Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Габиев, А. Б. Шабат, О дифференциальных операторах, коммутирующих в главном, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 18–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 07:56:58

© 2012 г.

Р. А. Габиев*, А. Б. Шабат*[†]

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, КОММУТИРУЮЩИХ В ГЛАВНОМ

Рассмотрены коммутирующие дифференциальные операторы с двумя независимыми переменными общего вида. Получены общие необходимые условия коммутирования для операторов невысокого порядка. Показано, что эти условия позволяют классифицировать коммутирующие пары операторов, коэффициенты которых являются линейными функциями от независимых переменных.

Ключевые слова: коммутативные кольца дифференциальных операторов, формула Шура, классификация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о коммутативных кольцах линейных дифференциальных операторов играет важную роль в математической физике. Прежде всего, для нас важны уравнения, связывающие коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов. В одномерном пространстве эта задача была решена в работе [1] при помощи теории дробных степеней дифференциальных операторов. Полученные на этом пути формулы для коэффициентов играют фундаментальную роль в современной теории интегрируемости эволюционных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Кортевега-де Фриза. Эти формулы задают, в частности, плотности канонических законов сохранения, которыми обладает любое $(1 + 1)$ -мерное интегрируемое уравнение и которые являются характерным признаком интегрируемости (см., например, работу [2]).

Мы рассматриваем задачу о старших коэффициентах коммутирующих операторов, $[A, B] = 0$, не предполагая ни один из операторов параболическим и, главное, не предполагая коэффициенты при старших производных постоянными (ср. с работой [3]). Задача об общих условиях коммутирования при $N = 2$ оказывается достаточно интересной даже в случае, когда первый из операторов A имеет порядок

*Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, Россия

[†]Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

два и приведен¹⁾ к каноническому виду:

$$A = aD_x D_y + a^1 D_x + b^1 D_y. \quad (1)$$

Обозначив через $m \geq 2$ порядок второго из операторов B и выделив его главную часть,

$$B = \alpha D_x^m + \beta D_y^m + a_1 D_x^{m-1} D_y + b_1 D_x^1 D_y^{m-1} + \dots + c_{m'} D_x^{m'} D_y^{m'} + \dots, \quad (2)$$

нетрудно выписать систему уравнений в частных производных относительно коэффициентов главных частей операторов (1) и (2). Действительно, общая формула Лейбница для композиции оператора дифференцирования $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N}$ с оператором умножения на функцию f дает

$$\frac{1}{\alpha!} D^\alpha \circ f = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma(f) \frac{1}{\beta!} D^\beta.$$

В частности, при $m = 2$ имеем

$$[D_x D_y, a] = a_y D_x + a_x D_y + a_{xy}, \quad [D_x^2, a] = 2a_x D_x + a_{xx}, \quad [D_y^2, a] = 2a_y D_y + a_{yy}, \quad (3)$$

следовательно, для операторов (1) и (2) при $[A, B] = 0$ должны выполняться условия $\alpha_y = \beta_x = 0$. Так как каноническая форма оператора A сохраняется при заменах вида

$$\hat{x} = X(x), \quad \hat{y} = Y(y), \quad (4)$$

можно превратить коэффициенты $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ подходящей заменой (4) в постоянные. При постоянных α и β мы получаем в силу формул (3)

$$[aD_x D_y, \alpha D_x^2 + \beta D_y^2 + bD_x D_y] = c_1 D_x^2 D_y + c_2 D_y^2 D_x + ab_{xy} - ba_{xy} - \alpha a_{xy} - \beta a_{yy},$$

где $c_1 = ab_y - ba_y - 2\alpha a_x$, $c_2 = ab_x - ba_x - 2\beta a_y$. Условия коммутирования в старшем порядке $c_1 = c_2 = 0$ сводятся, таким образом, к двум достаточно простым уравнениям с двумя неизвестными a и b :

$$2\alpha D_x(a) = ab_y - ba_y, \quad 2\beta D_y(a) = ab_x - ba_x. \quad (5)$$

Переписав эти уравнения, мы можем сформулировать утверждение об общей структуре коммутирующих операторов второго порядка без младших членов (ср. с работой [4]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любая голоморфная функция $f = u + iv$ определяет следующую пару коммутирующих дифференциальных операторов второго порядка с двумя независимыми переменными:*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{u} D_x D_y, & B &= vA + \frac{1}{2}(D_y^2 - D_x^2), \\ [A, B] &= 0 \iff u_x = v_y, & u_y &= -v_x. \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾При $N = 2$ это случай общего положения.

