Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Юдин, Е. С. Старцев, Фрактал Фибоначчи – новый тип фрактальности, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 71–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:38:03

© 2012 г.

В. В. Юдин*, Е. С. Старцев*

ФРАКТАЛ ФИБОНАЧЧИ – НОВЫЙ ТИП ФРАКТАЛЬНОСТИ

Предложен единый метод оценки фрактальных характеристик систем, подчиняющихся принципу скейлинга в том или ином смысле. Он основан на представлении таких систем порождающими древесными графами Бете–Кэли. Последние являются следствием формализма групповой связки инверсных полугрупп Фибоначчи–Пенроуза. Последовательно рассмотрены стандартные системы Кантора и Коха в новом методе. Доказана фрактальность самой системы Фибоначчи, которая не обладает ни отрицательным, ни положительным типами избыточности. Фрактал Фибоначчи проиллюстрирован оригинальными процедурами и в координатном представлении. В основе фрактала Фибоначчи лежит золотое разбиение и специфическая инверсность, которая органически присуща системе Фибоначчи. Данное свойство отражено в структуре генератора Фибоначчи.

Ключевые слова: фрактал Фибоначчи, фрактал Кантора, фрактал Коха, порождающие древесные графы, скейлинг, генератор Коха, генератор Кантора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди квазикристаллических симметрий симметрия мозаики Пенроуза занимает особое положение. Существует несколько подходов к пониманию синтеза паркета Пенроуза. Один из них относится к чистой математике, где ставится и решается задача о разбиении пространств $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ минимальным числом плиток. В подходе Пенроуза этих плиток две – золотые ромбы, полученные объединением треугольников Робинсона по золотым сторонам. Как отмечает сам Пенроуз [1], даже если внести некоторые пометки на стороны ромбов, не удастся найти четкий алгоритм покрытия, разбиения. По мнению Пенроуза, пентасимметричный паркет является примером нерекурсивной математики.

Известны работы по численному моделированию структуры квазикристаллов [2]–[4], в которых присутствуют два независимых подхода, базирующихся на оптимизационных принципах. Один из них относится к минимизации энергии покрытия через последовательность частичных кластеров возрастающей размерности. Часто

---

*Институт физики и информационных технологий, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия. E-mail: ses_1@mail.ru

применяются модифицированные процедуры Монте-Карло. Если быть последовательными в построениях замощения Пенроуза, то, как отмечается в некоторых работах [5], [6], приходится сталкиваться с “точечным” дефектом, который существенно искажает процедуру роста.

Другое направление, в этом же ключе, связано с оптимизационным принципом для энтропии последовательностей растущих фрагментов покрытия [3], [6]. Здесь можно выделить два подхода, отличающихся типом используемого энтропийного функционала. Чаще всего имеют в виду термодинамическую, физическую энтропию реальных атомных структур. Значительно реже пользуются конфигурационной энтропией.

Довольно часто подчеркивается выполнимость последовательности Фибоначчи на соответствующих решетках [7], [8]. Однако не очевидно, что система Фибоначчи органически присуща паркету Пенроуза. В работах [9], [10] удалось показать, что прямая сумма двух последовательностей Фибоначчи приводит к системе Пенроуза. При этом надо применить формализм групповой связки инверсных полугрупп (ГСИП) Фибоначчи–Пенроуза [11], [12]. В работах [13]–[16] доказана фрактальность мозаики Пенроуза в представлении древесных графов Кэли. Как правило, в большинстве работ по изучению квазикристаллических симметрий не содержится сведений о фрактальных характеристиках соответствующих паркетов. Определенное исключение представляет работа [17], где был затронут аспект фрактальности, но он не получил продолжения. Мы считаем весьма важным реализовать это направление, причем необходимо создать такой новый метод оценки фрактальных размерностей, который бы подчинялся принципу соответствия.

В методическом плане удобно взглянуть на существующее разнообразие фракталов [18] с теоретико-информационной точки зрения. Одна из центральных категорий теории информации – это категория избыточности, как структурная, так и функциональная. Именно понятие избыточности формализует уровень структурирования, организации на некотором множестве. Так, например, фрактал Кантора, его алгоритм, реализует отрицательный тип избыточности. Это выражается в некоторой “дырчатости”, “пористости” системы. Итерационное выбрасывание самоподобных подструктур является основой кантороподобных систем. Фракталы другого типа – это фракталы типа фракталов Коха [18]. Они содержат положительный тип избыточности, который выражается, например, в “сверхизвилистости”. Хорошо известны примеры оценки размерности береговых линий Великобритании, Скандинавского полуострова и др. Само понятие длины таких линий не имеет смысла, поскольку в пределе их длина стремится к бесконечности по степенному закону. Обычно данная степенная функция изображается в виде прямой в двойных логарифмических осях, тангенс угла наклона которой как раз и является фрактальной размерностью в смысле Хаусдорфа–Безиковича [18]. Важно, что эта размерность должна быть не меньше топологической размерности составляющих элементов.

Конечно, общим принципом построения фракталов является топологический скейлинг в широком понимании этого слова. Можно несколько изменить постановку задачи [19]: рассматривать сложную, “большую” систему с применением к ней декомпозиционного принципа, базирующегося на самоподобии. Это принцип симплициальной декомпозиции системы на топологически эквивалентные подсистемы [20], [21]. Возвращаясь к нашей теоретико-информационной аналогии, можно

Рис. 1. Множество Кантора (а), древесный граф Кантора с ПП (б).

