Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, О дифференцированиях алгебры Гейзенберга, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 163–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:10:30

© 1999 г.

В. В. Жаринов*

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Исследуются дифференцирования алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$ и связанные с ними вопросы. Используются идеи и язык формальной дифференциальной геометрии. Доказано, что все дифференцирования алгебры $\mathcal{H}$ внутренние. Выделены основные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ всех дифференцирований $\mathcal{H}$ и изучены их свойства. Показано, что сама алгебра $\mathcal{H}$, рассматриваемая как алгебра Ли (с коммутатором в качестве скобки Ли), образует одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра Гейзенберга (т.е. алгебра многочленов с образующими, удовлетворяющими квантовым перестановочным соотношениям, см., например, [1, 2]) — один из фундаментальных объектов квантовой теории, в той или иной форме она присутствует во многих физических и математических моделях и теориях. В последнее время этой алгеброй и ее обобщениями (*деформациями*) активно интересуются как физики-теоретики, так и математики, рассматривая ее и как фундаментальный объект, и как удобную модель для проверки разнообразных физических и математических идей и конструкций (см., например, [3–8]).

В предлагаемой работе изучаются алгебра Ли всех дифференцирований алгебры Гейзенберга, ее основные подалгебры и возникающие попутно структуры. Желание сделать работу замкнутой привело к тому, что она приобрела отчасти обзорный и методический характер. Так, ради полноты изложения приводятся основы формальной дифференциальной геометрии. С учетом существующих различных подходов к последней (см., например, [9–15]) это представляется разумным (особенно, что касается понятия *мультипликатора* и его роли в построении теории, см., например, [16]). Многогранность и обыденность использования алгебры Гейзенберга привели к тому, что ее основные свойства известны часто на уровне фольклора, что затрудняет указание точных ссылок на оригинальные работы. Это мотивировало написание раздела с формальным определением алгебры Гейзенберга и перечислением ее элементарных свойств. Отметим, что такое подробное введение позволило сделать дальнейшее изложение ясным и компактным, а также дать представление о месте полученных результатов в контексте общей теории.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: victor@zharinov.mian.su; zharinov@genesis.mi.ras.ru

0. ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

0.1. Обозначения. Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле нулевой характеристики. Пусть $\mathcal{A}$ – топологическая алгебра над $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ -алгебра). Обозначим:

$\text{сеп } \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}: fg = gf, \forall g \in \mathcal{A}\}$ – центр $\mathcal{A}$,
 $\text{анн } \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}: fg = gf = 0, \forall g \in \mathcal{A}\}$ – аннулятор $\mathcal{A}$,
 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ – линейное пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$.

Композиция $F, G \mapsto F \circ g$ определяет в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ структуру унитарной (т.е. содержащей единицу) ассоциативной алгебры $\mathcal{L}_0(\mathcal{A})$, а коммутатор $F, G \mapsto [F, G] = F \circ G - G \circ F$ определяет структуру алгебры Ли $\mathcal{L}_{[,] }(\mathcal{A})$.

Действие (точнее, левое действие) $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$ определяется правилом $f \mapsto \alpha(f)$, $\alpha(f)(g) = fg, \forall f, g \in \mathcal{A}$.

0.2. Мультипликаторы. Отображение $M \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ называется мультипликатором (см., например, [16]), если $M(fg) = M(f)g = fM(g), \forall f, g \in \mathcal{A}$.

Множество $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

- (1) $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитарная подалгебра алгебры $\mathcal{L}_0(\mathcal{A})$;
- (2) ядро $\ker M = \{f \in \mathcal{A}: M(f) = 0\}$ и образ $\text{im } M = M(\mathcal{A})$ суть двусторонние идеалы алгебры $\mathcal{A}, \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
- (3) $M: \text{анн } \mathcal{A} \rightarrow \text{анн } \mathcal{A}$ и $M: \text{сеп } \mathcal{A} \rightarrow \text{сеп } \mathcal{A}, \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
- (4) $[M, N](f) \in \text{анн } \mathcal{A}, \forall M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $\forall f \in \mathcal{A}$; в частности, алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, если $\text{анн } \mathcal{A} = 0$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная, то дополнительно:

- (5) $\alpha: \text{сеп } \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, т.е. действие $\alpha(f) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \forall f \in \text{сеп } \mathcal{A}$;
- (6) пересечение $\ker \alpha \cap \text{сеп } \mathcal{A} = \{f \in \text{сеп } \mathcal{A}: \alpha(f) = 0\} = \text{анн } \mathcal{A}$; в частности, отображение $\alpha: \text{сеп } \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ инъективное, если $\text{анн } \mathcal{A} = 0$;
- (7) если существует аппроксимация единицы $\{\delta_n\} \subset \mathcal{A}$ (так что $\delta_n f \rightarrow f$ и $f \delta_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty, \forall f \in \mathcal{A}$), то $\text{анн } \mathcal{A} = 0$ и образ $\alpha(\text{сеп } \mathcal{A})$ плотен в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Наконец, если $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная алгебра, то

- (8) $\alpha: \text{сеп } \mathcal{A} \simeq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, обратное отображение α^{-1} действует по правилу $M \mapsto \alpha^{-1}(M) = M(e), \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, где e – единица алгебры $\mathcal{A}$; в частности, можно отождествить алгебры $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $\text{сеп } \mathcal{A}$.

0.3. Дифференцирования. Отображение $D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ называется дифференцированием, если выполняется правило Лейбница: $D(fg) = D(f)g + fD(g), \forall f, g \in \mathcal{A}$.

Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

- (1) $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть левый $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуль, $MD = M \circ D$, $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
- (2) $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{L}_{[,]}(\mathcal{A})$;
- (3) $D: \text{ann } \mathcal{A} \rightarrow \text{ann } \mathcal{A}$ и $D: \text{sep } \mathcal{A} \rightarrow \text{sep } \mathcal{A}$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
- (4) коммутатор $[D, M] \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ правило $\widehat{D}(M) = [D, M]$, $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, задает отображение $\widehat{D}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Более того, в силу тождества Якоби

$$(5) \widehat{D}(M \circ N) = \widehat{D}(M) \circ N + M \circ \widehat{D}(N), \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \text{ и } \forall M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).$$

Таким образом, правило $D \mapsto \beta(D) = \widehat{D}$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, определяет действие $\beta: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

- (6) Действие $\beta: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ есть морфизм алгебр Ли.
- (7) Справедливо расширенное правило Лейбница: $D(M(f)) = \widehat{D}(M)(f) + M(D(f))$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $\forall f \in \mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная, то

- (8) действия α на $\text{sep } \mathcal{A}$ и β на $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ совместны, т.е. $\widehat{D}(\alpha(f)) = \alpha(D(f))$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $\forall f \in \text{sep } \mathcal{A}$;
- (9) для каждого $f \in \mathcal{A}$ действие $\alpha_-(f): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $\alpha_-(f)(g) = [f, g]$, $g \in \mathcal{A}$, является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$ (т.е. $\alpha_-(f) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$).

Дифференцирование вида $\alpha_-(f)$ называется *внутренним*, очевидно, оно нетривиальное, если $f \notin \text{sep } \mathcal{A}$.

0.4. Константы. Элемент $f \in \mathcal{A}$ называется *константой*, если $D(f) = 0$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Обозначим $\text{con } \mathcal{A}$ множество всех констант алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, что $\text{con } \mathcal{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, причем если алгебра $\mathcal{A}$ унитарна, то ее единица $e \in \text{con } \mathcal{A}$.

Подмножество $\mathcal{S} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ называется *тотальным*, если условие $D(f) = 0$, $\forall D \in \mathcal{S}$, влечет $f \in \text{con } \mathcal{A}$.

0.5. Дифференциальные алгебры. Дифференциальная алгебра есть пара $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$, где $\mathcal{A}$ — алгебра, а $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ (см., например, [17, 18]). Дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$ называется *стандартной*, если $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ есть свободный конечномерный подмодуль левого $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуля $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ с попарно коммутирующим базисом $D_1, \dots, D_m \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ ($[D_\mu, D_\nu] = 0$, $\mu, \nu \in \overline{1, m}$), так что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{A}) \equiv [D] = \left\{ D = \sum_{\mu=1}^m M_\mu D_\mu : M_\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mu \in \overline{1, m} \right\}$$

(здесь и всюду ниже $\overline{k, l} \equiv \{k, k+1, \dots, l\}$). Дифференциальные алгебры возникают в алгебро-геометрическом подходе к дифференциальным уравнениям. Учитывая это, мы

будем использовать принятую там терминологию (см., например, [19, 20]). Так, дифференцирования из подалгебры $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ называются *картановыми*.

Дифференцирование $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ называется дифференцированием *Ли–Беклунда*, если $[X, D] \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$, $\forall D \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$. Множество всех таких дифференцирований образует подалгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, причем по построению $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ есть идеал в $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Фактор-алгебра $\text{Sym}_{\mathfrak{C}(\mathcal{A})} \mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{A})/\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ называется алгеброй Ли *симметрий* дифференциальной алгебры $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$.

0.6. Дифференциальные формы. Будем считать, что изучаемая алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию:

- (i) алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная (например, $\text{ann } \mathcal{A} = 0$).

В этом случае $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуль, и определена его *внешняя алгебра*

$$\wedge^* \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \prod_{r=0}^{\infty} \wedge^r \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \wedge^0 \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad \wedge^1 \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \dots$$

В частности, для любых $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *внешнее произведение*

$$D_1 \wedge \dots \wedge D_r = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \text{sign } \pi D_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes D_{\pi(r)} \in \wedge^r \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

где $\mathfrak{S}_r$ – группа всех перестановок чисел $1, \dots, r$.

Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная $\mathbb{F}$ -алгебра такая, что:

- (ii) определен морфизм ассоциативных алгебр $\varphi: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{K})$,
- (iii) определен морфизм алгебр Ли $\psi: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{K})$,
- (iv) выполнены *условия согласования*

$$\psi(MD) = \varphi(M)\psi(D) \quad \text{и} \quad \varphi([M, D]) = [\varphi(M), \psi(D)], \quad \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

(Напомним, что $MD \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $[M, D] \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.) В частности, алгебра $\mathcal{K}$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуль.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условиям (ii)–(iv) удовлетворяют, например, следующие алгебры (считаем, что условие (i) выполнено):

- (1) сама алгебра $\mathcal{A}$, в этом случае $\varphi = \text{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$ и $\psi = \text{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}$;
- (2) алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, в этом случае $\varphi = \text{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$ (поясним, что в силу (i) $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \cong \mathfrak{M}(\mathcal{A})$), а морфизм $\psi: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ определяется правилом $\psi(D)(M) = [D, M]$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
- (3) алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ при условии $[\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A})] = 0$, здесь морфизм $\varphi: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ дается правилом $\varphi(M)(X) = MX$, а морфизм $\psi: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ – правилом $\psi(D)(X) = [D, X]$, $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $D, X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Отметим, что условие $[\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A})] = 0$ выполняется, если $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{F} \cdot \text{id}_{\mathcal{A}}$, очевидно, что в этом случае условие (i) также выполнено.

Положим

$$\Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}(\wedge^* \mathfrak{D}(\mathcal{A}); \mathcal{K}) = \sum_{r=0}^{\infty} \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}).$$

Подробнее,

$$\Omega^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}); \mathcal{K}) \cong \mathcal{K}$$

(изоморфизм задается правилом $\Omega^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \ni \omega \mapsto k = \omega(\text{id}_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{K}$), а при $r > 0$

$$\omega(D_1, \dots, D_r) \equiv \omega(D_1 \wedge \dots \wedge D_r), \quad \omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}),$$

есть кососимметрическая функция, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -линейная по каждому из аргументов $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Элементы из $\Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ называются *дифференциальными r -формами*.

0.7. Операции над дифференциальными формами. Перечислим основные структуры, определенные на $\Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, и их свойства. Прежде всего отметим, что $\Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуль, причем по определению

$$(M\omega)(D_1, \dots, D_r) = \varphi(M)(\omega(D_1, \dots, D_r))$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ и $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Линейные операции (считаем $\Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = 0$ при $r < 0$ и $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$):

$$\begin{array}{ll} \text{свертка} & \iota_D: \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^{r-1}(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \\ \text{производная Ли} & L_D: \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \\ \text{дифференциал} & d: \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow \Omega^{r+1}(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \end{array}$$

зададим соответственно формулами (считаем $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$)

$$(\iota_D \omega)(D_1, \dots, D_{r-1}) = \omega(D, D_1, \dots, D_{r-1}), \quad D_1, \dots, D_{r-1} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

(в частности, $\iota_D \omega = 0$ при $r = 0$);

$$(L_D \omega)(D_1, \dots, D_r) = \psi(D)(\omega(D_1, \dots, D_r)) - \sum_{i=1}^r \omega(D_1, \dots, [D, D_i], \dots, D_r)$$

для $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и, наконец,

$$\begin{aligned} (d\omega)(D_0, \dots, D_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \psi(D_i)(\omega(D_0, \dots, \check{D}_i, \dots, D_r)) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \omega([D_i, D_j], D_0, \dots, \check{D}_i, \dots, \check{D}_j, \dots, D_r) \end{aligned}$$

для $D_0, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, значок $\check{}$ над какой-либо переменной означает, что эта переменная опущена.

Введенные операции обладают стандартными свойствами:

- (1) $\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A});$
- (2) $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A});$
- (3) $d \circ d = 0;$
- (4) $L_D = d \circ \iota_D + \iota_D \circ d, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A});$
- (5) $L_D \circ d = d \circ L_D, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$

Корректность приведенных определений и справедливость соотношений (1)–(5) проверяется с помощью условий (i)–(iv) раздела 0.6.

0.8. Алгебра дифференциальных форм. Определим в $\Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ *умножение* правилом

$$\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \quad \theta \in \Omega^s(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \mapsto \omega \cdot \theta \in \Omega^{r+s}(\mathcal{A}; \mathcal{K}),$$

где

$$\begin{aligned} (\omega \cdot \theta)(D_1, \dots, D_{r+s}) &= \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{r+s}} \text{sign } \pi \omega(D_{\pi(1)}, \dots, D_{\pi(r)}) \theta(D_{\pi(r+1)}, \dots, D_{\pi(r+s)}) \end{aligned}$$

для всех $D_1, \dots, D_{r+s} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Это умножение обладает следующими свойствами (считаем $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \quad \theta \in \Omega^s(\mathcal{A}; \mathcal{K})$):

- (1) $\iota_D(\omega \cdot \theta) = (\iota_D \omega) \cdot \theta + (-1)^r \omega \cdot (\iota_D \theta), \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A});$
- (2) $L_D(\omega \cdot \theta) = (L_D \omega) \cdot \theta + \omega \cdot (L_D \theta), \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A});$
- (3) $d(\omega \cdot \theta) = (d\omega) \cdot \theta + (-1)^r \omega \cdot (d\theta);$
- (4) если алгебра $\mathcal{K}$ коммутативная, то $\omega \cdot \theta = (-1)^{rs} \theta \cdot \omega$.

Корректность определения операции умножения и справедливость формул (1)–(4) проверяется с помощью условий (i)–(iv) раздела 0.6.

0.9. Когомологии де Рама. В силу пункта (3) раздела 0.7 определен комплекс линейных пространств

$$0 \rightarrow \Omega^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \dots,$$

его когомологии $H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \quad r = 0, 1, \dots$, называются *когомологиями де Рама алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в алгебре $\mathcal{K}$* . Например,

$$H^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \{\omega \in \mathcal{K}: \psi(D)(\omega) = 0, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})\}.$$

Положим

$$H^*(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \sum_{r=0}^{\infty} H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}).$$

Правило

$$[\omega] \in H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \quad [\theta] \in H^s(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \mapsto [\omega] \cdot [\theta] = [\omega \cdot \theta] \in H^{r+s}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$$

определяет в линейном пространстве $H^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ *умножение* и превращает его в $\mathbb{F}$ -алгебру.

0.10. Картановы формы. Пусть $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$ – дифференциальная алгебра (см. раздел 0.5), $\mathcal{K}$ – некоторая $\mathbb{F}$ -алгебра, и по-прежнему выполнены условия (i)–(iv) раздела 0.6.

Дифференциальная r -форма $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ называется s -картановой, если $\omega(D_1, \dots, D_r) = 0$ всякий раз, когда среди дифференцирований $D_1, \dots, D_r$ имеются хотя бы $r - s + 1$ картановых. $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуль всех s -картановых r -форм обозначим через $C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$.

Приведем основные свойства операций над картановыми формами (по определению $C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ при $s < 0$ и $C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = 0$ при $s > r$ или $r < 0$):

- (1) $\omega \cdot \theta \in C^{s+q} \Omega^{r+p}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\forall \omega \in C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\theta \in C^q \Omega^p(\mathcal{A}; \mathcal{K})$;
- (2) $\iota_D: C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow C^{s-1} \Omega^{r-1}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
- (3) $\iota_D: C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow C^s \Omega^{r-1}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\forall D \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$;
- (4) $L_D: C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow C^{s-1} \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
- (5) $L_D: C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $\forall D \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$;
- (6) $d: C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \rightarrow C^s \Omega^{r+1}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$.

0.11. Спектральная последовательность. Сохраняем обозначения раздела 0.10 и добавляем сокращение $C^s \Omega^r \equiv C^s \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$. По построению имеется фильтрация

$$\Omega^r = C^0 \Omega^r \supset C^1 \Omega^r \supset C^2 \Omega^r \supset \dots \supset C^r \Omega^r \supset 0,$$

совместимая с градуировкой

$$\Omega^* = \sum_{r=0}^{\infty} \Omega^r$$

и дифференциалом $d: \Omega^r \rightarrow \Omega^{r+1}$, $r = 0, 1, \dots$. Согласно общей теории (см., например, [21]) определена спектральная последовательность $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}; p, q, r = 0, 1, \dots\}$ с членами

$$E_r^{p,q} \equiv E_r^{p,q}(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}); \mathcal{K}) = \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}},$$

где

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= \{\omega \in C^p \Omega^{p+q} : d\omega \in C^{p+r} \Omega^{p+q+1}\}, \\ B_r^{p,q} &= \{\omega = d\theta \in C^p \Omega^{p+q} : \theta \in C^{p-r} \Omega^{p+q-1}\}, \end{aligned}$$

а линейные отображения

$$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

индуцированы дифференциалом d (т.е. $d_r^{p,q}[\omega] = [d\omega]$, $\forall [\omega] \in E_r^{p,q}$). Члены порядка $r = \infty$ определяются формулами

$$E_{\infty}^{p,q} = \frac{Z_{\infty}^{p,q}}{B_{\infty}^{p,q} + Z_{\infty}^{p+1,q-1}}, \quad p, q = 0, 1, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} Z_{\infty}^{p,q} &= \{\omega \in C^p \Omega^{p+q} : d\omega = 0\}, \\ B_{\infty}^{p,q} &= \{\omega = d\theta \in C^p \Omega^{p+q} : \theta \in \Omega^{p+q-1}\}. \end{aligned}$$

Перечислим основные свойства спектральной последовательности:

- (1) $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p, q} = 0$, $E_{r+1}^{p, q} = \ker d_r^{p, q} / \operatorname{im} d_r^{p-r, q+r-1}$;
- (2) $E_\infty^{p, q} = E_r^{p, q}$, $r > \max\{p, q+1\}$.

Пусть симметрия $[D] \in \operatorname{Sym} \mathcal{A}$ (см. раздел 0.5),

- (3) линейное отображение $\iota_{[D]}: E_r^{p, q} \rightarrow E_r^{p-r, q+r-1}$ определено правилом $\iota_{[D]}[\omega] = [\iota_D \omega]$, $[\omega] \in E_r^{p, q}$;
- (4) линейное отображение $L_{[D]}: E_r^{p, q} \rightarrow E_r^{p, q}$ определено аналогичным правилом $L_{[D]}[\omega] = [L_D \omega]$, $[\omega] \in E_r^{p, q}$;
- (5) $L_{[D]} \circ d_r^{p, q} = d_r^{p, q} \circ L_{[D]}$;
- (6) $L_{[D]} = \iota_{[D]} \circ d_r^{p, q} + d_r^{p, q} \circ \iota_{[D]}$.