2. КОММУТИРОВАНИЕ В ГЛАВНОМ

Примем следующее определение, аналогичное по существу определению, используемому при построении канонических законов сохранения в рамках симметричного подхода [2] к $(1+1)$ -мерным нелинейным уравнениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C^0 обозначает результат выделения старших по порядку производных членов из оператора C . Будем говорить, что дифференциальные операторы A и B коммутируют в главном, если $[A, B]^0 = 0$.

Очевидно, что необходимое и достаточное условие разрешимости задачи о коммутировании в главном записывается в виде

$$[A, B]^0 = [A^0, B^0]^0 = 0. \quad (7)$$

Для операторов (1) и (2) порядок коммутатора $[A, B]$ равен $m+1$, и поэтому число уравнений в задаче (7) совпадает с числом неизвестных функций при любом m . Случаи четного и нечетного порядков m оператора B несколько отличаются друг от друга: последнее слагаемое с $2m' = m$ в формуле (2) отсутствует при нечетном m .

В одномерном случае ($N = 1$) задача о коммутировании в главном нуждается в уточнении. Прежде всего, заметим, что при $N = 1$ задачу об условиях коммутирования можно разбить на две части. На первом этапе при помощи теории дробных степеней [1] (см. также [5]) строится **алгебраическая формула** для оператора B ²⁾:

$$B = (\alpha_0 A_1^m + \alpha_1 A_1^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} A_1) + \alpha_m, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Здесь m и n – порядки дифференциальных операторов B и A соответственно. Через A_1 в этой формуле обозначен псевдодифференциальный корень n -й степени, $A_1^n = A$, из дифференциального многочлена A ; в отличие от B и A оператор A_1 является не многочленом, а формальным бесконечным рядом по степеням D^{-1} :

$$A_1 = r_{-1}D + r_0 + r_1D^{-1} + r_2D^{-2} + \dots, \quad A_1^2 = r_{-1}^2D^2 + \tilde{r}_0D + \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2D^{-1} + \dots \quad \text{и т.д.}$$

Отметим, что ряд A_1 определяется однозначно с точностью до умножения на корень n -й степени из единицы и его коэффициенты являются дифференциальными многочленами от коэффициентов исходного многочлена A в силу треугольного характера формул, связывающих степени формального ряда A_1 . Например, для коэффициентов оператора A_1^2 мы получаем

$$\tilde{r}_0 = r_{-1}(r'_{-1} + 2r_0), \quad \tilde{r}_1 = r_{-1}(r'_0 + 2r_1) + r_1^2, \quad \dots$$

В силу формулы Шура (8) порядок коммутатора понижается,

$$[A, B] = c_0(x)D^{n-2} + c_1(x)D^{n-3} + \dots,$$

и первое нетривиальное условие коммутирования соответствует обращению в ноль коэффициента при D^{n-2} . Другими словами, задача о коммутировании в главном при $N = 1$ сводится к уравнению $c_0 = 0$.

²⁾Оператор A считается при этом заданным.

В отличие от одномерного случая, сам факт существования оператора B , коммутирующего с оператором A (1), налагает при $N = 2$ нетривиальные условия на главный коэффициент a оператора A . Эти условия зависят от порядка m оператора B и при $m = 2$ сводятся, как было показано в разделе 1, к уравнению Лапласа $\Delta(1/a) = 0$ (см. (6)). Ниже будет найден вид аналогичного уравнения при $m = 3$.