показать некоторую универсальность в оценке фрактальных характеристик. В частности, целью настоящей работы является разработка такого общего метода оценки фрактальности систем, который основан, с одной стороны, на ГСИП Фибоначчи, а с другой стороны, на древесно-графовой интерпретации полугрупповых генераторов цепных матричных орбит. Эти методы будут рассмотрены на фракталах Кантора и Коха. Принципиально новым является доказательство фрактальности самой системы Фибоначчи и фрактальности системы Пенроуза, которые с различных сторон рассмотрены в работах [11], [13].

2. ФРАКТАЛ КАНТОРА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДРЕВЕСНЫХ ГРАФОВ БЕТЕ–КЭЛИ

Хорошо известная процедура Кантора (рис. 1а) с точки зрения теории информации является примером отрицательной избыточности. Очевидно, необязательно разбивать отрезок на три части с последующим выкидыванием средней части. В литературе известны более общие разбиения. Однако всех их объединяет отрицательный аспект избыточности. Процедуру Кантора нетрудно изобразить древесным графом Кантора в представлении древесных графов Бете–Кэли (ДГБК) [14]. На рис. 1б показан один такой ДГБК для самой простой процедуры Кантора, где различаются две ветви X и Y , и указаны перечисляющие полиномы (ПП) для первых уровней.

Коэффициенты данных ПП приводят к простому замечательному ряду типа удвоения. Каждый раз элементарный куст состоит из структуры X^2Y с соответствующими коэффициентами на данной иерархии древесного графа Кантора. Здесь и далее наша основная задача состоит, с одной стороны, в применении некоторого полугруппового формализма, который сопряжен с алгебраической структурой рассматриваемых систем [9]. С другой стороны, нас будет интересовать именно фрактальный аспект процедуры Кантора, но с позиции ДГБК [14]. Общая схема предлагаемого метода [9], [11] состоит в аксиоматическом подходе к выбору *левого* и *правого генераторов Кантора* с последующим рассмотрением их свойств. Затем необходимо построить уравнения движения на решетке натуральных чисел и их полугрупповые орбиты [11]. Под левым генератором мы будем понимать такой генератор, который определяет коллапсирующую последовательность, а под правым – разрастающуюся последовательность, т. е. эти генераторы определяют направление движения на числовой последовательности.

Выпишем правый генератор Кантора и укажем некоторые его алгебраические свойства:

$$\Delta_{Kt}^{+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_{Kt}^{+1} = 2, \quad \det \Delta_{Kt}^{+1} = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1^+(Kt) = 0, \quad \lambda_2^+(Kt) = 2.$$

Генератор (1) с точки зрения обычного матричного умножения является вырожденным, но это, однако, не запрещает построения уравнения движения и матричных орбит. Укажем левый генератор Кантора Δ_{Kt}^{-1} и его свойства:

$$\Delta_{Kt}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_{Kt}^{-1} = 0.5, \quad \det \Delta_{Kt}^{-1} = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1^-(Kt) = 0, \quad \lambda_2^-(Kt) = 0.5.$$

Для собственных значений генераторов Кантора выполняется условие дуальности:

$$\lambda_2^+(Kt)\lambda_2^-(Kt) = 1.$$

Генераторы (1) и (2) соответствуют разрастающемуся и коллапсирующему рядам Кантора. Введенные генераторы (1), (2) допускают нестандартные условия обратимости относительно идемпотента E' :

$$\Delta_{Kt}^{+1} \cdot \Delta_{Kt}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E' \notin \{(\Delta_{Kt}^{\pm 1})^n\}, \quad E' \cdot E' = E'. \quad (3)$$

Заметим, что в (3) применяется не традиционное правило матричного умножения, а поэлементное умножение, которое близко по логике к тензорному (кронекеру) произведению.

Приведем запись уравнения движения по разрастающемуся ряду:

$$(Kt_{n+1}; Kt_n)\Delta_{Kt}^{+1} = (Kt_{n+2}; Kt_{n+1}). \quad (4)$$

Аналогичное уравнение справедливо для коллапсирующего процесса:

$$(Kt_n; Kt_{n+1})\Delta_{Kt}^{-1} = (Kt_{n-1}; Kt_n). \quad (5)$$

Матричная орбита в положительном направлении имеет вид

$$\{(\Delta_{Kt}^{+1})^n\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \dots \xrightarrow{n} \begin{pmatrix} Kt_{n+1} & Kt_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Выражение, аналогичное (6), можно записать для коллапсирующего случая, что будет отвечать принципу обратимости. Однако матричные элементы этой компоненты будут дробными, и они не принадлежат множеству натуральных чисел. Но это обстоятельство несущественно в том смысле, что дробный матричный элемент всего лишь образует коллапсирующую, левую последовательность по тому же самому замечательному ряду Кантора. Уже этот момент говорит о фактической неравноправности двух полугрупповых компонент. Уравнения движения (4), (5) и матричная орбита (6) образуют следующий ряд Кантора:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots, \quad 2Kt_{n-1} = Kt_n, \quad Kt_1 = 1. \quad (7)$$

Также стоит обратить внимание на то, что единичный идемпотент E' не принадлежит ε -окрестности генератора Кантора, несмотря на условие обратимости (3). Получаемую алгебраическую структуру можно расширить до групповой связки [9]–[12] инверсных или сопряженных полугрупп Кантора [22]. Подчеркнем, что это весьма общая алгебраическая структура [11], [23], которая встретится и в других системах.