0.12. Связь с когомологиями де Рама. Сохраняем соглашения раздела 0.11 и добавим сокращение $H^k \equiv H^k(\mathcal{A}; \mathcal{K})$. Фильтрация дифференциальных форм картановыми формами (раздела 0.11) порождает фильтрацию когомологий де Рама

$$H^k = H^{0, k} \supset H^{1, k} \supset H^{2, k} \supset \dots \supset H^{k, k} \supset 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где линейные пространства

$$H^{p, k} = \frac{\{\omega \in C^p \Omega^k : d\omega = 0\}}{\{\omega = d\theta \in C^p \Omega^k : \theta \in \Omega^{k-1}\}}, \quad p, k = 0, 1, \dots$$

- (1) Справедливы равенства $E_\infty^{p, k-p} = H^{p, k} / H^{p+1, k}$, $p, k = 0, 1, \dots$, другими словами, имеется равенство градуированных линейных пространств $E_\infty^k = G(H^k)$, $k = 0, 1, \dots$, где по определению

$$E_\infty^k = \sum_{p+q=k} E_\infty^{p, q},$$

а

$$G(H^k) = \sum_{p=0}^k H^{p, k} / H^{p+1, k}$$

— градуированное пространство, ассоциированное с введенной выше фильтрацией.

1. АЛГЕБРА ГЕЙЗЕНБЕРГА

1.1. Обозначения. Будем использовать мультииндексные обозначения:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \supset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \supset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\};$$

$$i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad d \in \mathbb{N} \text{ фиксировано};$$

$$|i| = i_1 + \dots + i_d, \quad i \pm j = (i_1 \pm j_1, \dots, i_d \pm j_d), \quad i, j \in \mathbb{Z};$$

$$(\mu) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \text{ единица на } \mu\text{-м месте, } \mu \in \overline{1, d} \equiv \{1, \dots, d\};$$

$$i \leq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d, \text{ если } i_\mu \leq j_\mu \text{ для всех } \mu \in \overline{1, d};$$

$$i! = i_1! \dots i_d!, \quad i \in \mathbb{Z}^d \quad (i! = \infty \text{ при } i \in \{-1, -2, \dots\});$$

$$\begin{aligned} \binom{i}{j} &= \frac{i!}{j!(i-j)!}, \quad i \in \mathbb{Z}_+^d, \quad j \in \mathbb{Z}^d; \\ \binom{i, j}{k} &= k! \binom{i}{k} \binom{j}{k}, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}_+^d; \\ \binom{i, j; k, l}{m} &= \binom{j, k}{m} - \binom{l, i}{m}, \quad i, j, k, l, m \in \mathbb{Z}_+^d. \end{aligned}$$

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем считать, что фиксированы поле $\mathbb{F}$ нулевой характеристики ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$), размерность $d \in \mathbb{N}$ и константа $\varkappa \in \mathbb{F}$, $\varkappa \neq 0$.

Пусть $\mathbb{F}\langle r \rangle$ — алгебра некоммутирующих многочленов от образующих $r = (q, p)$, $q = (q_1, \dots, q_d)$, $p = (p_1, \dots, p_d)$ с элементами $f(r) = \sum_A c_A r^A$, где

$$\begin{aligned} r_\alpha &= q_\alpha \text{ при } \alpha \in \overline{1, d}, \quad r_\alpha = p_{\alpha-d} \text{ при } \alpha \in \overline{d+1, 2d}; \\ A &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_\nu \in \overline{1, 2d}, \quad \nu \in \overline{1, N}, \quad N = |A|; \\ c_A &= c_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \in \mathbb{F}, \quad \text{лишь конечное число } c_A \neq 0; \\ r^A &= r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_N}. \end{aligned}$$

Определяющие соотношения (квантовые перестановочные соотношения):

$$q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu = 0, \quad p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu = 0, \quad p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d},$$

порождают двусторонний идеал $\mathcal{J}$ алгебры $\mathbb{F}\langle r \rangle$. Алгебра Гейзенберга определяется как фактор-алгебра $\mathcal{H} = \mathbb{F}\langle r \rangle / \mathcal{J}$.

1.3. Нормальные многочлены. Многочлен $f \in \mathbb{F}\langle r \rangle$ называется *нормальным*, если

$$f = f(q, p) = \sum_{i, j} f_{ij} q^i p^j,$$

где лишь конечное число коэффициентов $f_{ij} \in \mathbb{F}$ ненулевые, $q^i = (q_1)^{i_1} \dots (q_d)^{i_d}$, $p^j = (p_1)^{j_1} \dots (p_d)^{j_d}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$.

1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Справедливы равенства

$$p^j q^i = \sum_k \varkappa^{|k|} \binom{j, i}{k} q^{i-k} p^{j-k} \pmod{\mathcal{J}}, \quad j, i \in \mathbb{Z}_+^d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $d = 1$, так что $i, j, k \in \mathbb{Z}_+$. Вычисления проводим по $\text{mod } \mathcal{J}$, т.е. пренебрегая слагаемыми, лежащими в идеале $\mathcal{J}$. Равенства тривиально справедливы при $i = j = 0$, при $i = 0$, $j > 0$ и при $i > 0$, $j = 0$. Легко также проверить, что

$$p q^i = q^i p + i \varkappa q^{i-1} \quad \text{и} \quad p^j q = q p^j + j \varkappa p^{j-1}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что равенства справедливы при некоторых $i, j > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 p^{j+1}q^i &= p(p^j q^i) = p \sum_k \varkappa^k \binom{j,i}{k} q^{i-k} p^{j-k} = \sum_k \varkappa^k \binom{j,i}{k} (pq^{i-k}) p^{j-k} = \\
 &= \sum_k \varkappa^k \binom{j,i}{k} (q^{i-k} p + (i-k) \varkappa q^{i-k-1}) p^{j-k} = \\
 &= \sum_k \varkappa^k \binom{j,i}{k} q^{i-k} p^{j+1-k} + \sum_k \varkappa^{k+1} \binom{j,i}{k} (i-k) q^{i-k-1} p^{j-k} = \\
 &= \sum_k \varkappa \left[\binom{j,i}{k} + (i+1-k) \binom{j,i}{k-1} \right] q^{i-k} p^{j+1-k} = \sum_k \varkappa^k \binom{j+1,i}{k} q^{i-k} p^{j+1-k},
 \end{aligned}$$

поскольку

$$\binom{j,i}{k} + (i+1-k) \binom{j,i}{k-1} = \binom{j+1,i}{k}.$$

Аналогично проверяется переход $j, i \mapsto j, i+1$. Итак, в случае $d=1$ равенства верны.

Случай $d > 1$ сводится к одномерному с помощью коммутационных соотношений $p_\mu q_\nu = q_\nu p_\mu$ при $\mu \neq \nu$.

1.5. СЛЕДСТВИЕ. Каждый многочлен $f \in \mathbb{F}\langle r \rangle$ имеет представление $f(r) = g(q, p) + h(r)$, где $g(q, p)$ – нормальный многочлен, а $h(r) \in \mathcal{J}$.

1.6. Операторное представление. Пусть $\mathbb{F}[x]$ – алгебра коммутативных многочленов от $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{F}^d$, $\mathfrak{L}(\mathbb{F}[x])$ – алгебра непрерывных линейных отображений $\mathbb{F}[x]$ в себя. Правило $q_\mu, p_\mu \mapsto \widetilde{q}_\mu, \widetilde{p}_\mu$, $\mu \in \overline{1, d}$, где

$$(\widetilde{q}_\mu \varphi)(x) = x_\mu \varphi(x), \quad (\widetilde{p}_\mu \varphi)(x) = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \quad \varphi \in \mathbb{F}[x],$$

задает представление $\Pi: \mathbb{F}\langle r \rangle \rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{F}[x])$, $f(r) \mapsto f(\widetilde{r})$, алгебры некоммутативных многочленов $\mathbb{F}\langle r \rangle$ в $\mathbb{F}[x]$.

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f(q, p)$ – нормальный многочлен и $f(\widetilde{q}, \widetilde{p})$ – соответствующий оператор; $f(\widetilde{q}, \widetilde{p}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(q, p) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\widetilde{p}^j(x^k) = \varkappa^{|j|} j! \binom{k}{j} x^{k-j}$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}_+^d$. Далее, пусть $f(\widetilde{q}, \widetilde{p}) = 0$, где

$$f(q, p) = \sum_{i,j} c_{ij} q^i p^j = \sum_j \chi_j(q) p^j, \quad \chi_j(q) = \sum_i c_{ij} q^i.$$

Тогда, в частности,

$$f(\widetilde{q}, \widetilde{p})(x^k) = \sum_{j \leq k} \chi_j(x) \varkappa^{|j|} j! \binom{k}{j} x^{k-j} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Полагая последовательно $|k| = 0, 1, 2, \dots$, убедимся, что многочлены $\chi_j(q) = 0$ при $|j| = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда $f(q, p) = 0$, что и требовалось доказать.

1.8. СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо равенство $\ker \Pi = \mathcal{J}$, где $\ker \Pi$ – ядро морфизма Π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложения 1.7 с учетом следствия 1.5 и очевидного включения $\mathcal{J} \subset \ker \Pi$.

1.9. ТЕОРЕМА. *Алгебра Гейзенберга $\mathcal{H}$ канонически изоморфна алгебре всех нормальных многочленов из $\mathbb{F}\langle r \rangle$ с обычными линейными операциями и умножением, задаваемым правилом*

$$q^i p^j \cdot q^k p^l = \sum_{m,n} A_{mn}^{ij,kl} q^m p^n, \quad A_{mn}^{ij,kl} = \sum_r \varkappa^{|r|} \binom{j,k}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r},$$

где $i, j, k, l, m, n, r \in \mathbb{Z}_+^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложений 1.4, 1.7 и следствий 1.5, 1.8.

Ниже мы отождествляем $\mathcal{H}$ с этой алгеброй нормальных многочленов.