Как и в случае $m = 2$, из условий коммутирования в главном следует, что для оператора (2) $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(y)$. Поэтому и при $m > 2$ эти коэффициенты можно сделать постоянными за счет дополнительной замены вида (4). Переписав формулу Лейбница в виде

$$[aD_xD_y, cD_x^mD_y^n]^0 = \{(ac_y - nca_y)D_x + (ac_x - mca_x)D_y\}D_x^mD_y^n, \quad (9)$$

мы находим, что при постоянных α , β и произвольном $m \geq 2$ аналог уравнений (5) имеет вид двух законов сохранения:

$$m\alpha\left(\frac{1}{a}\right)_x + \left(\frac{a_1}{a}\right)_y = 0, \quad m\beta\left(\frac{1}{a}\right)_y + \left(\frac{b_1}{a}\right)_x = 0. \quad (10)$$

При $m = 3$ для операторов (1) и (2) из формул, аналогичных (3), мы имеем в главном порядке

$$[aD_xD_y, \alpha D_x^3 + \beta D_y^3 + a_1D_x^2D_y + b_1D_xD_y^2]^0 = a(\alpha_yD_x^4 + \beta_xD_y^4) + (a\alpha_x - 3\alpha a_x + aa_{1,y} - a_1a_y)D_x^3D_y + (aa_{1,x} - 2a_1a_x + ab_{1,y} - 2b_1a_y)D_x^2D_y^2.$$

Для трех неизвестных функций a , a_1 , b_1 при постоянных α , β мы находим, в дополнение к (10), что

$$\left(\frac{a_1}{a^2}\right)_x + \left(\frac{b_1}{a^2}\right)_y = 0.$$

Положив $a = e^{-\varphi}$, мы получаем таким образом три уравнения, которые записаны в виде законов сохранения:

$$D_y(e^\varphi a_1) = 3\alpha D_x(e^\varphi), \quad D_x(e^\varphi b_1) = 3\beta D_y(e^\varphi), \quad D_x(e^{2\varphi} a_1) + D_y(e^{2\varphi} b_1) = 0. \quad (11)$$

Используя вспомогательную функцию $u_{xy} = e^\varphi$ и соотношения $a_1 = 3\alpha u_{xx}/u_{xy}$, $b_1 = 3\beta u_{yy}/u_{xy}$, мы сводим условия (11) к следующему нелинейному уравнению третьего порядка для этой функции $u(x, y)$:

$$\alpha D_x(u_{xx}u_{xy}) + \beta D_y(u_{yy}u_{xy}) = 0, \quad e^\varphi \doteq u_{xy} = \frac{1}{a}. \quad (12)$$

В частном случае $\beta = 0$ порядок уравнения (12) понижается, и его можно привести к нелинейному уравнению первого порядка $v_x v_y = 1$, $v = u_x$, эквивалентному уравнению эйконала.

При $m > 3$ к уравнениям (10) добавляется пара уравнений

$$aa_{2,y} - 2a_2a_y + aa_{1,x} - (m-1)a_1a_x = ab_{2,x} - 2b_2a_x + ab_{1,y} - (m-1)b_1a_y = 0$$

и т.д. Как и раньше, число уравнений в задаче (7) о коммутировании в главном равно общему числу старших коэффициентов рассматриваемых операторов. Например, при $m = 5$ мы получаем при постоянных α , β для пяти функций $e^{-\varphi} = a$ и a_1 , b_1 , a_2 , b_2 пять уравнений

$$D_y(e^\varphi a_1) = 5\alpha D_x(e^\varphi), \quad D_x(e^\varphi b_1) = 5\beta D_y(e^\varphi),$$

$$D_y(e^{2\varphi}a_2) + e^{2\varphi}(a_{1,x} + 4a_1\varphi_x) = 0, \quad D_x(e^{2\varphi}b_2) + e^{2\varphi}(b_{1,y} + 4b_1\varphi_y) = 0, \\ D_x(e^{3\varphi}a_2) + D_y(e^{3\varphi}b_2) = 0.$$

При $m = 4$ в этих уравнениях следует положить $a_2 = b_2 = c$.