Это алгебраическое построение можно сопроводить древесным графом Кантора (рис. 16). Для генераторов Кантора укажем элементарные диаграммы:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{Kt}}^{+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x' &= 2x + y, & \begin{array}{c} \nearrow X \\ X' \rightarrow \bullet \leftarrow Y \\ \searrow X \end{array}, \\
 & & y' &= 0, & \begin{array}{c} Y' \text{---} \star \end{array}, \\
 \Delta_{\text{Kt}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 2x' &= x + 2, & \begin{array}{c} \nearrow Y \\ X' \rightarrow \bullet \leftarrow X \\ \searrow X' \end{array}, \\
 & & y' &= 0, & \begin{array}{c} Y' \text{---} \star \end{array}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Старшая диаграмма соответствует тринарному уравнению (8) для старшего уравнения. Именно на эти элементарные кусты (8) и можно осуществить декомпозицию графа Кантора, который обладает существенным симплициальным свойством [20]. В теории древесных графов после декомпозиции симплициального типа применяется теория перечисления. Эти ПП показаны на рис. 16.

Однако для нас представляют интерес ПП нормированного типа, их можно называть вероятностными ПП (ВПП). Но они являются не полиномами, а распределениями кустов по ветвистости. После нормировки ПП древесного графа Кантора приходим к единому ВПП типа двучлена третьей степени:

$$P_{\text{Kt}} = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^0. \tag{9}$$

Из рис. 16 и выражения (9) видно, что согласно (8) троичные кусты и Y -куст встречаются равновероятно. Введение ВПП (9) открывает возможность привлекать стандартные теоретико-вероятностные и статистические методы, что, в свою очередь, позволяет использовать энтропийные функционалы от ВПП [24], [25]. Для системы Кантора получен единственный универсальный полином с равновероятными свойствами, а следовательно, и с соответствующей максимальной энтропией коэффициентов:

$$H(P_{\text{Kt}}) = H_{\text{Sh}}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \ln 2, \tag{10}$$

где взята стандартная энтропия Шеннона перечисляющих коэффициентов (9). С другой стороны, любая перечисляющая структура задается не только своими коэффициентами распределения, но и степенями ветвистости. Тем самым у ПП, ВПП только две “степени свободы”, над которыми должны строиться энтропийные функционалы [24]–[26]. Тогда энтропия средней ветвистости имеет вид

$$S(\bar{k}) = \ln \bar{k} = \ln 3, \tag{11}$$

где $\bar{k} = 3$ – средняя ветвистость в представлении исходящих ветвей.

Для нахождения фрактальных характеристик на ДГБК важно ввести энтропийные функции в смысле Радона [27]. Потребуем, чтобы энтропия коэффициентов (10) была функцией энтропии средней ветвистости (11). В общем случае существует производная в смысле Радона–Никодима [27] энтропии коэффициентов по энтропии ветвистости, линейную версию которой мы отождествляем с фрактальной размерностью [21], [24]. Но тогда справедлива оценка

$$d_{\text{fr}} = \frac{H_{\text{Sh}}(S(\bar{k}))}{S(\bar{k})} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631. \quad (12)$$

Оценка (12) полностью совпадает с обычной общепринятой фрактальной оценкой размерности множества Кантора в смысле Хаусдорфа–Безиковича, однако мы ее получили принципиально иным путем. При этом мы отталкивались от соответствующих генераторов ГСИП (1), (2), матричным орбитам (6) дали древесно-графовую интерпретацию в виде ДГБК и только затем, через энтропийные функции Радона, пришли к фрактальным размерностям.

3. ФРАКТАЛ КОХА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДГБК

Фрактальная процедура Коха также хорошо известна [18] в обычном конфигурационном пространстве. И снова, с точки зрения теории информации, мы сталкиваемся с избыточностью уже положительного типа. Вместо соответствующего участка вставляется некоторый кусок ломаной при соблюдении подобия. Случай системы Коха по алгебраической структуре более сложен, чем системы Кантора, но он в некоторой мере дополнителен к последнему. Множество Кантора можно было бы назвать множеством с аннигиляцией, тогда как множество Коха имеет в основе простой бинарный множитель (бридер). Удобнее начать со структур правого и левого генераторов Коха, которые приведены ниже, как обобщения известной Q -матрицы Фибоначчи [9]–[11]. Так, для разрастающегося процесса:

$$\Delta_{\text{Kh}}^{+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_{\text{Kh}}^{+1} = 2, \quad \det \Delta_{\text{Kh}}^{+1} = -2, \quad (13)$$

$$\lambda_1^{+}(Kh) = \sqrt{3} + 1 = 2.732, \quad \lambda_2^{+}(Kh) = 1 - \sqrt{3} = -0.732.$$

Аналогично для коллапсирующего процесса Коха:

$$\Delta_{\text{Kh}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_{\text{Kh}}^{-1} = -1, \quad \det \Delta_{\text{Kh}}^{-1} = -0.5, \quad (14)$$

$$\lambda_1^{-}(Kh) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0.366, \quad \lambda_2^{-}(Kh) = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = -1.366.$$