1.10. Действия над нормальными многочленами. Из правила умножения теоремы 1.9 следует, что коммутатор имеет вид

$$\begin{aligned} [q^i p^j, q^k p^l] &= \varkappa \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} q^m p^n, \\ C_{mn}^{ij,kl} &= \frac{1}{\varkappa} (A_{mn}^{ij,kl} - A_{mn}^{kl,ij}) = \sum_r \varkappa^{|r|-1} \binom{i,j;k,l}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $i, j, k, l, m, n, r \in \mathbb{Z}_+^d$. В частности, если $f(q, p) = \sum_{i,j} f_{ij} q^i p^j$ – нормальный многочлен, то

$$\begin{aligned} [p_\mu, f(q, p)] &= \varkappa \frac{\partial f(q, p)}{\partial q_\mu}, \\ [q_\mu, f(q, p)] &= -\varkappa \frac{\partial f(q, p)}{\partial p_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где частные производные вычисляются по обычным формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(q, p)}{\partial q_\mu} &= \sum_{i,j} f_{ij} i_\mu q^{i-(\mu)} p^j, \\ \frac{\partial f(q, p)}{\partial p_\mu} &= \sum_{i,j} f_{ij} j_\mu q^i p^{j-(\mu)}. \end{aligned}$$

Формулы (1.2) имеют обобщения

$$[p^j, f] = \sum_{|m| \geq 1} \varkappa^{|m|} \binom{j}{m} \frac{\partial^{|m|} f}{\partial q^m} p^{j-m}, \quad [q^i, f] = - \sum_{|m| \geq 1} \varkappa^{|m|} \binom{i}{m} q^{i-m} \frac{\partial^{|m|} f}{\partial p^m}, \quad (1.3)$$

где $f = f(q, p)$ – нормальный многочлен, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$.

Частные производные нормальных многочленов обладают многими обычными свойствами, например, смешанные производные, взятые в различных порядках, совпадают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial q_\mu}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\nu \partial p_\mu}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial p_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\nu \partial q_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}.$$

Далее, система

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial q_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \quad (1.4)$$

имеет в классе нормальных многочленов общее решение

$$f_\mu(q, p) = \frac{g(q, p)}{\partial q_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d}, \quad g(q, p) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^d q_\nu f_\nu(tq, p) dt + h(p), \quad (1.5)$$

$h(p)$ – произвольный нормальный многочлен, не зависящий от q .

Аналогично система

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial p_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \quad (1.6)$$

имеет общее решение

$$f_\mu(q, p) = \frac{g(q, p)}{\partial p_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d}, \quad g(q, p) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^d f_\nu(q, tp) p_\nu dt + h(q). \quad (1.7)$$

Наконец, система

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial p_\nu} = 0, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \quad (1.8)$$

имеет общее решение

$$f(q, p) = g(q) + h(p) \quad (1.9)$$

с произвольными $g(q)$ и $h(p)$.

1.11. Свойства алгебры Гейзенберга. Перечислим основные свойства алгебры $\mathcal{H}$ с короткими пояснениями.

- (1) Нормальные мономы $\rho^{ij} \equiv q^i p^j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, образуют базис линейного пространства $\mathcal{H}$, моном $1 = \rho^{00}$ является единицей алгебры $\mathcal{H}$.
- (2) Алгебра $\mathcal{H}$ ассоциативная.

Заметим, что из ассоциативности умножения следует, что коэффициенты $A_{mn}^{ij, kl}$ (см. теорему 1.9) удовлетворяют некоторым тождествам, которые можно проверить и непосредственно.

- (3) Алгебра $\mathcal{H}$ некоммутативная, ее центр $\text{сеп } \mathcal{H} = \mathbb{F}$.

Действительно, пусть нормальный многочлен $f(q, p) \in \text{сеп } \mathcal{H}$. В частности, $[p_\mu, f(q, p)] = 0$. Полагая $f(q, p) = \sum_j \chi_j(q) p^j$, из (1.2) выводим

$$\frac{\partial \chi_j(q)}{\partial q_\mu} = 0$$

при всех $\mu \in \overline{1, d}$ и $j \in \mathbb{Z}_+^d$, откуда $f = f(p)$. Далее, $[q_\mu, f(p)] = 0$, т.е. в силу (1.2)

$$\frac{\partial f(p)}{\partial q_\mu} = 0$$

для всех $\mu \in \overline{1, d}$, так что $f = c \cdot 1$, $c \in \mathbb{F}$, что и требовалось доказать.

(4) Алгебра $\mathcal{H}$ простая, т.е. не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.

Действительно, пусть $\mathcal{I}$ – ненулевой двусторонний идеал алгебры $\mathcal{H}$ и $f \in \mathcal{I}$, $f(q, p) = \sum_j \chi_j(q) p^j \neq 0$. Из определения двустороннего идеала, в частности, следует, что $p_\mu f, f p_\mu \in \mathcal{I}$ для всех $\mu \in \overline{1, d}$, откуда

$$\sum_j \frac{\partial \chi_j(q)}{\partial q_\mu} p^j = \frac{1}{\varkappa} [p_\mu, f] \in \mathcal{I}.$$

По индукции

$$\sum_j \frac{\partial^k \chi_j(q)}{\partial q^k} p^j \in \mathcal{I}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Выбирая k подходящим образом, построим ненулевой многочлен $g(p) = \sum_j c_j p^j \in \mathcal{I}$, $c_j \in \mathbb{F}$. Далее, $q_\mu g, g q_\mu \in \mathcal{I}$ для всех $\mu \in \overline{1, d}$, откуда

$$\frac{\partial^l g(p)}{\partial p^l} \in \mathcal{I}$$

при всех $l \in \mathbb{Z}_+^d$. Выбирая l подходящим образом, получим ненулевую постоянную $c = c \cdot 1 \in \mathcal{I}$, $0 \neq c \in \mathbb{F}$. Итак, $1 \in \mathcal{I}$ и, значит, $\mathcal{I} = \mathcal{H}$, что и требовалось доказать.

(5) Алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$.

Утверждение (5) следует из равенства $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \text{сеп } \mathcal{H}$ (см. пункт (8) раздела 0.2) и свойства (3).

(6) Алгебра $\mathcal{H}$ имеет $\mathbb{Z}^d$ -градуировку.

Действительно, каждой паре мультииндексов $i, j \in \mathbb{Z}^d$ поставим в соответствие *градуировку* $\gamma(i, j) = i - j$, а для каждого мультииндекса $k \in \mathbb{Z}^d$ рассмотрим

$$\mathcal{H}_k = \left\{ f(q, p) = \sum_{i-j=k} f_{ij} \rho^{ij} \in \mathcal{H} \right\}$$

– линейное пространство γ -однородных нормальных многочленов порядка k . Тогда

$$\mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k \cdot \mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}_{k+l},$$

т.е. $fg \in \mathcal{H}_{k+l}$, если $f \in \mathcal{H}_k$, $g \in \mathcal{H}_l$ (см. правило умножения теоремы 1.9).

(7) В алгебре $\mathcal{H}$ определены две операции транспонирования.

Первая операция транспонирования определяется как линейное отображение ${}^t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, однозначно задаваемое правилом $(q^i p^j)^t = q^j p^i$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$. Действительно, это правило согласовано с определяющими соотношениями алгебры Гейзенберга (см. раздел 1.2), например, $(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu})^t = p_\nu q_\mu - q_\mu p_\nu - \varkappa \delta_{\nu\mu}$, $\mu, \nu \in \overline{1, d}$, и, кроме того, $(f^t)^t = f$, $(fg)^t = g^t f^t$, $f, g \in \mathcal{H}$. Обратим внимание на то, что ${}^t: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, т.е. транспонирование t меняет градуировку на противоположную, оставляя неподвижным нейтральное пространство $\mathcal{H}_0$.

Аналогичным образом линейное отображение ${}^\tau: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, задаваемое правилом

$$(q^i p^j)^\tau = (-p)^j q^i = (-1)^{|j|} \sum_k \varkappa^{|k|} \binom{i, j}{k} q^{i-k} p^{j-k}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+^d,$$

определяет альтернативную операцию транспонирования в $\mathcal{H}$. В этом случае ${}^\tau: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$, т.е. транспонирование ${}^\tau$ сохраняет градуировку.

Правило

$$(Af)(q, p) = f\left(\frac{p+q}{2}, p-q\right), \quad f(q, p) \in \mathcal{H},$$

определяет линейное отображение $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Оно обратимо,

$$(A^{-1}g)(q, p) = g\left(q - \frac{1}{2}p, q + \frac{1}{2}p\right), \quad g \in \mathcal{H},$$

согласовано с определяющими соотношениями раздела 1.2, например

$$\begin{aligned} A(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2} \left\{ (p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) + (p_\nu q_\mu - q_\mu p_\nu - \varkappa \delta_{\nu\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + (p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu}) + (q_\nu q_\mu - q_\mu q_\nu) \right\}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \end{aligned}$$

и, следовательно, является автоморфизмом алгебры $\mathcal{H}$.

Легко проверяется, что автоморфизм A переводит операции транспонирования ${}^\tau$ и t друг в друга, т.е. $(A(f))^t = A(f^\tau)$, $f \in \mathcal{H}$.

Транспонирования в $\mathcal{H}$, в свою очередь, порождают транспонирования в алгебре $\mathfrak{L}_0(\mathcal{H})$ правилами

$$F^t(f) = (F(f^t))^t, \quad F^\tau(f) = (F(f^\tau))^\tau, \quad F \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \quad f \in \mathcal{H}.$$

(8) В алгебре $\mathcal{H}$ определено понятие четности.

Действительно, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ev}} + \mathcal{H}_{\text{od}}$, где

$$\mathcal{H}_{\text{ev}} = \{f \in \mathcal{H}: f(-q, -p) = f(q, p)\}, \quad \mathcal{H}_{\text{od}} = \{f \in \mathcal{H}: f(-q, -p) = -f(q, p)\},$$

причем

$$\mathcal{H}_{\text{ev}} \cdot \mathcal{H}_{\text{ev}}, \mathcal{H}_{\text{od}} \cdot \mathcal{H}_{\text{od}} \subset \mathcal{H}_{\text{ev}}, \quad \mathcal{H}_{\text{ev}} \cdot \mathcal{H}_{\text{od}}, \mathcal{H}_{\text{od}} \cdot \mathcal{H}_{\text{ev}} \subset \mathcal{H}_{\text{od}}.$$

(9) В алгебре $\mathcal{H}$ определена скобка Пуассона

Действительно, билинейная операция

$$\mathcal{H} \ni f, g \mapsto \{f, g\} = \frac{1}{\varkappa} [f, g] \in \mathcal{H}$$

обладает всеми необходимыми свойствами. В частности,

$$\{\rho^{ij}, \rho^{kl}\} = \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn}, \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+^d,$$

структурные константы $C_{mn}^{ij,kl}$ определены в разделе 1.10.

