Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Фехер, С. Климчик, О спектрах квантованных переменных действия компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайдера, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 326–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 08:20:42

© 2012 г.

Л. Фехер^{*†}, С. Климчик[‡]

О СПЕКТРАХ КВАНТОВАННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЯ КОМПАКТИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ РЕЙСЕНАРСА–ШНАЙДЕРА

Приведен простой вывод спектров переменных действия квантованной компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайдера. Спектр получен комбинированием квантования Кэлера и отождествления классических переменных действия со стандартным тороидальным отображением моментов на комплексное проективное пространство. Результат согласуется с квантованием Шредингера данной системы, которое было разработано ранее ван Диженом и Винетом.

Ключевые слова: компактифицированная система Рейсенарса–Шнайдера, переменные действия, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Определение компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайдера [1] начинается с локального гамильтониана¹⁾

$$H^{\text{loc}}(x, p) \equiv \sum_{j=1}^n \cos p_j \prod_{k \neq j}^n \left[1 - \frac{\sin^2 y}{\sin^2(a(x_j - x_k)/2)} \right]^{1/2}. \quad (1.1)$$

Переменные $\delta_j = e^{iax_j}$, $j = 1, \dots, n$, обозначают положения n “частиц”, движущихся по окружности, а канонически-сопряженные импульсы p_j входят в компактные переменные $\Theta_j = e^{-ip_j}$. Параметры a и y играют роль констант связи. Здесь также принимается условие центра масс $\prod_{j=1}^n \delta_j = \prod_{j=1}^n \Theta_j = 1$. Вводя обозначение $S\mathbb{T}_n$ для стандартного максимального тора группы $SU(n)$, представим локальное фазовое пространство в виде

$$M_y^{\text{loc}} \equiv \{(\delta, \Theta) \mid \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathcal{D}_y, \Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n) \in S\mathbb{T}_n\}, \quad (1.2)$$

¹⁾ Индекс k в произведении $\prod_{k \neq j}^n$ пробегает значения $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$; аналогичные обозначения используются и далее.

^{*}Department of Theoretical Physics, Wigner KFKI RMKI, Budapest, Hungary.
E-mail: lfeher@rmki.kfki.hu

[†]Department of Theoretical Physics, University of Szeged, Szeged, Hungary

[‡]Institut de mathématiques de Luminy, Marseille, France. E-mail: klimcik@iml.univ-mrs.fr

где область $\mathcal{D}_y \subset ST_n$ выбрана таким образом, чтобы гамильтониан H^{loc} принимал только действительные значения. Ограничение $|y| < \pi/n$ гарантирует, что область $\mathcal{D}_y$ непустая. Симплектическая форма на M_y^{loc} определяется следующим образом:

$$\Omega_a^{\text{loc}} \equiv \frac{1}{a} \text{tr}(\delta^{-1} d\delta \wedge \Theta^{-1} d\Theta) = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dp_j. \quad (1.3)$$

Гамильтониан H^{loc} можно вычислить как действительную часть следа унитарной матрицы Лакса

$$L_y^{\text{loc}}(\delta, \Theta)_{jl} \equiv \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy}\delta_j\delta_l^{-1} - e^{-iy}} W_j(\delta, y) W_l(\delta, -y) \Theta_l \quad (1.4)$$

с положительными функциями

$$W_j(\delta, y) := \prod_{k \neq j}^n \left[\frac{e^{iy}\delta_j - e^{-iy}\delta_k}{\delta_j - \delta_k} \right]^{1/2}. \quad (1.5)$$

Потоки, генерируемые спектральными инвариантами оператора L_y^{loc} , коммутируют между собой, но они не полны на M_y^{loc} . Рейсенарс показал [1], что $(M_y^{\text{loc}}, \Omega_a^{\text{loc}})$ можно понимать как плотное открытое подмногообразие комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P(n-1)$, снабженного симплектической формой, кратной форме Фубини–Штуди, и коммутирующие локальные потоки, генерируемые оператором L_y^{loc} , расширяются до полных гамильтоновых потоков на компактном фазовом пространстве $\mathbb{C}P(n-1)$. Сам Рейсенарс назвал расширенную на $\mathbb{C}P(n-1)$ систему, обладающую полными потоками, компактифицированной системой Π_b .