Нужно отметить, что вид уравнений задачи (7) о коммутировании в главном заметно усложняется, если отказаться от канонической формы (1) оператора A . Даже в простейшем случае $m = 2$, соответствующем уравнениям Коши–Римана из формулы (6), это приводит к довольно запутанным формулам, которые мы получим в следующем примере.

ПРИМЕР 1. Для операторов

$$A = aD_x^2 + bD_y^2 + cD_xD_y + a_1D_x + b_1D_y, \quad \hat{A} = \hat{a}D_x^2 + \hat{b}D_y^2 + \hat{c}D_xD_y + \hat{a}_1D_x + \hat{b}_1D_y$$

старшие члены коммутатора $[A, \hat{A}]$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \{2\langle a, \hat{a} \rangle_x + c\hat{a}_y - \hat{c}a_y\}D_x^3 + \\ & + \{\langle c, \hat{c} \rangle_y + 2(a\hat{c}_x - \hat{a}c_x) + 2(b\hat{a}_y - \hat{b}a_y) + c\hat{a}_x - \hat{c}a_x\}D_x^2D_y + \\ & + \{2\langle b, \hat{b} \rangle_y + c\hat{b}_x - \hat{c}b_x\}D_y^3 + \\ & + \{\langle c, \hat{c} \rangle_x + 2(b\hat{c}_y - \hat{b}c_y) + 2(a\hat{b}_x - \hat{a}b_x) + c\hat{b}_y - \hat{c}b_y\}D_y^2D_x. \end{aligned}$$

Здесь для сокращения использованы обозначения типа $\langle a, b \rangle_x = ab_x - ba_x$ для вронскианов по обоим переменным x и y .

Приведем аналогичные формулы для случая $m = 3$, который рассматривается в следующем разделе.

ПРИМЕР 2. Для операторов

$$A = a_1D_x^2 + a_2D_y^2 + aD_xD_y + \dots, \quad B = b_1D_x^3 + b_2D_x^2D_y + b_3D_xD_y^2 + b_4D_y^3 + \dots$$

задача (7) о коммутировании в главном определяется следующими формулами:

$$[A, B]^0 = c_1D_x^4 + c_2D_x^3D_y + c_3D_x^2D_y^2 + c_4D_xD_y^3 + c_5D_y^4,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 2a_1b_{1,x} - 3b_1a_{1,x} + ab_{1,y} - b_2a_{1,y}, \\ c_2 &= 2\langle a_1, b_2 \rangle_x + \langle a, b_2 \rangle_y + ab_{1,x} - 3b_1a_x + 2a_2b_{1,y} - 2b_3a_{1,y}, \\ c_3 &= 2a_2b_{2,y} - b_2a_{2,y} + ab_{2,x} - 2b_2a_x + 2a_1b_{3,x} - b_3a_{1,x} + ab_{3,y} - \\ & \quad - 2b_3a_y - 3(b_4a_{1,y} + b_1a_{2,x}), \\ c_4 &= 2\langle a_2, b_3 \rangle_y + \langle a, b_3 \rangle_x + ab_{4,y} - 3b_4a_y + 2a_1b_{4,x} - 2b_2a_{2,x}, \\ c_5 &= 2a_2b_{4,y} - 3b_4a_{2,y} + ab_{4,x} - b_3a_{2,x}. \end{aligned}$$

3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Общая задача о коммутирующих в главном операторах второго и третьего порядков представляется достаточно сложной, в отличие от случая $m = n = 2$, изученного в разделе 1 (см. (6)). В этой связи мы ограничимся модельной задачей, в которой предполагается, что коэффициенты рассматриваемых операторов являются линейными функциями от независимых переменных. В этом случае, во-первых, коэффициенты коммутатора $[A, B]$ также являются линейными функциями от независимых переменных; во-вторых, коммутирующие операторы A, B в результате преобразования Фурье переходят в коммутирующие векторные поля с полиномиальными коэффициентами.