Таким образом, в множестве нормальных многочленов $\mathcal{H}$ определены следующие структуры: *линейное пространство* – множество $\mathcal{H}$ плюс обычные $\mathbb{F}$ -линейные операции, (*ассоциативная*) *алгебра* – линейное пространство $\mathcal{H}$ плюс ассоциативное некоммутативное умножение, *алгебра Пуассона* – алгебра $\mathcal{H}$ плюс скобка Пуассона, *алгебра Ли* – линейное пространство $\mathcal{H}$ плюс скобка Пуассона, рассматриваемая как скобка Ли.

2. АЛГЕБРА ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

2.1. Внутренние дифференцирования. Согласно пункту (9) раздела 0.3 в алгебре $\mathcal{H}$ есть внутренние дифференцирования $\alpha_-(f)$, задаваемые правилом

$$\alpha_-(f)(g) = \frac{1}{\varkappa} [f, g] = \{f, g\}, \quad f, g \in \mathcal{H}$$

(множитель $1/\varkappa$ добавлен для удобства, ср. с (1.2)); очевидно, что дифференцирование $\alpha_-(f)$ нетривиальное, если нормальный многочлен $f(q, p) \neq \mathbb{F} \cdot 1$. Итак,

- (1) *правило* $f \mapsto \alpha_-(f)$ *задает линейное отображение* $\alpha_-: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{H})$, его ядро $\ker \alpha_- = \text{сеп } \mathcal{H} = \mathbb{F}$.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все дифференцирования алгебры $\mathcal{H}$ внутренние, т.е. отображение α_- сюръективное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Очевидно, что D полностью определяется своим действием на образующие q_μ, p_μ , т.е. нормальными многочленами

$$f_\mu(q, p) = D(q_\mu), \quad g_\mu(q, p) = D(p_\mu), \quad \mu \in \overline{1, d}.$$

В свою очередь, нормальные многочлены $f_\mu, g_\mu \in \mathcal{H}$, $\mu \in \overline{1, d}$, будут задавать дифференцирование $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$, если они согласуются с коммутационными соотношениями раздела 1.2, т.е.

$$\begin{aligned} D(q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu) &= (f_\mu q_\nu + q_\mu f_\nu) - (f_\nu q_\mu + q_\nu f_\mu) = [f_\mu, q_\nu] - [f_\nu, q_\mu] = \\ &= \varkappa \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial p_\mu} \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} D(p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) &= (g_\mu p_\nu + p_\mu g_\nu) - (g_\nu p_\mu + p_\nu g_\mu) = [g_\mu, p_\nu] - [g_\nu, p_\mu] = \\ &= \varkappa \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial g_\mu}{\partial q_\nu} \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} D(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu}) &= (g_\mu q_\nu + p_\mu f_\nu) - (f_\nu p_\mu + q_\nu g_\mu) - 0 = [g_\mu, q_\nu] + [p_\mu, f_\nu] = \\ &= \varkappa \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial p_\nu} + \frac{\partial f_\nu}{\partial q_\mu} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

для всех $\mu, \nu \in \overline{1, d}$, причем мы воспользовались равенствами (1.2). Согласно формулам (1.6)–(1.7) и (1.4)–(1.6) система (2.1) дает

$$f_\mu = \frac{\partial f}{\partial p_\mu},$$

а система (2.2) –

$$g_\mu = \frac{\partial g}{\partial q_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d},$$

причем в силу (2.3) нормальные многочлены $f(q, p)$ и $g(q, p)$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial^2 (f + g)}{\partial q_\mu \partial p_\nu} = 0, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}.$$

В соответствии с формулами (1.8), (1.9) $f(q, p) + g(q, p) = \varphi(q) + \psi(p)$, откуда $f(q, p) - \varphi(q) = -g(q, p) + \psi(p) = h(q, p)$, $h \in \mathcal{H}$, или $f(q, p) = h(q, p) + \varphi(q)$, $g(q, p) = -h(q, p) + \psi(p)$. Итак,

$$D(q_\mu) = f_\mu = \frac{\partial f}{\partial p_\mu} = \frac{\partial h}{\partial p_\mu} = \frac{1}{\varkappa} [h, q_\mu], \quad D(p_\mu) = g_\mu = \frac{\partial g}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial h}{\partial q_\mu} = \frac{1}{\varkappa} [h, p_\mu]$$

для всех $\mu \in \overline{1, d}$, так что $D = \{h, \cdot\}$, что и требовалось доказать.

2.3. Алгебра Ли $\mathcal{H}_\star$. Разложим линейное пространство нормальных многочленов $\mathcal{H}$ в прямую сумму:

$$\mathcal{H} = \mathbb{F} \cdot 1 + \mathcal{H}_\star, \quad \mathcal{H}_\star = \{f(q, p) \in \mathcal{H} : f(0, 0) = 0\},$$

и пусть $\text{pr}_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{F} \cdot 1$, $\text{pr}_\star : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\star$ – соответствующие проекторы,

$$\text{pr}_1(f) = f(0, 0), \quad \text{pr}_\star(f)(q, p) = f(q, p) - f(0, 0), \quad f(q, p) \in \mathcal{H}.$$

Определим на $\mathcal{H}_\star$ скобку $[\cdot, \cdot]_\star : \mathcal{H}_\star \times \mathcal{H}_\star \rightarrow \mathcal{H}_\star$ правилом

$$[f, g]_\star = \text{pr}_\star(\{f, g\}), \quad f, g \in \mathcal{H}_\star.$$

С помощью (1.1) легко проверяется, что

- (1) скобка $[\cdot, \cdot]_\star$ обладает всеми свойствами скобки Ли и, следовательно, определяет на $\mathcal{H}_\star$ структуру алгебры Ли;
- (2) мономы $\rho^{ij} \equiv q^i p^j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i + j| > 0$, образуют базис в $\mathcal{H}_\star$;
- (3) скобка $[\cdot, \cdot]_\star$ определяется равенствами

$$[\rho^{ij}, \rho^{kl}]_\star = \sum_{|m+n|>0} C_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn}, \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+^d, \quad |i + j| > 0, \quad |k + l| > 0,$$

структурные константы $C_{mn}^{ij,kl}$ определены в разделе 1.10.

2.4. ТЕОРЕМА. *Определен изоморфизм алгебр Ли*

$$\alpha_- : \mathcal{H}_* \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{H}),$$

где $\alpha_-(f) = \{f, \cdot\} \equiv F$, $f \in \mathcal{H}_*$, причем

$$\begin{aligned} \alpha_-([f, g]_*) &= [\alpha_-(f), \alpha_-(g)], \quad f, g \in \mathcal{H}_*; \\ \alpha_-(f)^t &= -\alpha_-(f^t), \quad f \in \mathcal{H}_*. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.2 и приведенных выше рассуждений доказательство сводится к простой проверке (транспонирование определено в пункте (7) раздела 1.11).

Итак, алгебра Ли

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \left\{ F = \{f, \cdot\} : f = \sum_{|i+j|>0} f_{ij} \rho^{ij} \in \mathcal{H} \right\}$$

имеет базис $R^{ij} = \{\rho^{ij}, \cdot\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i+j| > 0$, скобка и действие даются формулами

$$[R^{ij}, R^{kl}] = \sum_{|m+n|>0} C_{mn}^{ij,kl} R^{mn}, \quad R^{ij}(\rho^{kl}) = \sum_{|m+n|>0} C_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn},$$

структурные константы определены в разделе 1.10.

В частности, $[R^{0(\mu)}, R^{i+(\mu),j}] = (i_\mu + 1)R^{ij}$ для любых $\mu \in \overline{1, d}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i+j| > 0$, откуда следует, что

$$(1) \text{ коммутант } [\mathfrak{D}(\mathcal{H}), \mathfrak{D}(\mathcal{H})] = \mathfrak{D}(\mathcal{H}).$$

2.5. Степень дифференцирования и градуировка. Обозначим через

$$\mathcal{H}^u = \left\{ f = \sum_{|i+j|=u} f_{ij} \rho^{ij} \in \mathcal{H} \right\}, \quad u \in \mathbb{Z}_+,$$

линейное пространство всех однородных нормальных многочленов степени u . Тогда

$$\mathcal{H}_* = \sum_{u=1}^{\infty} \mathcal{H}^u \quad \text{и} \quad [\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^w]_* \subset \sum_{u=1}^{v+w-2} \mathcal{H}^u, \quad v, w \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathfrak{D}^u(\mathcal{H}) = \{F = \{f, \cdot\} : f \in \mathcal{H}^u\}$ – линейное пространство *однородных дифференцирований степени $u \in \mathbb{N}$* . Согласно теореме 2.4 алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ разлагается в прямую сумму линейных пространств

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \sum_{u=1}^{\infty} \mathfrak{D}^u(\mathcal{H}) \quad \text{и} \quad [\mathfrak{D}^v(\mathcal{H}), \mathfrak{D}^w(\mathcal{H})] \subset \sum_{u=1}^{v+w-2} \mathfrak{D}^u(\mathcal{H}), \quad v, w \in \mathbb{N}.$$

Аналогичным образом положим $\mathcal{H}_{*k} = \mathcal{H}_* \cap \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$ (см. пункт (6) раздела 1.11, заметим, что $\mathcal{H}_{*k} = \mathcal{H}_k$ при $k \neq 0$), и пусть $\mathfrak{D}_k(\mathcal{H}) = \{F = \{f, \cdot\} : f \in \mathcal{H}_{*k}\}$ – линейные пространства *γ -однородных дифференцирований порядка $k \in \mathbb{Z}^d$* . Легко проверяется, что алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ обладает градуировкой:

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathfrak{D}_k(\mathcal{H}), \quad [\mathfrak{D}_k(\mathcal{H}), \mathfrak{D}_l(\mathcal{H})] \subset \mathfrak{D}_{k+l}(\mathcal{H}), \quad k, l \in \mathbb{Z}^d.$$