Достаточно полное решение квантованной компактифицированной системы Руйзенарса–Шнайдера было получено в работе ван Дижена и Винета [2] с помощью “квантования Шредингера”, т. е. явной диагонализацией коммутирующих гамильтоновых операторов в координатном представлении. Главная цель настоящей работы – дать альтернативный, очень простой вывод результатов работы [2], рассматривая совместный спектр переменных действия. Отметим, что наш параметр $a > 0$ соответствует α в работе [2], а постоянные g, M , которые используются в работе [2], связаны с нашими упомянутыми выше параметрами y, a следующим образом:

$$g \equiv \frac{2|y|}{a}, \quad M \equiv \frac{2}{a}(\pi - n|y|). \quad (1.6)$$

Мы придерживаемся обозначений, введенных в работе [3], за исключением того, что в той работе константа a равнялась 2.

Следуя традиции, переменные действия можно отождествить с компонентами отображения моментов стандартного гамильтонова действия тора $\mathbb{T}_{n-1}$ на $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$. Мы получим квантованный спектр, комбинируя это отождествление с квантованием Кэлера проективного пространства. Только что упомянутое отождествление опирается на очень нетривиальный симплектический автоморфизм $\mathbb{C}P(n-1)$, в котором задействована самодуальность системы, открытой Рейсенарсом [1]. В нашей недавней работе [3] мы нашли геометрическую интерпретацию

самодуальности. А именно, мы показали, что компактифицированную систему Рейсенарса–Шнайдера можно получить с помощью соответствующей квазигамильтоновой редукции внутренне спянного квазигамильтонова дублета²⁾ $SU(n) \times SU(n)$, и самодуальность появляется из-за равноправия двух $SU(n)$ -множителей дублета. Точнее, мы показали, что редуцированное фазовое пространство является гамильтоновым торообразным многообразием, и его отождествление с $\mathbb{C}P(n-1)$ следует из теоремы Делзанта в симплектической топологии. Далее мы вспомним понятие квазигамильтоновой редукции [4] и дадим обзор относящихся к нам результатов работы [3]. Наконец, мы представим вывод квантованного спектра, который является простым побочным результатом геометрической картины.

2. КВАЗИГАМИЛЬТОНОВА РЕДУКЦИЯ

Рассмотрим группу Ли G , действующую на многообразии D . Для G -инвариантной симплектической формы ω на D соответствующая скобка Пуассона $\{\alpha, \beta\}$ G -инвариантных функций α, β снова G -инвариантна. Таким образом, отношение D/G естественным образом получает пуассонову структуру. Выбор симплектического листа пуассоновой структуры на D/G называется симплектической редукцией многообразия D .

Алексеев, Малкин и Мейнренкен показали, что G -инвариантная 2-форма ω на многообразии D , подчиняющаяся аксиомам квазигамильтоновой геометрии, не обязана быть симплектической, чтобы индуцировать пуассонову структуру на D/G [4]. Это происходит потому, что аксиомы квазигамильтоновой геометрии предполагают для каждой G -инвариантной функции α существование единственного G -инвариантного векторного поля v_α на D , удовлетворяющего условию

$$\omega(v_\alpha, \cdot) = d\alpha, \quad (2.1)$$

и, более того, функция

$$\{\alpha, \beta\} := \omega(v_\alpha, v_\beta) \quad (2.2)$$

является G -инвариантной и определяет скобку Пуассона в пространстве G -инвариантных функций на D . Выбор симплектического листа этой пуассоновой структуры на D/G называется квазигамильтоновой редукцией многообразия D .

Конечно, многообразие D/G , вообще говоря, не является гладким, но тем не менее сделанные выше замечания выражают главную идею редукции. Далее мы аккуратно воспроизведем аксиомы квазигамильтоновой геометрии и процедуру редукции.

Пусть G – компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}$. Фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{G}$ и обозначим как ϑ и $\bar{\vartheta}$ соответственно лево- и правоинвариантные формы Маурера–Картана на G . Для G -многообразия D с действием $\Psi: G \times D \rightarrow D$ мы используем обозначение $\Psi_\eta(x) := \Psi(\eta, x)$, и пусть ζ_D означает векторное поле на D , соответствующее $\zeta \in \mathcal{G}$. Сопряженное действие группы G на саму себя определяется выражением $\text{Ad}_\eta(\tilde{\eta}) := \eta \tilde{\eta} \eta^{-1}$, где Ad_η означает также индуцированное действие на $\mathcal{G}$.