Остановимся на втором свойстве несколько подробнее, ограничившись для простоты преобразования Фурье случаем $N = 2$ двух независимых переменных. В результате подстановок

$$x \longleftrightarrow i\partial_\xi, \quad y \longleftrightarrow i\partial_\eta; \quad D_x \longleftrightarrow i\xi, \quad D_y \longleftrightarrow i\eta$$

дифференциальный многочлен A от D_x, D_y с полиномиальными коэффициентами переходит в многочлен $\hat{A}$ того же вида от $\partial_\xi, \partial_\eta$.

ПРИМЕР 3. Оператор второго порядка из теории гипергеометрических функций (ср. с книгой [6])

$$A = x(1+x)D_x^2 + yxD_xD_y + (ax+b)D_x + cyD_y + \varepsilon$$

переходит в результате преобразования Фурье в оператор второго порядка следующего вида:

$$\hat{A} = (\xi\partial_\xi + 1)(\xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta + 3 - a - i\xi) + ib\xi - c\eta\partial_\eta + \hat{\varepsilon}.$$

Если коэффициенты рассматриваемого оператора A являются линейными функциями от независимых переменных x, y , то оператор $\hat{A}$ имеет, очевидно, порядок не выше первого, и мы можем сопоставить ему обычным образом векторное поле $\tilde{A}$,

$$\hat{A} = p(\xi, \eta)\partial_\xi + q(\xi, \eta)\partial_\eta + r(\xi, \eta) \longleftrightarrow \tilde{A} = p(\xi, \eta)\partial_\xi + q(\xi, \eta)\partial_\eta + r(\xi, \eta)\partial_\zeta, \quad (13)$$

добавив дифференцирование ∂_ζ по дополнительной переменной ζ .

Нам понадобится ниже следующее почти очевидное утверждение (ср. с работой [7]).

ЛЕММА 1. *Векторные поля $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ вида (13) с $r = p_\xi + q_\eta$ коммутируют тогда и только тогда, когда*

$$[p_1\partial_\xi + q_1\partial_\eta, p_2\partial_\xi + q_2\partial_\eta] = 0.$$

Для доказательства леммы можно заметить, что при условии $r = p_\xi + q_\eta$ оператор $\hat{A}^*$, формально сопряженный к оператору $\hat{A}$ из формулы (13), имеет вид “укороченного” векторного поля: $\hat{A}^* = p\partial_\xi + q\partial_\eta$.

3.2. Классификация при $m = 3$. Рассмотрим коммутирующие в главном, $[A, B]^0 = 0$, пары операторов второго и третьего порядков (см. выше пример 2), предполагая дополнительно, что коэффициенты этих операторов являются линейными функциями от независимых переменных x и y . В случае общего положения, которым мы ограничимся, замена независимых переменных

$$x \longleftrightarrow \varphi(x, y), \quad y \longleftrightarrow \psi(x, y)$$

с линейными функциями φ и ψ позволяет привести главную часть оператора второго порядка к следующему виду:

$$A = xD_x^2 + yD_y^2 + a(x, y)D_xD_y + \dots \quad (14)$$

Рассматриваемая классификационная задача свелась теперь к перечислению пяти линейных функций a , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , удовлетворяющих пяти уравнениям

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0.$$

Общий вид этих уравнений приведен в примере 2. При $a_1 = x$, $a_2 = y$ дифференцирование уравнений $c_1 = c_5 = 0$ дает

$$\begin{aligned} b_{1,y}(3 - a_y) &= 0, & b_{1,x} &= a_x b_{1,y}, \\ b_{4,x}(3 - a_x) &= 0, & b_{4,y} &= a_y b_{4,x}. \end{aligned}$$