2.6. Классический предел. Согласно разделу 2.4 алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ имеет базис $\zeta^{ij} = R^{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i + j| > 0$, и коммутатор

$$[\zeta^{ij}, \zeta^{kl}] = \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} \zeta^{mn},$$

где структурные константы

$$\begin{aligned} C_{mn}^{ij,kl} &= C_{mn}^{ij,kl}(\varkappa) = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} \binom{i,j;k,l}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r} = \\ &= \sum_{\mu=1}^d (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \delta_m^{i+k-(\mu)} \delta_n^{j+l-(\mu)} + O(\varkappa). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $\varkappa \rightarrow 0$, получим алгебру Ли $\mathcal{Z}$ с базисом ζ^{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i + j| > 0$, и скобкой

$$[\zeta^{ij}, \zeta^{kl}] = \sum_{|m+n|>0} Z_{mn}^{ij,kl} \zeta^{mn},$$

где структурные константы

$$Z_{mn}^{ij,kl} = \sum_{\mu=1}^d (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \delta_m^{i+k-(\mu)} \delta_n^{j+l-(\mu)}.$$

Заметим, что алгебра $\mathcal{H}$ в пределе $\varkappa \rightarrow 0$ переходит в алгебру $\mathbb{F}[r]$ коммутативных многочленов с образующими $r = (q_1, \dots, p_d)$ и обычными линейными операциями и умножением. Базисные скобки Пуассона (см. пункт (9) раздела 1.11) принимают в этом случае вид

$$\begin{aligned} \{\rho^{ij}, \rho^{kl}\} &= \sum_{m,n} Z_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn} = \sum_{\mu=1}^d (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \rho^{i+k-(\mu), j+l-(\mu)} = \\ &= \sum_{\mu=1}^d \left(\frac{\partial \rho^{ij}}{\partial p_\mu} \frac{\partial \rho^{kl}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \rho^{ij}}{\partial q_\mu} \frac{\partial \rho^{kl}}{\partial p_\mu} \right), \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+^d, \end{aligned}$$

откуда

$$\{f, g\} = \sum_{\mu=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu} - \frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} \right), \quad f, g \in \mathbb{F}[r], \quad (2.4)$$

в полном согласии с классическими выражениями (см., например, [2]). Другими словами,

- (1) в пределе $\varkappa \rightarrow 0$ алгебра Пуассона $\mathcal{H}$ переходит в классическую алгебру Пуассона $\mathbb{F}[r]$ коммутативных многочленов со скобкой (2.4).

С другой стороны, рассматривая $\mathbb{F}[r]$ как алгебру Ли со скобкой (2.4), приходим к утверждению:

- (2) определен изоморфизм алгебр Ли $\mathcal{Z} \simeq \mathbb{F}[r]/\{1\}$, где $\{1\}$ – центр алгебры Ли $\mathbb{F}[r]$.

3. ОСНОВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

3.1. Дифференцирования первой степени. Дифференцирования $Q_\mu = \{q_\mu, \cdot\}$, $P_\mu = \{p_\mu, \cdot\}$, $\mu \in \overline{1, d}$, образуют базис линейного пространства $\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ дифференцирований первой степени. С помощью формул (1.1), (1.2) легко проверяются следующие утверждения:

- (1) дифференцирования Q_μ , P_μ действуют на $\mathcal{H}$ по правилам

$$Q_\mu(f) = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu}, \quad P_\mu(f) = \frac{\partial f}{\partial q_\mu}, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \overline{1, d};$$

- (2) дифференцирования Q_μ , P_μ , $\mu, \nu \in \overline{1, d}$, попарно коммутируют, так что $\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ – коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$;
 (3) семейство $Q_1, \dots, P_d$ тотальное, т.е. нормальный многочлен $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет системе $Q_\mu(f) = P_\mu(f) = 0$, $\mu \in \overline{1, d}$, тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{H}^0 = \mathbb{F}$;
 (4) определена стандартная дифференциальная алгебра $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$ (см. раздел 0.5).

3.2. Экспоненты. Пусть $c = (a, b) = (a_1, \dots, b_d) \in \mathbb{F}^{2d}$. Будем называть *экспонентами* (точнее, c -экспонентами, см., например, [16]) решения f системы

$$Q_\mu(f) = a_\mu f, \quad P_\mu(f) = b_\mu f, \quad \mu \in \overline{1, d}. \quad (3.1)$$

Поскольку операторы Q_μ , P_μ суть дифференцирования, экспоненты обладают характеризующим свойством:

- (1) произведение $f' \cdot f''$ есть $(c' + c'')$ -экспонента, если f' есть c' -экспонента, а f'' есть c'' -экспонента.

Простые вычисления показывают, что

- (2) всякое решение системы (3.1) в классе формальных степенных рядов имеет вид (с точностью до нормировки)

$$f(q, p; c) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{b^i}{i!} q^i \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^d} (-1)^{|j|} \frac{a^j}{j!} p^j = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}_+^d} (-1)^{|j|} \frac{b^i a^j}{i! j!} q^i p^j.$$

В частности, экспоненты являются формальными (обобщенными) элементами, не принадлежащими алгебре $\mathcal{H}$. Тем не менее они могут оказаться полезными в приложениях.

3.3. Дифференцирования второй степени. Рассмотрим дифференцирования $Q_{\mu\nu} = \{q_\mu q_\nu, \cdot\} = Q_{\nu\mu}$, $R_{\mu\nu} = \{q_\mu p_\nu, \cdot\}$, $P_{\mu\nu} = \{p_\mu p_\nu, \cdot\} = P_{\nu\mu}$, $\mu, \nu \in \overline{1, d}$. С помощью формул (1.1) легко проверить, что

- (1) введенные дифференцирования действуют по формулам

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(f) &= -\left(q_\mu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} + q_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\right) - \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial p_\nu}, \\ R_{\mu\nu}(f) &= q_\mu \frac{\partial f}{\partial q_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} p_\nu, \\ P_{\mu\nu}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} p_\nu + \frac{\partial f}{\partial q_\nu} p_\mu\right) + \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \end{aligned}$$

- для всех $f \in \mathcal{H}$, $\mu, \nu \in \overline{1, d}$ (обратим внимание на наличие вторых производных);
 (2) $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ размерности $d(2d + 1)$ с базисом $Q_{\mu\nu}$,
 $\mu \leq \nu$, $R_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \in \overline{1, d}$, $P_{\mu\nu}$, $\mu \leq \nu$, и коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [Q_{\lambda\mu}, Q_{\nu\pi}] &= 0, & [P_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] &= 0, & [R_{\lambda\mu}, Q_{\nu\pi}] &= \delta_{\mu\nu} Q_{\lambda\pi} + \delta_{\mu\pi} Q_{\lambda\nu}, \\ [R_{\lambda\mu}, R_{\nu\pi}] &= \delta_{\mu\nu} R_{\lambda\pi} - \delta_{\lambda\pi} R_{\nu\mu}, & [R_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] &= -\delta_{\lambda\nu} P_{\mu\pi} - \delta_{\lambda\pi} P_{\mu\nu}, \\ [Q_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] &= -\delta_{\lambda\nu} R_{\mu\pi} - \delta_{\lambda\pi} R_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} R_{\lambda\pi} - \delta_{\mu\pi} R_{\lambda\nu}, & \lambda, \mu, \nu, \pi &\in \overline{1, d}. \end{aligned}$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F})$ (т.е. алгебру Ли формальной симплектической группы порядка $2d$) в следующей реализации: алгебра $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F})$ состоит из всех матриц $M, N, \dots$ порядка $2d$ с элементами из $\mathbb{F}$, записанных в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b^t \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} y & x \\ z & -y^t \end{pmatrix}, \quad \dots$$

($a, b, c, x, y, z, \dots$ – квадратные матрицы порядка $d \times d$ с элементами из $\mathbb{F}$, причем $a = a^t$, $c = c^t$, $x = x^t$, $z = z^t, \dots$), и со скобкой Ли $[M, N] = MN - NM$ (см., например, [22]).

С помощью коммутационных соотношений пункта (2) раздела 3.3 можно проверить, что

(3) *правило*

$$M = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b^t \end{pmatrix} \mapsto D = -a \frac{Q}{2} + bR + c \frac{P}{2}$$

задает изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F}) \simeq \mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$.

Подробнее,

$$D = \sum_{\lambda, \mu=1}^d \left(-\frac{1}{2} a^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} + b^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} c^{\lambda\mu} P_{\lambda\mu} \right).$$

3.4. Симметрии дифференциальной алгебры $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$. По определению (см. раздел 0.5) дифференцирование $F \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ называется дифференцированием Ли–Беклунда дифференциальной алгебры $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$, если коммутаторы $[F, Q_\mu], [F, P_\mu] \in \mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ для всех $\mu \in \overline{1, d}$. С помощью утверждения (1) раздела 3.1 легко проверяется, что это имеет место тогда и только тогда, когда $F \in \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}) + \mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$. В силу утверждений (2) раздела 3.1 и (2) раздела 3.3 отсюда следует, что

(1) алгебра Ли симметрий дифференциальной алгебры $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$ имеет вид

$$\text{Sym}_{\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})} \mathcal{H} = \mathfrak{D}^2(\mathcal{H}).$$

3.5. Подалгебра $\mathfrak{R}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$. Из коммутационных соотношений (2) раздела 3.3 следует, что

(1) *линейное пространство*

$$\mathfrak{R} = \left\{ A = \sum_{\mu, \nu=1}^d a^{\mu\nu} R_{\mu\nu} : a^{\mu\nu} \in \mathbb{F} \right\}$$

является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$.

