогда как полевые переменные $r^k(x, t)$ становятся инвариантами Римана, только если соответствующие $\eta^k = \text{const}$.

В заключение этого раздела заметим, что свойство слабонелинейности системы (33), доказанное в работе [1], означает, что $\partial v^i(\mathbf{r}) / \partial r^i = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. Ясно, что последнее свойство остается верным для характеристических скоростей $v^i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta})$ обобщенных гидродинамических редукций (28), (29). Однако теперь оно уже не связано с понятием слабонелинейности систем гидродинамического типа в классическом смысле [10], [11], так как r^k не являются больше инвариантами Римана и $\partial v^i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) / \partial \eta^i \neq 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы вывели обобщенные гидродинамические редукции нелокального кинетического уравнения для солитонного газа (1), (2), используя неизоспектральный многопотоковый анзац (8) для функции распределения. Оказалось,

что эти новые редукции имеют довольно необычную структуру, которую мы выявили, используя параметризацию (24), примененную к алгебраическим условиям замыкания (6), (7). Точнее, мы показали, что неизоспектральные N -поточковые гидродинамические редукции кинетического уравнения представляют собой $2N$ -компонентные полудиAGONАЛЬНЫЕ системы гидродинамического типа (28), (29) с N инвариантами Римана и N сдвоенными характеристическими скоростями. Хотя выведенные обобщенные гидродинамические редукции, очевидно, не могут быть проинтегрированы обобщенным методом годографа [6], в то же время они могут оказаться интегрируемыми в некотором другом смысле, пока еще не ясном. В самом деле, имея в виду, что система (28), (29) может быть выведена как обобщенная гидродинамическая редукция, связанная с интегрируемым уравнением (т. е. с уравнением КдФ для функций $S(\eta)$, $G(\eta, \mu)$, определенных в (3)), можно ожидать, что эта редукция будет интегрируемой некоторым нетривиальным расширением обобщенного метода годографа.

Побочный результат наших вычислений – демонстрация возможности приведения изоспектральных гидродинамических редукций холодного газа к диагональной форме (5)–(7), полученной ранее в работе [1]. Отметим, что приведенный здесь компактный вывод в отличие от использованного в работе [1] не основан на свойствах слабонелинейности изученных гидродинамических редукций.

Благодарности. Авторы благодарят А. Чеснокова за многочисленные дискуссии и полезные консультации. Авторы также признательны М. Жукову, заметившему возможность приведения уравнений (31) к блочно-диагональной форме (29).

Работа М.В. Павлова частично поддержана Правительством РФ (грант № 2010-220-01-077), программой президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (грант № 11-01-00197). М.В. Павлов также благодарен SISSA, Триест (Италия), где была выполнена часть этой работы.

Список литературы

- [1] G. A. El, A. M. Kamchatnov, M. V. Pavlov, S. A. Zykov, *J. Nonlinear Sci.*, **21**:2 (2011), 151–191.
- [2] G. A. El, *Phys. Lett. A*, **311**:4–5 (2003), 374–383, arXiv: nlin/0310014.
- [3] G. A. El, A. L. Krylov, S. A. Molchanov, S. Venakides, *Physica D*, **152–153** (2001), 653–664, arXiv: nlin/0007025.
- [4] В.Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **60**:3 (1971), 993–1000.
- [5] G. A. El, A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:20 (2005), 204101, 4 pp.
- [6] С.П. Царёв, *Докл. АН СССР*, **282**:3 (1985), 534–537; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [7] E. V. Ferapontov, *Phys. Lett. A*, **158**:3–4 (1991), 112–118.
- [8] М.В. Павлов, *ТМФ*, **73**:2 (1987), 316–320.
- [9] В.П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Изд-во ФИАН, М., 1971.
- [10] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:4 (1957), 537–566.
- [11] Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1968.