В формализме ГСИП важно, чтобы для собственных значений генераторов Коха выполнялось условие дуальности:

$$\lambda_1^{+}(Kh)\lambda_1^{-}(Kh) = 1, \quad \lambda_2^{+}(Kh)\lambda_2^{-}(Kh) = 1.$$

Генераторы (1), (2) и (13), (14) сохраняют свою специфическую матричную структуру, при этом всегда матричный элемент $\Delta_{22} \equiv 0$. Запишем уравнение движения

для правого генератора Коха, отталкиваясь от двух стартовых бивекторов:

$$(2; 1)\Delta_{Kh}^{+1} = (6; 2), \quad (6; 2)\Delta_{Kh}^{+1} = (16; 6), \quad (16; 6)\Delta_{Kh}^{+1} = (32; 16), \quad \dots, \quad (15)$$

$$(Kh_n^x; Kh_{n-1}^x)\Delta_{Kh}^{+1} = (Kh_{n+1}^x; Kh_n^x),$$

$$(2; 0)\Delta_{Kh}^{+1} = (4; 2), \quad (4; 2)\Delta_{Kh}^{+1} = (12; 4), \quad (12; 4)\Delta_{Kh}^{+1} = (32; 12), \quad \dots, \quad (16)$$

$$(Kh_n^y; Kh_{n-1}^y)\Delta_{Kh}^{+1} = (Kh_{n+1}^y; Kh_n^y).$$

Тогда разрастающаяся орбита будет выглядеть следующим образом:

$$\{(\Delta_{Kh}^{+1})^n\} \xRightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{2} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{3} \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \xRightarrow{4} \dots \xRightarrow{n} \begin{pmatrix} Kh_{n+1} & Kh_{n-1} \\ Kh_n & Kh_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Уравнения движения (15), (16) генератора Коха (13), стартующие от разных начальных бивекторов, дают два подряда

$$Kh^x = 1, 2, 6, 16, 44, 120, 328, \dots, \quad (18)$$

$$Kh^y = 1, 2, 4, 12, 32, 88, 240, \dots. \quad (19)$$

Объединение (18) и (19) даст ряд Коха, прослеживающийся и по матричной орбите правого генератора (17):

$$1, 2, 4, 6, 12, 16, 32, 44, 88, 120, 240, 328, \dots. \quad (20)$$

В генерации ряда (20) присутствуют одновременно черты алгоритма Фибоначчи и удвоение Кантора, а именно: $Kh_{2n} = Kh_{2n-1} + Kh_{2n-3}$, $2Kh_{2n} = Kh_{2n+1}$.

Для генераторов (13), (14) выполняются условия обратимости (групповости)

$$\Delta_{Kh}^{+1}\Delta_{Kh}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \notin \{(\Delta_{Kh}^{\pm 1})^n\}. \quad (21)$$

И в этом случае единичный идемпотент не принадлежит групповой орбите генератора. Таким образом, и в этом случае мы получили ГСИП Коха [9]–[12], [22].

Структуры правого и левого генераторов Коха дают возможность построить следующие элементарные диаграммы Коха:

$$\Delta_{Kh}^{+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} x' = 2x + y, \\ y' = 2x, \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow X \\ \xrightarrow{X'} \\ \searrow Y \\ \nearrow X \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{Y'} \\ \nearrow X \\ \searrow X \end{array} \end{array}, \quad (22)$$

$$\Delta_{Kh}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 2x' = y, \\ y' = x - y, \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow X' \\ \xrightarrow{X'} \\ \searrow Y \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{Y'} \\ \nearrow X \\ \searrow Y \end{array} \end{array}. \quad (23)$$

Рис. 2. Фрактал Коха (а), древесные графы Коха X и Y и их ПП (б).

Из (22) видим, что старшим является уравнение триплетного типа, а это эквивалентно кубическому типу нелинейности. Как и в системе Кантора, для системы Коха (рис. 2а) эти простые диаграммы являются модулями, на которые разбивается супердерево Бете–Кэли (рис. 2б). Согласно (22), (23) таких деревьев два, поскольку они порождены двумя корнями – X и Y (рис. 2б).

Суперпозиция деревьев Коха, стартующих от корней X и Y (рис. 2б), дает весь фрактал Коха. На рис. 2б приведены ПП коховского типа в абсолютной форме. Их коэффициенты и приводят к двум типам замечательных рядов Коха (18) и (19).

Через обычные операции нормировки придем к ВПП или кустовым распределениям. Для обоих деревьев Коха они следующие:

$$P_{Kh}(X) = 0.732x^2y + 0.268x^2, \quad P_{Kh}(Y) = 0.732x^2y + 0.268x^2. \quad (24)$$

Согласно (24), как и в случае Кантора, мы получим двучлен с кубическим рангом, только в одном случае имеем дело с аннигилятором (9), а в другом – с бридером, что и отражено в (24). Важно отметить, что, хотя деревья Коха X и Y и приводят к разным абсолютным ПП, их ВПП едины и универсальны. Также, сопоставляя (9) и (24), можно сказать, что системы Кантора и Коха являются системами одного класса – кубического, в отличие от бинарного класса системы Фибоначчи.