Более того, легко заметить, что

(2) *имеет место изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{gl}(d; \mathbb{F}) \simeq \mathfrak{R}$, задаваемый правилом $a = \|a^{\mu\nu}\| \mapsto A = \sum a^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.*

В частности (см., например, [23]),

(3) *форма Киллинга на $\mathfrak{R}$ имеет вид*

$$\phi(A, B) = 2d \operatorname{tr}(ab) - 2 \operatorname{tr}(a) \operatorname{tr}(b), \quad A = \sum a^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad B = \sum b^{\mu\nu} R_{\mu\nu};$$

(4) *а операторы Казимира –*

$$K_1 = \sum_{\mu=1}^d R_{\mu_1\mu_1}, \quad \dots, \quad K_d = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_d=1}^d R_{\mu_1\mu_2} \circ R_{\mu_2\mu_3} \circ \dots \circ R_{\mu_d\mu_1}.$$

С помощью коммутационных соотношений (1.1) легко проверяется, что

$$R_{\mu\nu} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{k+(\mu)-(\nu)}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Очевидно, что $|k + (\mu) - (\nu)| = |k|$. Это замечание приводит к следующему утверждению. Для каждого $u \in \mathbb{Z}$ положим $\mathcal{H}_u = \sum_{|k|=u} \mathcal{H}_k$. Тогда $A : \mathcal{H}_u \rightarrow \mathcal{H}_u$ для всех $A \in \mathfrak{R}$ и $u \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

(5) *определены точные представления $\mathfrak{gl}(d; \mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H}_u)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(d; \mathbb{F})$ в линейных пространствах $\mathcal{H}_u$, $u \in \mathbb{Z}$.*

3.6. Градуирующие дифференцирования. Положим $\Gamma_\mu = R_{\mu\mu}$ (без суммирования), $\mu \in \overline{1, d}$, и $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_d)$. Легко проверяется, что для данных нормального многочлена $f \in \mathcal{H}$ и вектора $c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{F}^d$ имеют место равенства $\Gamma_\mu(f) = c_\mu f$, $\mu \in \overline{1, d}$ (коротко, $\Gamma(f) = cf$), тогда и только тогда, когда $c = k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ и $f \in \mathcal{H}_k$. Другими словами,

(1) *векторный оператор Γ является градуирующим на $\mathcal{H}$.*

3.7. Дифференцирования с нулевой градуировкой. Обратимся к линейному пространству $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$. Согласно разделу 2.5 $[\mathfrak{D}_0(\mathcal{H}), \mathfrak{D}_k(\mathcal{H})] \subset \mathfrak{D}_k(\mathcal{H})$ для любого $k \in \mathbb{Z}^d$. Более того, с помощью формулы (1.1) легко устанавливается, что

- (1) $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$ – коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$;
- (2) *в каждом из линейных пространств $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$, определено представление $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H}_k)$ алгебры Ли $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$.*

3.8. Случай $d = 1$. Здесь индексы $i, j, k, \dots \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ (индекс μ опускаем за ненужностью). В этом случае алгебра Ли $\mathfrak{sp}(2; \mathbb{F}) = \mathfrak{sl}(2; \mathbb{F})$ и изоморфизм пункта (3) раздела 3.3 принимает вид

$$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{F}) \ni M = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix} \mapsto D = -a\frac{Q}{2} + bR + c\frac{P}{2} \in \mathfrak{D}^2(\mathcal{H}),$$

где $a, b, c \in \mathbb{F}$. С точностью до нормировки функционал Киллинга равен

$$\phi(D, V) = az + 2by + cx, \quad D = -a\frac{Q}{2} + bR + c\frac{P}{2}, \quad V = -x\frac{Q}{2} + yR + z\frac{P}{2},$$

а оператор Казимира –

$$\Delta = R \circ R - \frac{1}{2}\{Q \circ P + P \circ Q\}.$$

Подставляя сюда формулы пункта (1) раздела 3.3, получим

$$\begin{aligned} \Delta(f) = & 3\left(q\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial p}p\right) + \left(q^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + 2q\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}p + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}p^2\right) + \\ & + 2\kappa\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p} + q\frac{\partial^3 f}{\partial q^2\partial p} + \frac{\partial^3 f}{\partial q\partial p^2}p\right) + \kappa^2\frac{\partial^4 f}{\partial q^2\partial p^2}, \quad f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение $\Delta(f) = 0$ в классе формальных степенных рядов (ср. с разделом 3.2),

$$\Delta(f) = 0, \quad f = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} q^i p^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{F}.$$

Для коэффициентов c_{ij} получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (i+j)(i+j+2)c_{ij} + 2\kappa(i+1)(j+1)(i+j+2)c_{i+1,j+1} + \\ + \kappa^2(i+1)(j+1)(i+2)(j+2)c_{i+2,j+2} = 0, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Произведем замену индексов: $(i, j \in \mathbb{Z}_+) \leftrightarrow (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+)$,

$$\begin{cases} i = n + k_+, \\ j = n + k_-, \end{cases} \quad k_+ = \begin{cases} k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad k_- = \begin{cases} 0, & k \geq 0, \\ -k, & k < 0, \end{cases}$$

так что $k = k_+ - k_-$, $|k| = k_+ + k_-$, $k = i - j$, $n = (i + j - |i - j|)/2$. Полагая $b_{k,n} = c_{i,j}$ и учитывая, что $i + j = 2n + |k|$, $ij = n(n + |k|)$, для коэффициентов $b_{k,n}$ получаем рекуррентные соотношения

$$b_{k,n+2} = -\frac{(|k| + 2n + 2)}{\kappa^2} \frac{2\kappa(n+1)(|k| + n + 1)b_{k,n+1} + (|k| + 2n)b_{k,n}}{(n+1)(n+2)(|k| + n + 1)(|k| + n + 2)}.$$

Последние имеют две серии решений: g_{kn} и h_{kn} , где

$$g_{k0} = 1, \quad g_{k1} = 0, \quad g_{kn} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n! \mathcal{Z}^n} \frac{|k|(|k|+2) \dots (|k|+2n-2)}{(|k|+1)(|k|+2) \dots (|k|+n)};$$

$$h_{k0} = 0, \quad h_{k1} = 1, \quad h_{kn} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \mathcal{Z}^{n-1}} \frac{(|k|+2)(|k|+4) \dots (|k|+2n-2)}{(|k|+2)(|k|+3) \dots (|k|+n)}.$$

Следовательно,

(1) уравнение $\Delta(f) = 0$ в классе формальных степенных рядов имеет базис линейно независимых решений:

$$g_k(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{kn} q^{n+k_+} p^{n+k_-}, \quad h_k(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{kn} q^{n+k_+} p^{n+k_-}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

коэффициенты g_{kn} , h_{kn} определены выше.

4. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$

4.1. Дифференциальные формы. Для алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$ алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$ (см. пункт (5) раздела 1.11), так что условие (i) из раздела 0.6 выполнено, а для данной алгебры $\mathcal{K}$ условия (ii)–(iv) сводятся к единственному условию: определен морфизм алгебр Ли $\psi: \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{K})$. Согласно разделу 0.6 годятся алгебры $\mathcal{H}$, $\mathbb{F}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

Оставляя полное исследование дифференциальных форм на будущее, рассмотрим простейший случай $\mathcal{K} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$, когда

$$\varphi = \text{id}_{\mathbb{F}}: \mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F} \rightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}, \quad \text{а} \quad \psi = 0: \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathbb{F}) = 0.$$

Здесь, $\Omega^*(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^* \mathfrak{D}(\mathcal{H}); \mathbb{F}) = (\wedge^* \mathfrak{D}(\mathcal{H}))'$. В частности, $\Omega^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \mathbb{F}$, а линейное пространство $\Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F})$, дуальное к линейному пространству $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$, имеет базис $\{\theta_{ij}; |i+j| > 0\}$, дуальный к базису $\{R^{ij}; |i+j| > 0\}$, $\theta_{ij}(R^{kl}) = \delta_{ij}^{kl}$.

Согласно разделу 0.7 дифференциал $d = d_u: \Omega^u(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \rightarrow \Omega^{u+1}(\mathcal{H}; \mathbb{F})$, $u \in \mathbb{Z}_+$, действует по правилу

$$(d\omega)(D_0, \dots, D_u) = \sum_{0 \leq v < w \leq u} (-1)^{v+w} \omega([D_v, D_w], D_0, \dots, \check{D}_v, \dots, \check{D}_w, \dots, D_u)$$

для всех $\omega \in \Omega^u(\mathcal{H}; \mathbb{F})$. В частности, $d\Omega^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = d\mathbb{F} = 0$, откуда $H^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \ker d_0 = \mathbb{F}$. Легко также проверяется, что

$$d\theta_{ij} = - \sum_{k,l,m,n} C_{ij}^{kl,mn} \theta_{kl} \cdot \theta_{mn}, \quad |i+j| > 0. \quad (4.1)$$

Далее, с помощью равенства $[\mathfrak{D}(\mathcal{H}), \mathfrak{D}(\mathcal{H})] = \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ (см. пункт (1) раздела 2.4) выводим, что дифференциал $d\omega = 0$, $\omega \in \Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F})$, тогда и только тогда, когда $\omega = 0$, т.е. $\ker d_1 = 0$. В частности, $H^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \ker d_1 / \text{im } d_0 = 0$.

4.2. Алгебра Ли $\mathcal{H}$. Параллельно с алгеброй Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{H}$ со скобкой $\{\cdot, \cdot\}$ (см. пункт (9) раздела 1.11). Напомним, что алгебра Ли $\mathcal{H}$ имеет базис ρ^{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, и коммутационные соотношения

$$\{\rho^{ij}, \rho^{kl}\} = \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn}.$$

Как и в случае алгебры $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ (см. пункт (1) раздела 2.4), коммутант $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$. Заметим, что центр алгебры Ли $\mathcal{H}$ есть $\text{сеп } \mathcal{H} = \mathbb{F}$ (ср. с пунктом (3) раздела 1.11).