²⁾Посредством связи между моделями Черна–Симонса (Chern–Simons) и квазигамильтоновой геометрией [4], что подтверждает соответствующую гипотезу Горского и Некрасова [5].

По определению [4] квазигамильтоновым G -пространством (D, G, ω, μ) называется G -многообразие D , обладающее инвариантной 2-формой $\omega \in \Lambda^2(D)^G$ и эквивариантным отображением $\mu: D \rightarrow G$, $\mu \circ \Psi_\eta = \text{Ad}_\eta \circ \mu$, такими, что выполняются следующие условия:

1) дифференциал формы ω определяется выражением

$$d\omega = -\frac{1}{12}\mu^*\langle \vartheta, [\vartheta, \vartheta] \rangle; \quad (2.3)$$

2) бесконечно малое действие связано с μ и ω соотношением

$$\omega(\zeta_D, \cdot) = \frac{1}{2}\mu^*\langle \vartheta + \bar{\vartheta}, \zeta \rangle \quad (2.4)$$

для любого $\zeta \in \mathcal{G}$;

3) для любого $x \in D$ ядро ω_x определяется следующим образом:

$$\text{Ker}(\omega_x) = \{ \zeta_D(x) \mid \zeta \in \text{Ker}(\text{Ad}_{\mu(x)} + \text{Id}_{\mathcal{G}}) \}. \quad (2.5)$$

Отображение μ называется отображением моментов.

Любая G -инвариантная функция h на D индуцирует единственное векторное поле v_h на D , которое удовлетворяет условию (2.1) и сохраняет μ , а также ω . Квазигамильтоновой динамической системой (D, G, ω, μ, h) является квазигамильтоново G -пространство с заданной G -инвариантной функцией $h \in C^\infty(D)^G$ – гамильтонианом.

Квазигамильтонову редукцию квазигамильтоновой динамической системы (D, G, ω, μ, h) можно определить выбором элемента $\mu_0 \in G$. Будем называть элемент μ_0 *строго регулярным*, если он удовлетворяет двум следующим условиям:

1) подмножество $\mu^{-1}(\mu_0) := \{x \in D \mid \mu(x) = \mu_0\}$ является вложенным подмногообразием многообразия D ;

2) если $G_0 < G$ является группой изотропии для μ_0 по отношению к сопряженному действию, то отношение $\mu^{-1}(\mu_0)/G_0$ является многообразием, для которого каноническая проекция $p: \mu^{-1}(\mu_0) \rightarrow \mu^{-1}(\mu_0)/G_0$ является гладким погружением.

Результатом редукции, основанной на строго регулярном элементе μ_0 , является стандартная гамильтонова система $(P, \hat{\omega}, \hat{h})$. Редуцированным фазовым пространством P является многообразие

$$P \equiv \mu^{-1}(\mu_0)/G_0, \quad (2.6)$$

которое поддерживает редуцированную симплектическую форму $\hat{\omega}$ и редуцированный гамильтониан $\hat{h}$, однозначно определяемые соотношениями

$$p^*\hat{\omega} = \iota^*\omega, \quad p^*\hat{h} = \iota^*h, \quad (2.7)$$

где $\iota: \mu^{-1}(\mu_0) \rightarrow D$ – тавтологическое погружение.

Подчеркнем, что $\hat{\omega}$ – симплектическая форма в обычном смысле, тогда как ω не является, вообще говоря, ни замкнутой, ни глобально невырожденной. Гамильтоново векторное поле и поток, определяемые гамильтонианом $\hat{h}$ на P , можно получить,

сузив сначала квазигамильтоново векторное поле v_h и его поток на “ограниченную поверхность” $\mu^{-1}(\mu_0)$ и применив затем каноническое проектирование p .

Заметим для ясности, что использованное здесь квазигамильтоново отображение моментов на группу отличается от отображения Пуассона–Ли моментов на группу, введенного в работе Лу [6]. Мы использовали отображение Пуассона–Ли моментов в предыдущей статье [7] для описания стандартной тригонометрической системы Рейсенарса–Шнайдера и дуальной к ней [1], которые отличаются от системы (1.1).