Для оценки фрактальной размерности древесных графов Коха через формализм ВПП необходимо построить энтропию их коэффициентов (24):

$$H_{Sh}(0.732; 0.268) \approx 0.581. \quad (25)$$

В целом фрактал Коха является суперпозицией двух деревьев Кэли (рис. 2б), тогда энтропия объединения графов Коха

$$H_{Sh}(X \cup Y) \approx 1.162. \quad (26)$$

Дадим оценку средней ветвистости объединенных графов. Нетрудно показать, что объединение двух элементарных диаграмм (22) будет обладать следующим ВПП:

$$P(X \cup Y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2. \quad (27)$$

Эквивалентная средняя ветвистость исходящих кустов по (27) составляет $\bar{k} = 2.5$, с энтропией ветвистости

$$S(\bar{k}) = \ln \bar{k} = \ln 2.5 \approx 0.916. \quad (28)$$

Выражения (26), (28) позволяют в нашем подходе [13] выписать линеаризованную производную Радона–Никодима [27] от энтропии коэффициентов по энтропии степеней ветвистости [21], [24]:

$$d_{\text{fr}} = \frac{H_{\text{Sh}}(X \cup Y)}{S(\bar{k})} = \frac{1.162}{0.916} \approx 1.269. \quad (29)$$

Полученное значение (29) соответствует обычным оценкам фрактальной размерности системы Коха в смысле Хаусдорфа–Безиковича.

4. ФРАКТАЛ ФИБОНАЧЧИ В ДРЕВЕСНО-ГРАФОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Теперь обратимся к системе Фибоначчи, которая имеет хорошо известный порождающий генератор:

$$\begin{aligned} \Delta_F^{+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Sp } \Delta_F^{+1} &= 1, & \det \Delta_F^{+1} &= -1, \\ \lambda_1^+(F) &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618, & \lambda_2^+(F) &= -\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = -0.618. \end{aligned} \quad (30)$$

Структура этого генератора также характеризуется условием

$$(\Delta_F^{+1})_{22} \equiv 0, \quad (31)$$

что влечет за собой операцию инверсии $Y \rightarrow X$.

Заметим, что свойства (30), (31) генератора Фибоначчи наблюдаются и у систем Кантора и Коха. Исходя из этого напрашивается гипотеза, что это системы одного класса, и, следовательно, система Фибоначчи, вероятно, будет являться фрактальной. Все три системы имеют общую алгебраическую полугрупповую структуру – ГСИП [10], [11], [19], [22]. Выпишем левый генератор Фибоначчи:

$$\begin{aligned} \Delta_F^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \text{Sp } \Delta_F^{-1} &= -1, & \det \Delta_F^{-1} &= -1, \\ \lambda_1^-(F) &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618, & \lambda_2^-(F) &= -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = -1.618. \end{aligned} \quad (32)$$

Согласно формализму ГСИП Фибоначчи для спектра собственных значений генераторов Фибоначчи должно выполняться условие дуальности:

$$\lambda_1^+(F)\lambda_1^-(F) = 1, \quad \lambda_2^+(F)\lambda_2^-(F) = 1.$$

Тогда

$$\Delta_F^{+1}\Delta_F^{-1} = E, \quad (33)$$

где E – тривиальный единичный идемпотент.

В системе Фибоначчи согласно (33) появляется групповая структура двух полугрупп [11]. Поскольку $E \notin \{(\Delta_F^{\pm 1})^n\}$, единичный идемпотент не принадлежит ни правым, ни левым генераторам, возведенным в какую-либо степень, то эти генераторы являются полугрупповыми компонентами. С другой стороны, единичный идемпотент E можно включить в алгебраическую структуру системы Фибоначчи. И в этом случае мы также приходим к ГСИП [11], [22], [23].

Запишем уравнение движения правого генератора:

$$(F_n; F_{n-1})\Delta_F^{+1} = (F_{n+1}; F_n). \quad (34)$$

Из (34) следует разрастающийся ряд Фибоначчи. Аналогично для левого генератора можно записать

$$(F_{n+1}; F_n)\Delta_F^{-1} = (F_n; F_{n-1}). \quad (35)$$

Из (35) видно, что левая компонента полугруппы Фибоначчи соответствует процессу коллапсирования, о чем говорит единственный отрицательный матричный элемент левого генератора. Отрицательность этого матричного элемента не является существенной, поскольку она просто соответствует процессу Фибоначчи в обратном направлении.

Выпишем полугрупповую орбиту, например, для правой компоненты:

$$\begin{aligned} \{(\Delta_F^{+1})^n\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \dots \\ \dots, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) видно, что матричные элементы этой полугрупповой орбиты образуют ряд Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots \quad (37)$$

Здесь очень важно иметь в виду операцию инверсии на бивекторах $(F_n; F_{n-1})$, которая в обычной трактовке алгоритма Фибоначчи не упоминается. Эта операция инверсии также содержится в системах Кантора и Коха, но она подавлена в системе Кантора свойством аннигиляции, а в системе Коха – свойством брідерности, тогда как в системе Фибоначчи нет ни того, ни другого типов избыточности. В чистом виде остается только свойство инверсии

$$\dots, \quad F_{n-1} = y, \quad F_n = y' = x, \quad F_{n+1} = x' = x + y, \quad \dots \quad (38)$$

Для оценки типа фрактальности дадим полугрупповой орбите древесно-графовое представление в виде ДГБК, для чего выпишем элементарные графы генератора Фибоначчи:

$$\begin{aligned} x' = x + y, \quad \xrightarrow{X'} \begin{array}{c} \nearrow X \\ \searrow Y \end{array}, \\ y' = x, \quad \xrightarrow{X'} \begin{array}{c} \nearrow X \end{array}. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь для полугрупповой орбиты (36) можно составить суперграф Бете–Кэли (рис. 3), привлекая принцип симплициальной композиции.