Пусть $\wedge^* \mathcal{H}$ — внешняя алгебра линейного пространства $\mathcal{H}$. Согласно общей теории (см. [15]) *u-коцепи алгебры Ли $\mathcal{H}$ со значениями в $\mathbb{F}$* определяются как линейные отображения из $\wedge^u \mathcal{H}$ в $\mathbb{F}$, $u \in \mathbb{Z}_+$, так что линейное пространство всех коцепей алгебры Ли $\mathcal{H}$ со значениями в $\mathbb{F}$ есть

$$\mathfrak{C}^*(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^* \mathcal{H}; \mathbb{F}) = (\wedge^* \mathcal{H})'.$$

В частности, $\mathfrak{C}^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \mathbb{F}$, линейное пространство $\mathfrak{C}^1(\mathcal{H}; \mathbb{F})$, дуальное к $\mathcal{H}$, имеет дуальный базис ϑ_{ij} , $\vartheta_{ij}(\rho^{kl}) = \delta_{ij}^{kl}$, $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+^d$. Дифференциал $d = d_u: \mathfrak{C}^u(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{C}^{u+1}(\mathcal{H}; \mathbb{F})$, $u \in \mathbb{Z}_+$, задается правилом

$$(d\omega)(f_0, \dots, f_u) = \sum_{0 \leq v < w \leq u} (-1)^{v+w} \omega(\{f_v, f_w\}, f_0, \dots, \check{f}_v, \dots, \check{f}_w, \dots, f_u)$$

для всех $\omega \in \mathfrak{C}^u(\mathcal{H}; \mathbb{F})$. Здесь также $d_{u+1} \circ d_u = 0$, так что определен комплекс Ли $\{\mathfrak{C}^u(\mathcal{H}; \mathbb{F}), d_u, u \in \mathbb{Z}_+\}$ с когомологиями $H_{\text{Lie}}^u(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \ker d_u / \text{im } d_{u-1}$.

По построению $d\mathfrak{C}^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = d\mathbb{F} = 0$, откуда $H_{\text{Lie}}^0(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = \mathbb{F}$. Далее, в силу равенства $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, $\ker d_1 = 0$, так что $H_{\text{Lie}}^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}) = 0$. Как и выше (см. (4.1)), легко проверяется равенство

$$d\vartheta_{ij} = - \sum_{k,l,m,n} C_{ij}^{kl,mn} \vartheta_{kl} \cdot \vartheta_{mn}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+^d. \quad (4.2)$$

4.3. Центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Видно, что алгебры Ли $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ очень похожи. Действительно, с помощью теоремы 2.4 легко проверить, что

(1) *определена точная последовательность алгебр Ли*

$$0 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

где $\mathbb{F}$ рассматривается как тривиальная коммутативная алгебра Ли, морфизм π задается правилом: $\mathcal{H} \ni f \mapsto \pi(f) = \{f, \cdot\} \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

Другими словами, алгебра Ли $\mathcal{H}$ есть *одномерное центральное расширение* алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Заметим, что $\pi(\rho^{00}) = 0$, $\pi(\rho^{ij}) = R^{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i + j| > 0$.

Дуальная последовательность имеет вид

$$0 \longleftarrow \mathbb{F} \longleftarrow \mathfrak{C}^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \xleftarrow{\pi^*} \Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \longleftarrow 0, \quad (4.4)$$

где $\pi^*(\theta_{ij}) = \vartheta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, $|i + j| > 0$.

Согласно общей теории когомологий алгебр Ли (см. [15]), каждое одномерное центральное расширение алгебры Ли ассоциировано с некоторой замкнутой 2-формой на этой алгебре. В нашем случае имеется разложение $\mathcal{H} = \mathbb{F} \cdot 1 + \mathcal{H}_*$ (см. раздел 2.3), и искомая форма $\chi \in \Omega^2(\mathcal{H}; \mathbb{F})$ определяется условием

$$\chi(\pi(f), \pi(g)) = \text{pr}_1(\{f, g\}), \quad f, g \in \mathcal{H},$$

где проекция $\text{pr}_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{F}$. Подробнее, $\text{pr}_1(f) = f(0) = f_{00} = \vartheta_{00}(f)$ для всякого $f = \sum_{i,j} f_{ij} \rho^{ij} \in \mathcal{H}$. Следовательно, $\text{pr}_1(\{f, g\}) = \vartheta_{00}(\{f, g\}) = -(d\vartheta_{00})(f, g)$, так что определяющее условие принимает вид $\chi(\pi(f), \pi(g)) = -(d\vartheta_{00})(f, g)$. Учитывая равенство (4.2), формулу

$$C_{00}^{ij,kl} = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! (\delta_0^i \delta_r^j \delta_r^k \delta_0^l - \delta_r^i \delta_0^j \delta_0^k \delta_r^l),$$

соотношение пункта (4) раздела 0.8 и равенства типа $\vartheta_{ij}(f) = f_{ij} = \theta_{ij}(\pi(f))$, окончательно получаем, что

(2) *одномерное центральное расширение (4.3) ассоциировано с 2-формой*

$$\chi = 2 \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! \theta_{0r} \cdot \theta_{r0} \in \Omega^2(\mathcal{H}; \mathbb{F}). \quad (4.5)$$

Обратимся к свойствам формы χ . По построению эта форма замкнутая. Проверим это свойство непосредственно: пусть $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{H}$, тогда

$$\begin{aligned} (d\chi)(\pi(f_1), \pi(f_2), \pi(f_3)) &= -\chi([\pi(f_1), \pi(f_2)], \pi(f_3)) - \\ &\quad - \chi([\pi(f_2), \pi(f_3)], \pi(f_1)) - \chi([\pi(f_3), \pi(f_1)], \pi(f_2)) = \\ &= -\vartheta_{00}(\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\}) = 0, \end{aligned}$$

где мы использовали равенство $[\pi(f), \pi(g)] = \pi(\{f, g\})$, $f, g \in \mathcal{H}$, (см. пункт (1) раздела 4.3) и тождество Якоби.

Однако форма χ не является точной. Действительно, предположим, что $\chi = d\Psi$ с некоторой 1-формой

$$\Psi = \sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij} \theta_{ij} \in \Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}),$$

коэффициенты $\Psi^{ij} \in \mathbb{F}$. Тогда для всех $f, g \in \mathcal{H}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \chi(\pi(f), \pi(g)) &= (d\Psi)(\pi(f), \pi(g)) = -\Psi([\pi(f), \pi(g)]) = -\Psi(\pi(\{f, g\})) = \\ &= -\psi(\{f, g\}) = (d\psi)(f, g), \end{aligned}$$

где

$$\psi = \pi^* \Psi = \sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij} \vartheta_{ij} \in \mathfrak{C}^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}).$$

С другой стороны, по построению $\chi(\pi(f), \pi(g)) = -(d\vartheta_{00})(f, g)$. Итак, $d(\psi + \vartheta_{00}) = 0$, и, значит, $\psi + \vartheta_{00} = 0$, поскольку $\ker d_1 = 0$ (см. раздел 4.2). Подробнее,

$$\sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij} \vartheta_{ij} + \vartheta_{00} = 0,$$

что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что χ не является точной.

Таким образом, доказано

4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Форма

$$\chi = 2 \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! \theta_{0r} \cdot \theta_{r0}$$

задает нетривиальный элемент $[\chi] \in H^2(\mathcal{H}; \mathbb{F})$.

В частности, центральное расширение (4.3) нетривиальное, и $H^2(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \neq 0$.

4.5. Алгебра инвариантности формы χ . Форма $\omega \in \Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ называется *инвариантной относительно дифференцирования* $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ (мы используем обозначения раздела 0.7), если $L_D \omega = 0$. В силу равенства пункта (2) раздела 0.7 множество всех дифференцирований, относительно которых ω инвариантна, образует подалгебру (алгебру инвариантности ω) алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Вычислим алгебру инвариантности формы χ . Пусть

$$F = \sum_{|i+j|>0} f_{ij} R^{ij},$$

тогда в силу пункта (4) раздела 0.7 $L_F \chi = \iota_F(d\chi) + d(\iota_F \chi) = d(\iota_F \chi)$, где мы учли, что $d\chi = 0$. Форма $\iota_F \chi \in \Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F})$ и $\ker d_1 = 0$ (см. раздел 4.1), так что $L_F \chi = 0$ тогда и только тогда, когда $\iota_F \chi = 0$. Подробнее последнее условие записывается в виде

$$\chi(F, G) = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! (f_{0r} g_{r0} - f_{r0} g_{0r}), \quad \forall G = \sum_{|k+l|>0} g_{kl} R^{kl} \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}),$$

и имеет очевидное решение $f_{0r} = f_{r0} = 0$ при $|r| > 0$, остальные коэффициенты f_{ij} произвольные. Итак,

(1) алгебра инвариантности формы χ состоит из всех дифференцирований вида

$$F = \sum_{|i|>0, |j|>0} f_{ij} R^{ij} \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}).$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 98-01-00640.

Список литературы

- [1] Дж. Макки. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.
- [2] Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике для студентов математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
- [3] N. Fleury, A. Turbiner. On polynomial relations in the Heisenberg algebra. Preprint, funct-an/9403002, 1994.
- [4] A. Turbiner. Invariant identities in the Heisenberg algebra. Preprint, hep-th/9410128, 1998.
- [5] M. Pillin. On the deformability of Heisenberg algebras. Preprint, q-alg/9508014, 1995.
- [6] M. Irac-Astaud. A three-parameter deformation of the Weyl–Heisenberg algebra: differential calculus and invariance. Preprint, q-alg/9609008, 1996.
- [7] B. Abdesselam. The twisted Heisenberg algebra. Preprint, q-alg/9610021, 1996.
- [8] M. S. Plyushchay. R -deformed Heisenberg algebra. Preprint, hep-th/9701065, 1997.
- [9] A. Connes. Noncommutative geometry. New York: Academic Press, 1994.
- [10] J. Madore. An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [11] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore. J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 2. P. 316.
- [12] M. Dubois-Violette, P. W. Michor. J. Geom. Phys. 1996. V. 20. P. 218.
- [13] T. Masson. J. Math. Phys. 1996. V. 37. № 5. P. 2484.
- [14] H.-D. Cao, J. Zhou. On quantum de Rham cohomology. Preprint, DG/9806157, 1998.
- [15] Д. Б. Фукс. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [16] V. V. Zharinov. Integral transforms and special functions. 1998. V. 7. № 1–2. P. 155.
- [17] E. R. Kolchin. Differential algebra and algebraic groups. New York: Academic Press, 1950.
- [18] I. Kaplansky. An introduction to differential algebra. Paris: Hermann, 1957.
- [19] Н. Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [20] V. V. Zharinov. Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations. Singapore: World Scientific, 1992.
- [21] С. Маклейн. Гомология. М.: Мир, 1966.
- [22] М. А. Наймарк. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
- [23] Д. П. Желобенко. Лекции по теории групп Ли. Дубна: ОИЯИ, 1965.

Поступила в редакцию 21.VII.1998 г.