3. РЕДУКЦИЯ ВНУТРЕННЕ СПЯЯННОГО ДУБЛЕТА

Пусть $G \equiv SU(n)$. Квазигамильтоново многообразие (D, G, ω, μ) , которое мы собираемся редуцировать, порождается декартовым произведением

$$D := G \times G = \{(A, B) \mid A, B \in G\}. \quad (3.1)$$

Инвариантное скалярное произведение на $\text{Lie}(G) = \mathfrak{su}(n)$ задано следующим образом:

$$\langle \zeta, \tilde{\zeta} \rangle := -\frac{1}{a} \text{tr}(\zeta \tilde{\zeta}) \quad \forall \zeta, \tilde{\zeta} \in \mathfrak{su}(n). \quad (3.2)$$

Группа G действует на D поэлементным сопряжением

$$\Psi_\eta(A, B) := (\eta A \eta^{-1}, \eta B \eta^{-1}). \quad (3.3)$$

2-Форма ω на D имеет вид

$$\omega := \frac{1}{a} \langle A^{-1} dA \hat{\wedge} dB B^{-1} \rangle + \frac{1}{a} \langle dA A^{-1} \hat{\wedge} B^{-1} dB \rangle - \frac{1}{a} \langle (AB)^{-1} d(AB) \hat{\wedge} (BA)^{-1} d(BA) \rangle, \quad (3.4)$$

и G -значное отображение моментов μ определяется соотношением

$$\mu(A, B) = ABA^{-1}B^{-1}. \quad (3.5)$$

Чтобы определить квазигамильтонову динамическую систему на “внутренне спаянном дублете” D , описанном выше [4], нам понадобится G -инвариантный гамильтониан. На самом деле следует рассмотреть два семейства таких гамильтонианов, каждое из которых содержит $n - 1$ членов. Они задаются так называемыми *спектральными функциями* на каждом множителе $SU(n)$ дублета.

Грубо говоря, спектральные функции на $SU(n)$, вычисленные в точке $C \in SU(n)$, определены логарифмами отношений двух соседних собственных чисел элемента C . Точнее, определим нишу $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$\mathcal{A} := \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \xi_j = \pi \right\}, \quad (3.6)$$

и рассмотрим инъективное отображение δ из $\mathcal{A}$ в подгруппу $S\mathbb{T}_n$ диагональных элементов $SU(n)$, которое определено формулами

$$\delta_{11}(\xi) := e^{(2i/n) \sum_{j=1}^n j \xi_j}, \quad \delta_{kk}(\xi) := e^{2i \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j} \delta_{11}(\xi), \quad k = 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

С помощью фундаментальных весов Λ_k алгебры $su(n)$, представленных диагональными матрицами $\Lambda_k \equiv \sum_{j=1}^k E_{jj} - (k/n)\mathbf{1}_n$, можно записать матрицу $\delta(\xi)$ в виде

$$\delta(\xi) = \exp\left(-2i \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \Lambda_k\right). \quad (3.8)$$

Каждый элемент $C \in SU(n)$ можно диагонализировать,

$$C = \eta^{-1} \delta(\xi) \eta, \quad (3.9)$$

с помощью некоторого $\eta \in SU(n)$ и единственного $\xi \in \mathcal{A}$. По определению j -компонента ξ_j , $j = 1, \dots, n$, элемента ниши ξ , входящего в разложение (3.9), является значением спектральной функции ξ_j в $C \in SU(n)$.

Теперь рассмотрим $2(n-1)$ известных G -инвариантных гамильтонианов α_j, β_j на дублете D , определенных с помощью спектральных функций согласно выражениям

$$\alpha_j(A, B) := \frac{2}{a} \xi_j(A), \quad \beta_j(A, B) := \frac{2}{a} \xi_j(B), \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