Рис. 3. Древесный граф Фибоначчи с ПП.

ДГБК сопровождается иерархией ПП в абсолютных единицах, коэффициенты которых являются числами Фибоначчи. Как видно из рис. 3, структура ДГБК Фибоначчи существенно асимметрична. Мы надеемся, что эта асимметричность, которая базируется на структуре генератора Фибоначчи, может быть источником избыточности фрактального типа, в отличие от аннигиляционного и бримерного аспектов.

Если рассматривать симплициальную декомпозицию ДГБК Фибоначчи [21], то налицо принцип древесного подобия, что можно использовать в качестве необходимого условия [18], [28] фрактальности системы Фибоначчи. Дальнейший шаг состоит в рассмотрении теории перечисления ДГБК Фибоначчи. Введем распределение ку-стов по ветвистостям на каждой иерархии ДГБК Фибоначчи посредством операции нормировки. Это распределение запишем в форме ВПП:

$$P_F = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}xy + \frac{F_n}{F_{n+2}}x = \alpha_1xy + \alpha_1^2x. \quad (40)$$

В этих терминах мы получили фактически универсальную, единую форму ВПП, коэффициенты которой определяются золотым числом.

Заметим, что во всех трех рассматриваемых системах мы столкнулись с феноменом единого универсального ВПП для всего древесного графа в целом. Из этого следует, что в таком случае для всех обсуждаемых систем существует соответствующий энтропийный инвариант от коэффициентов ВПП. Полугрупповые орбиты, иерархия ПП и сами замечательные ряды обладают кумулятивным свойством. Далеко не очевидно, что может существовать некоторый закон сохранения произведения разнообразия такими системами [25], [29].

Завершим данный раздел оценкой фрактальной размерности ДГБК Фибоначчи в нашем методе [11], [13], [21], [24]. Энтропия Шеннона ВПП составляет

$$H_{Sh}(\alpha_1; \alpha_1^2) \approx 0.665, \quad (41)$$

средняя ветвистость древесного графа

$$\bar{k} = 1.618 \dots = \alpha_2, \quad (42)$$

где α_2 – большое золотое число, энтропия ветвистости (42)

$$S(\bar{k}) = \ln(1 + \alpha_2) \approx 0.962. \quad (43)$$

Согласно теории перечисления древесных графов [21] перечисляющие структуры характеризуются двумя степенями свободы – коэффициентами и степенями ПП, ВПП. Именно по ним строятся энтропии (41), (43), которые приводят согласно нашему методу [13], [21], [24] к оценке фрактальной размерности системы Фибоначчи в древесно-графовом представлении:

$$d_{\text{fr}} = \frac{H_{\text{Sh}}(S(\bar{k}))}{S(\bar{k})} \approx 0.691. \quad (44)$$

Значение фрактальной размерности (44) совпадает с оценкой размерности Хаусдорфа–Безиковича в стандартном подходе [29]. И снова, как в предыдущих системах, мы использовали понятие функции Радона [27]. В данном случае это зависимость энтропии коэффициентов ВПП от энтропии ветвистости графа Фибоначчи. Линеаризованная форма производной Радона–Никодима и для системы Фибоначчи дает приемлемую оценку фрактальной размерности [21], [24].

5. ФРАКТАЛ ФИБОНАЧЧИ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выше приведен универсальный формализм оценки фрактальных характеристик для трех систем. Он базируется на древесно-графовом подходе в представлении деревьев Бете–Кэли [14], структура которых обуславливается особенностями генераторов Фибоначчи, Кантора, Коха. В свою очередь, генераторы этих систем являются обобщением известной Q -матрицы системы Фибоначчи. Тем самым в основе фрактальных свойств обсуждаемых систем лежит групповая связка инверсных полугрупп [9]–[11], [22], [24]. Уравнения движения, полугрупповые орбиты и отображающие их деревья Бете–Кэли допускают использование принципа симплициальной декомпозиции. Это условие симплициальности имеет жесткую корреляцию с фрактальностью, точнее, с необходимым условием фрактальности [18], [28]. По структуре порождающих генераторов Фибоначчи, Кантора, Коха можно заключить, что эти системы принадлежат общему классу систем, и уже поэтому, а также на основе условия симплициальности, можно высказать гипотезу о фрактальности системы Фибоначчи. Уместно подчеркнуть, что, в отличие от систем Кантора и Коха, в системе Фибоначчи нет отрицательной или положительной избыточностей, которые вносятся в алгоритм генерации фракталов. Зато для системы Фибоначчи характерно наличие золотой симметрии и принципа инверсии.

Из теории информации известно, что в роли той или иной избыточности могут выступать некоторые априорные зависимости, уравнения состояния или симметричные ограничения. В нашем случае для системы Фибоначчи, наряду с золотой симметрией, особую роль играет инверсия $Y \rightarrow X$. В этом смысле фрактал Фибоначчи

Рис. 4. Разбиение отрезка X в золотом отношении с инверсией. Показано пять итераций, $\alpha = 0.618$.