Таким образом, в невырожденном случае

$$b_{1,y}b_{4,x} \neq 0 \implies a_x = a_y = 3, \quad b_{1,x} = 3b_{1,y}, \quad b_{4,y} = 3b_{4,x}, \quad (15)$$

и из уравнений $c_2 = c_4 = 0$ далее мы получаем

$$\begin{aligned} b_{3,x} &= b_{4,x}, & b_{3,y} &= -5b_{4,x}, \\ b_{2,y} &= b_{1,y}, & b_{2,x} &= -5b_{1,y}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение $c_3 = 0$ дает $b_{1,y} = b_{4,x}$, и мы получаем следующую пару коммутирующих в главном операторов:

$$\begin{aligned} A &= xD_x^2 + yD_y^2 + 3(x + y)D_xD_y, \\ B &= (3x + y)D_x^3 + (y - 5x)D_x^2D_y + (x - 5y)D_xD_y^2 + (3y + x)D_y^3. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что эти операторы инвариантны относительно замены

$$x \longleftrightarrow y, \quad (17)$$

и вопрос о возможности добавления констант к найденным выше выражениям для коэффициентов a , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 можно решать при помощи приведенной выше леммы. Например, заметим, что

$$A = xD_x^2 + yD_y^2 + 3(x + y + \varepsilon)D_xD_y \implies \hat{A} = (\xi^2 + 3\xi\eta)D_\xi + (\eta^2 + 3\xi\eta)D_\eta + 5(\xi + \eta) + \varepsilon\xi\eta.$$

Используя лемму, нетрудно полностью исследовать вырождения условий (15) и получить полный список операторов B третьего порядка, коммутирующих в главном с оператором A вида (14). Легко проверить, что в силу линейной зависимости коэффициентов рассматриваемых операторов от независимых переменных уравнение $[A, B]^0 = 0$ оказывается эквивалентным условиям полного коммутирования главных частей этих операторов.

ТЕОРЕМА 1. Следующий список коммутирующих пар операторов второго и третьего порядков вместе с парой (16) исчерпывает с точностью до замены (17) все решения уравнения $[A, B]^0 = 0$ в рассматриваемом классе операторов:

$$\begin{aligned} A &= xD_x^2 + yD_y^2 - xD_xD_y, & B &= xD_x^2D_y, \\ A &= xD_x^2 + yD_y^2 + 3xD_xD_y, & B &= xD_x^2D_y + 4xD_xD_y^2 + 4xD_y^3, \\ A &= xD_x^2 + yD_y^2 + \left(3x + \frac{1}{2}y\right)D_xD_y, & B &= xD_xD_y^2 + \left(x + \frac{1}{2}y\right)D_y^3, \\ A &= xD_x^2 + yD_y^2 + (3x - y)D_xD_y, & B &= (x - y)(D_xD_y^2 + D_y^3). \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из интересных нерешенных задач является, на наш взгляд, анализ зависимости общих условий разрешимости задачи $[A, B]^0 = 0$ от порядка оператора B . Представляется полезным использовать с этой целью для начала конкретные простые примеры операторов второго порядка из приведенной выше теоремы.

Благодарности. Мы благодарны В.Э. Адлеру за полезные замечания и интерес к настоящей работе. Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6501.2010.2) и РФФИ (грант № 10.01.00088).

Список литературы

- [1] I. Schur, *Sitzungsber. Berl. Math. Gen.*, **4** (1905), 2–8.
- [2] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42:4**(256) (1987), 3–53.
- [3] J. Hietarinta, *Phys. Lett. A*, **246:1–2** (1998), 97–104.
- [4] В. Г. Марихин, *ТМФ*, **168:2** (2011), 219–226.
- [5] А. Б. Шабат, *Лекции по теории солитонов*, КЧГУ, Карачаевск, 2008.
- [6] P. Appell, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, les polynômes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace*, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [7] A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran, P. Olver, *J. Phys. A*, **24:17** (1991), 3995–4008.

Поступила в редакцию 2.06.2011