Оказалось, что для каждого j соответствующие квазигамильтоновы векторные поля v_{α_j} можно проинтегрировать и получить очень простое действие на окружности в D :

$$(A, B\eta(A)^{-1} \text{diag}(1, 1, \dots, 1, e^{it}, e^{-it}, 1, \dots, 1)\eta(A)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Здесь фаза e^{it} находится в j -м элементе диагонали и $\eta(A)$ определяется диагонализацией $A = \eta(A)^{-1} \delta(\xi) \eta(A)$. Аналогично, интегральной кривой векторного поля v_{β_j} является следующая 2π -периодическая кривая в D :

$$(A\eta(B)^{-1} \text{diag}(1, 1, \dots, 1, e^{-it}, e^{it}, 1, \dots, 1)\eta(B), B), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Вместе взятые потоки (3.11) для всех $j = 1, \dots, n-1$ ведут к возникновению действия на торе, генерированного гамильтонианами α , а потоки (3.12) приводят к действию на торе, генерированному гамильтонианами β в многообразии D . Отметим попутно, что спектральные гамильтонианы α_j и β_j являются гладкими только на плотном открытом подмножестве $D_{\text{reg}} \subset D$, где A и B имеют разные собственные значения. Но это не приводит к каким-либо затруднениям, поскольку ограниченная нашей редукцией поверхность оказывается подмногообразием многообразия D_{reg} .

Теперь сформулируем две теоремы, приведенные в работе [3], которые характеризуют нашу редукцию квазигамильтоновой динамической системы, основанную на спектральных гамильтонианах α_j и β_j дублета.

ТЕОРЕМА 1. Выбор элемента $\mu_0 = \text{diag}(e^{2iy}, \dots, e^{2iy}, e^{2(1-n)iy})$ определяет строго регулярное значение отображения моментов μ (3.5) для любого действительного параметра y , удовлетворяющего условию $0 < |y| < \pi/n$. Соответствующее редуцированное фазовое пространство P (2.6) является гладким компактным многообразием размерности $2(n-1)$.

ТЕОРЕМА 2. Редуцированное фазовое пространство $P = \mu^{-1}(\mu_0)/G_0$ является связным. Более того, действия тора на дублете, порожденные как гамильтонианами $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, так и гамильтонианами $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, переходят на редуцированное фазовое пространство P , где они становятся гамильтоновыми и эффективными.

Напомним, что *гамильтоновым тороидальным многообразием*³⁾ называется компактное связное симплектическое многообразие размерности $2(n-1)$ с эффективным гамильтоновым действием тора размерности $n-1$. Теоремы 1 и 2 двумя разными способами (т. е. с помощью α - и β -гамильтонианов) гарантируют, что редуцированное фазовое пространство $(P, \hat{\omega})$ (2.7) является гамильтоновым тороидальным многообразием.

Следующая теорема, также приводимая в работе [3], дает ключ к отождествлению редуцированного фазового пространства с комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P(n-1)$.

ТЕОРЕМА 3. *Общее отображение редуцированного фазового пространства P обоими $(n-1)$ -наборами редуцированных спектральных гамильтонианов $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n-1})$ и $(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{n-1})$ является выпуклым многогранником $(2/a)\mathcal{P}_y$, где*

$$\mathcal{P}_y := \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \xi_j \geq |y|, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \leq \pi - |y| \right\}. \quad (3.13)$$

Чтобы можно было использовать теорему 3, а также для ссылок в разделе 4 необходимо дать упрощенную вспомогательную трактовку пространства $\mathbb{C}P(n-1)$ на языке симплектических редукций. Для этого возьмем симплектическое векторное пространство $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, наделенное формой Дарбу $\Omega = i \sum_{k=1}^n d\bar{u}_k \wedge du_k$, где u_k – компоненты вектора u , принимающие значения в $\mathbb{C}^n$. Далее рассмотрим действие гамильтониана ψ группы $U(1)$ на $\mathbb{C}^n$ в виде $\psi_{e^{i\rho}}(u) := e^{i\rho}u$. Это действие группы $U(1)$ порождается отображением моментов $\chi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi(u) \equiv \sum_{k=1}^n J_k, \quad J_k := |u_k|^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Для любого фиксированного значения $M > 0$ обычная симплектическая редукция (Марсдена–Вайнштейна) пространства $(\mathbb{C}^n, \Omega)$ приводит к редуцированному фазовому пространству

$$\chi^{-1}(M)/U(1) \equiv \mathbb{C}P(n-1). \quad (3.15)$$

Соответствующая редуцированная симплектическая форма имеет вид $M\omega_{\text{FS}}$, где ω_{FS} – стандартная форма Фубини–Штуди на $\mathbb{C}P(n-1)$. Функции J_k инвариантны по отношению к $U(1)$ и поэтому переходят в гладкие функции на редуцированном фазовом пространстве $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$, которые ниже мы будем обозначать $\hat{J}_k$.