можно было бы назвать инвертором. В настоящем разделе мы должны дать конфигурационное представление фрактала Фибоначчи, в котором обычно изображаются фракталы Кантора и Коха.

На рис. 4 дано построение фрактала Фибоначчи по тем же правилам, которые употребляются при построении фракталов Кантора и Коха. Исходный единичный отрезок разбивается в золотом отношении. В дальнейшем на каждой итерации учитывается особенность структуры генератора Фибоначчи. В основе этой структуры лежит определенная инверсия, поэтому на рис. 4 каждый отрезок Y отождествляется с X , а последний разбивается в золотом отношении, и так на каждом уровне иерархии. Полученное асимптотическое точечное множество является конфигурационным отображением фрактала Фибоначчи. Как видно из рис. 4, в процессе построения ничего не отбрасывается и ничего не добавляется, но зато на каждом шаге используется именно золотое разбиение и производится инверсия. Данная процедура построения фрактала Фибоначчи в конфигурационном пространстве, точнее ее логика (рис. 5), полностью соответствует древесно-графовому подходу, описанному выше.

На рис. 5 показана логика разбиения отрезка согласно правилу Фибоначчи с инверсией. На каждой иерархии получается хорошо известная цепь Фибоначчи [30] в терминах X и Y . Так, для пятой итерации получается цепь $XYXHYXHX$. Тем самым логика построения фрактала Фибоначчи содержит в себе типичную цепочную структуру.

Дадим оценку размерности фрактала Фибоначчи стандартным методом. Например, на рис. 6 приведено распределение длин отрезков для 10-й итерации соглас-

Рис. 5. Логика дробления отрезка в золотом отношении с инверсией $Y \rightarrow X$ согласно структуре генератора Фибоначчи.

но логике построения, изображенной на рис. 4, 5. На рис. 7 дано распределение степеней α , которое фактически управляет разбиением отрезка X . Следует отметить, что четко прослеживается некоторая структура подобия на обоих рисунках. В частности, видны три группы триплетов, которые, в свою очередь, вписываются в более крупномасштабные структуры. Особенно в явном виде проявляется структура подобия в α -спектре (рис. 7). В дальнейшем удобно от дифференциальных распределений перейти к интегральным.

Для примера на рис. 8 показана кумулятивная зависимость для 7-й итерации распределения. По своему смыслу эта кривая фактически является реализацией квазидетерминированного потока Фибоначчи. Затем на данной зависимости проводится серия концентрически вложенных “окружностей”, которые вырождаются в систему прямых, ортогональных оси ординат. В двойных логарифмических осях (рис. 9) получается линейная зависимость числа точек потока, попавших в сферы соответствующих радиусов. В пределах избранной точности, которая обусловлена выбором нами 7-й итерации разбиения отрезка, мы получаем оценку фрактальной размерности $d_F \cong 0.7$, что вполне согласуется с найденным выше значением фрактальной размерности в древесно-графовом подходе. Приведенная методика оценки фрактальной размерности в определенной мере близка к корреляционной или к алгоритму Грассбергера–Прокаччо [31]. Как видно из вышесказанного, одним из условий фрактальности является золотое разбиение, но самое главное – это наличие инверсии $Y \rightarrow X$.

Рис. 6. Распределение длин отрезков для 10-й итерации разбиения отрезка по правилу, приведенному на рис. 4, 5.

Рис. 7. Распределение степеней α от номеров отрезков для 10-й итерации разбиения отрезка по правилу, приведенному на рис. 4, 5.

Заметим, что свойства аннигиляции, брідерности, как и инверсности фрактала Фибоначчи, следуют из алгебраической структуры ГСИП, структуры элементарных диаграмм и деревьев Бете–Кэли в целом. Только в случае систем Кантора и Коха свойство инверсности “подавлено” аннигиляционными и брідерными свойствами.

Нетрудно показать, что квазикристаллическая мозаика Пенроуза является собственной подполугруппой Фибоначчи [9], [13]. Паркет Пенроуза является прямой суммой систем Фибоначчи, фрактальная размерность мозаики Пенроуза равна $d_F \approx 1.382$ [10], [13]. Из структуры генераторов, в частности правых, всех изученных си-

Рис. 8. Зависимость длин отрезков для 7-й итерации разбиения Фибоначчи.

Рис. 9. Зависимость числа точек, попавших в сферу определенного радиуса, от номера сферы; радиус увеличивался постоянно.

стем видно, что процесс Фибоначчи относится к линейному классу, тогда как системы Кантора и Коха являются квадратичными по рангу старшего уравнения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье на основе ГСИП единым образом рассмотрены системы Кантора, Коха и Фибоначчи. Основная цель работы состоит в поиске фрактальных характеристик для системы Фибоначчи. Для трех систем приведены генераторы раз-

растающих и коллапсирующих полугрупп, а также соответствующие уравнения движения в векторном представлении. Для всех трех ГСИП определены матричные, полугрупповые орбиты. Все структуры ГСИП приводят к соответствующим замечательным рядам, которые обладают сильными кумулятивными свойствами.

Полугрупповому формализму дано наглядное древесно-графовое представление в форме порождающих ДГБК. Для каждого генератора трех систем приведены элементарные диаграммы кустового типа. В таком случае существует глобальный древесный симплициальный комплекс, наделенный ультраметрикой. Все эти системы, отображенные в суперграф Бете–Кэли, допускают симплициальную декомпозицию кустового типа. В результате применения теории перечисления древесных графов получены ПП, распределения кустов по ветвистости для каждого уровня ДГБК. Последние распределения оказались универсальными для своих видов систем, а это, в свою очередь, указывает на постоянство энтропии от перечисляющих структур на ДГБК.