Теперь сосредоточимся на действии $R: \mathbb{T}_{n-1} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ торов $\mathbb{T}_{n-1}$ на $\mathbb{C}^n$, определенном соотношением

$$R_\tau(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) := (\tau_1 u_1, \dots, \tau_{n-1} u_{n-1}, u_n), \quad \tau \in \mathbb{T}_{n-1}, \quad u \in \mathbb{C}^n. \quad (3.16)$$

Соответствующее отображение моментов можно взять в виде $J = (J_1, \dots, J_{n-1}): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Конечно, тороидальное отображение моментов определяется однозначно только с точностью до смещения на произвольную константу.

³⁾ Обзор таких компактных полностью интегрируемых систем можно найти в книге [8].

Действие тора $\mathbb{T}_{n-1}$ (3.16) и его отображение моментов поддерживают симплектическую редукцию, вызванную $U(1)$ -действием ψ , и приводят к так называемому “вращательному $\mathbb{T}_{n-1}$ -действию” на многообразии $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$, которое, таким образом, становится гамильтоновым торическим многообразием. Вращательное $\mathbb{T}_{n-1}$ -действие $\mathcal{R}: \mathbb{T}_{n-1} \times \mathbb{C}P(n-1)$ функционирует согласно правилу $\mathcal{R}_\tau \circ \pi_M = \pi_M \circ R_\tau$, где $\pi_M: \chi^{-1}(M) \rightarrow \mathbb{C}P(n-1)$ является канонической проекцией. Мы выберем его отображение моментов в виде

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{n-1}): \mathbb{C}P(n-1) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad \mathcal{J}_k := \hat{J}_k + g. \quad (3.17)$$

Здесь связь постоянной g с y и a определена ранее формулой (1.6). Тогда легко заметить, что образ $\mathbb{C}P(n-1)$ после тороидального отображения моментов $\mathcal{J}$ – тот же многогранник $(2/a)\mathcal{P}_y$, который фигурирует в теореме 3. Поэтому мы можем использовать следующий знаменитый результат.

ТЕОРЕМА 4 (Делзанта [9]). Пусть (M_1, ω_1, Φ_1) и (M_2, ω_2, Φ_2) – гамильтоновы торические многообразия. Если образы отображений моментов $\Phi_1(M_1)$ и $\Phi_2(M_2)$ совпадают, то существует тор-эквивариантный симплектоморфизм $\phi: M_1 \rightarrow M_2$, для которого $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \phi$.

Комбинация приведенных выше утверждений непосредственно приводит к одному из главных результатов работы [3].

СЛЕДСТВИЕ 1. Гамильтоновы торические многообразия $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}}, \mathcal{J})$, $(P, \hat{\omega}, \hat{\alpha})$ и $(P, \hat{\omega}, \hat{\beta})$ эквивариантно симплектоморфны друг другу.

Применяя это следствие, получим “симплектоморфизмы Делзанта” $\varphi_\alpha, \varphi_\beta: \mathbb{C}P(n-1) \rightarrow P$, на которые наложены условия

$$\varphi_\alpha^* \hat{\omega} = \varphi_\beta^* \hat{\omega} = M\omega_{\text{FS}}, \quad \varphi_\alpha^* \hat{\alpha} = \varphi_\beta^* \hat{\beta} = \mathcal{J}. \quad (3.18)$$

В самом деле, симплектоморфизмы φ_β и φ_α приводят к двум моделям $(P, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ таким образом, что в первой модели функции $\hat{\beta}_k$ становятся положениями частиц, а функции $\hat{\alpha}_k$ – переменными действия компактифицированной системы Руйзенарса–Шнайдера, и их роль меняется во второй модели. В обоих случаях модель $(P, \hat{\omega})$ сама по себе порождается пространством $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$, которое является полным фазовым пространством системы Π_b с глобальными переменными $\mathcal{J}_k$, описывающими положения частиц. Прежде чем объяснить эти утверждения, нам нужна некоторая подготовка.

Во-первых, следуя работам [1], [3], введем координаты Дарбу на плотном открытом многообразии $\mathbb{C}P(n-1)_0 \subset \mathbb{C}P(n-1)$, где не может исчезнуть ни одна из однородных координат. Для этого рассмотрим многообразие

$$\frac{2}{a}\mathcal{P}_y^0 \times \mathbb{T}_{n-1} = \{(\gamma, \tau)\}. \quad (3.19)$$

Здесь $\mathcal{P}_y^0$ – внутренность многогранника (3.13), а $\tau_j = e^{\theta_j}$, $j = 1, \dots, n-1$. Определим отображение $\mathcal{E}: (2/a)\mathcal{P}_y^0 \times \mathbb{T}_{n-1} \rightarrow \chi^{-1}(M)$, потребовав $\mathcal{E}: (\gamma, \tau) \mapsto (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$

согласно соотношению

$$u_j = \tau_j \sqrt{\gamma_j - g}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad u_n = \sqrt{M + (n-1)g - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j}. \quad (3.20)$$

Тогда $\pi_M \circ \mathcal{E}: (2/a)\mathcal{P}_y^0 \times \mathbb{T}_{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P(n-1)_0$ является диффеоморфизмом, удовлетворяющим условию

$$(\pi_M \circ \mathcal{E})^*(M\omega_{\text{FS}}) = i \sum_{k=1}^{n-1} d\gamma_k \wedge d\tau_k \tau_k^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d\theta_k \wedge d\gamma_k. \quad (3.21)$$

Во-вторых, отождествим локальное фазовое пространство $M_y^{\text{loc}} = \mathcal{D}_y \times S\mathbb{T}_n$ системы III_b с пространством $(2/a)\mathcal{P}_y^0 \times \mathbb{T}_{n-1}$ с помощью отображения $\mathcal{F}: (\gamma, \tau) \mapsto (\delta(a\gamma/2), \Theta(\tau))$, заданного уравнениями

$$\delta\left(\frac{a\gamma}{2}\right) = e^{-ia \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \Lambda_k}, \quad \Theta(\tau) := e^{-i \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k (E_{k,k} - E_{k+1,k+1})}, \quad (3.22)$$

где для определения δ используются те же обозначения, что и в уравнении (3.8). Отображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{F}^*\Omega_a^{\text{loc}} = \sum_{k=1}^{n-1} d\theta_k \wedge d\gamma_k$, а его формула показывает, что γ представляют собой положения частиц (или, точнее, положения частиц, умноженные на (-1)), поскольку во введении использовалась связь $\delta_j = e^{iax_j}$ локальной системы III_b . Комбинируя симплектические диффеоморфизмы

$$M_y^{\text{loc}} \simeq \frac{2}{a}\mathcal{P}_y^0 \times \mathbb{T}_{n-1} \simeq \mathbb{C}P(n-1)_0, \quad (3.23)$$

можно отождествить M_y^{loc} с $\mathbb{C}P(n-1)_0$. Таким образом, положения частиц γ_k вносятся во вращательное отображение момента $\mathcal{J}_k = |u_k|^2 + g$, которое остается хорошо определенным на всем $\mathbb{C}P(n-1)$.

Теперь вернемся к симплектоморфизму Делзанта и процитируем следующий результат работы [3].

ТЕОРЕМА 5. *Симплектоморфизм Делзанта φ_β в (3.18) можно выбрать так, что его сужение на $\mathbb{C}P(n-1)_0$ действует в соответствии со следующей формулой:*

$$\varphi_\beta(\pi_M \circ \mathcal{E}(\gamma, \tau)) = p \circ \Psi_{\eta^{-1}} \left(L_y^{\text{loc}} \left(\delta\left(\frac{a\gamma}{2}\right), \Theta(\tau) \right), \delta\left(\frac{a\gamma}{2}\right) \right), \quad (3.24)$$

где η – любая из таких матриц $U(n)$, в которых последний столбец пропорционален вектору

$$v_j \left(\frac{a\gamma}{2}, y \right) := \left(\frac{\sin y}{\sin ny} \right)^{1/2} W_j \left(\delta\left(\frac{a\gamma}{2}\right), y \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Здесь использованы обозначения (1.4), (1.5), и $\Psi_{\eta^{-1}}$ действует путем поэлементного сопряжения (3.3). Неоднозначность в определении $\eta \in U(n)$ уничтожается проективным отображением $p: \mu^{-1}(\mu_0) \rightarrow P$.