Сформулировано понятие зависимости энтропии коэффициентов ПП от энтропии средней ветвистости ДГБК в смысле функции Радона. Это позволило ввести производную Радона–Никодима. От указанной выше зависимости образуется линейаризованная форма, которая и является фрактальной характеристикой ДГБК в целом.

Фрактал Фибоначчи образован в конфигурационном пространстве с соответствующей логикой построения – итеративной процедурой золотого деления отрезков с обязательной инверсией $Y \rightarrow X$. Получена оценка фрактальной размерности системы Фибоначчи в методике Грассбергера–Прокаччо, которая полностью совпадает с аналогичной оценкой в древесно-графовом представлении. Фрактал Фибоначчи не обладает ни аннигиляционными, ни бримерными свойствами. Он обладает избыточностью совсем другого рода, которая полностью обусловлена симметрией генератора Фибоначчи.

Список литературы

- [1] Р. Пенроуз, *Новый ум короля*, Эдиториал УРСС, М., 2003.
- [2] P. J. Steinhardt, *Nature*, **452**:7183 (2008), 43–44.
- [3] A. S. Keys, S. C. Glotzer, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:23 (2007), 235503, 4 pp., arXiv:0705.0106.
- [4] E. Abe, Y. F. Yan, S. J. Pennycook, *Nature Mater.*, **3**:11 (2004), 759–767.
- [5] G. Y. Onoda, P. J. Steinhardt, D. P. DiVincenzo, J. E. S. Socolar, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:25 (1988), 2653–2656.
- [6] H.-C. Jeong, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:13 (2007), 135501, 4 pp., arXiv:0704.0848.
- [7] Д. Гратиа, *УФН*, **156**:10 (1988), 347–364.
- [8] А. М. Братковский, Ю. А. Данилов, Г. И. Кузнецов, *ФММ*, **68**:6 (1989), 1045–1095.
- [9] В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, “Полугруппа Пенроуза и ее фрактальные характеристики”, *Материалы XI Всероссийского семинара “Моделирование неравновесных систем – 2008”* (Красноярск, Россия, 26–28 сентября, 2008), ИВМ СО РАН, Красноярск, 2008, 217–219.
- [10] В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, “Алгебраические принципы генерации нейросети с квазикристаллической топологией Фибоначчи–Пенроуза”, *Материалы XV Международной конференции по нейрокибернетике* (Ростов-на-Дону, Россия, 23–25 сентября, 2009), Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2009, 222–225.
- [11] В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, *ТМФ*, **167**:1 (2011), 136–160.

- [12] В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, “Фрактал Фибоначчи как новый тип фрактальности”, *Материалы XII всероссийского семинара “Моделирование неравновесных систем – 2009”*, ИВМ СО РАН, Красноярск, 2009, 205–207.
- [13] A. N. Mikhalyuk, P. L. Titov, V. V. Yudin, *Phys. A*, **389**:19 (2010), 4127–4139.
- [14] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, Е. А. Савчук, *Кристаллография*, **44**:3 (1999), 413–421.
- [15] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, О. А. Чуднова, Ю. А. Карыгина, *Кристаллография*, **47**:2 (2002), 224–231.
- [16] В. В. Юдин, Ю. А. Карыгина, *Кристаллография*, **46**:6 (2001), 1004–1008.
- [17] B. Sutherland, *Phys. Rev. B*, **35**:18 (1987), 9529–9534.
- [18] Р. Кронвер, *Фракталы и хаос в динамических системах*, Постмаркет, М., 2000.
- [19] В. В. Юдин, С. А. Щеголева, “Аморфные пленки, стекла, квазикристаллы как сложные системы”, *Пленар. докл. VI Междисциплинарного семинара “Фракталы и прикладная синергетика”*, ИММ РАН, М., 2005, 32.
- [20] Дж. Касти, *Большие системы. Связность, сложность, катастрофы*, Мир, М., 1982.
- [21] В. В. Юдин, Е. А. Любченко, Т. А. Писаренко, *Информодинамика сетевых структур*, ДВГУ, Владивосток, 2003.
- [22] В. В. Юдин, А. Д. Ершов, *Изв. вузов. Физика*, **6** (1970), 49–53.
- [23] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. 2, Мир, М., 1972.
- [24] В. В. Юдин, П. Л. Титов, А. Н. Михалюк, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 88–107.
- [25] Н. Мартин, Дж. Ингленд, *Математическая теория энтропии*, Мир, М., 1988.
- [26] В. В. Юдин, П. Л. Титов, А. Н. Михалюк, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **73**:9 (2009), 1340–1347.
- [27] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969.
- [28] Б. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, ИКИ, М., 2002.
- [29] А. И. Олемской, А. Я. Флат, *УФН*, **163**:12 (1993), 1–50.
- [30] G. Ananthakrishna, T. Balasubramanian, *Bull. Mater. Sci.*, **10**:1–2 (1988), 77–83.
- [31] Л. Пьетронеро, Э. Тозатти (ред.), *Фракталы в физике*, Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985), Мир, М., 1988.

Поступила в редакцию 2.06.2011,
после доработки 21.11.2011