Одним из нетривиальных пунктов теоремы 5 является тот, что отображение, заданное на $\mathbb{C}P(n-1)_0$ с помощью (3.24), расширяется до *вполне определенного глобального* симплектоморфизма $\varphi_\beta: \mathbb{C}P(n-1) \rightarrow P$. Мы (пока) не изучили, что является наиболее общим глобальным симплектоморфизмом Делзанта, поскольку формула (3.24) дает один из них, и этого достаточно для нашей цели. А именно, из формулы (3.24) с учетом (3.10) следует, что

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_k \circ \varphi_\beta(\pi_M \circ \mathcal{E}(\gamma, \tau)) &= \frac{2}{a} \xi_k \left(L_y^{\text{loc}} \left(\delta \left(\frac{a\gamma}{2} \right), \Theta(\tau) \right) \right), \\ \hat{\beta}_k \circ \varphi_\beta(\pi_M \circ \mathcal{E}(\gamma, \tau)) &= \mathcal{J}_k(\pi_M \circ \mathcal{E}(\gamma, \tau)) = \gamma_k.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Это говорит о том, что φ_β преобразует редуцированные спектральные гамильтонианы $\hat{\alpha}$ в переменные действия компактифицированной системы Руйсенарса–Шнайнера, в которой глобальные переменные, описывающие положения частиц в полном фазовом пространстве $\mathbb{C}P(n-1)$, снабжены функцией $\mathcal{J}$.

В работе [3] мы также привели аналогичную локальную формулу для φ_α . Там показано, что применение кодифференциала φ_α^* превращает функции $\hat{\alpha}_k$ в глобальные положения частиц, а функции $\hat{\beta}_k$ – в переменные действия компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайнера. Отсюда также следует, что симплектический автоморфизм

$$\phi := \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta: \mathbb{C}P(n-1) \rightarrow \mathbb{C}P(n-1) \quad (3.27)$$

есть не что иное, как самодуальное отображение Рейсенарса для компактифицированной системы [1], которое преобразует положения частиц в переменные действия и наоборот.

Мы закончим этот раздел замечанием, проясняющим взаимосвязь между двумя симплектоморфизмами Делзанта φ_β и φ_α и инволюционными свойствами дуального отображения ϕ (3.27). Для этого заметим, что редуцированное фазовое пространство P допускает естественную антисимплектическую инволюцию $\hat{m}$. В самом деле, $\hat{m}$ индуцируется антиавтоморфизмом m внутренне спаянного дублета D , действующим по формуле $m(A, B) := (\bar{B}, \bar{A})$, где черта означает комплексное сопряжение. Аналогично $\mathbb{C}P(n-1)$ допускает антисимплектическую инволюцию $\hat{\Gamma}$, индуцированную антисимплектической инволюцией Γ симплектического векторного пространства $(\mathbb{C}^n, \Omega)$, $\Gamma(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) := (\bar{u}_{n-1}, \dots, \bar{u}_1, \bar{u}_n)$, т. е. Γ действует как отражение, составленное из комплексных сопряжений первых $n-1$ координат, а элемент u_n выбран специальным образом в соответствии с погружением M_y^{loc} в $\mathbb{C}P(n-1)$ (см. формулу (3.20)). Теперь можно показать, что если φ_β является любым симплектоморфизмом Делзанта, удовлетворяющим условию (3.18), то

$$\varphi_\alpha := \hat{m} \circ \varphi_\beta \circ \hat{\Gamma} \quad (3.28)$$

также обладает требуемыми свойствами. Это предполагает антисимплектическое свойство инволюции

$$(\hat{\Gamma} \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)^2 = \text{id}_{\mathbb{C}P(n-1)}, \quad (3.29)$$

и можно также доказать, что $(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)^4 = \text{id}_{\mathbb{C}P(n-1)}$ в соответствии с результатами работы [1].

4. СПЕКТРЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ КВАНТОВАНИЕМ КЭЛЕРА

Итак, мы видели в разделе 3, что редуцированное квазигамильтоновой редукцией фазовое пространство $(P, \hat{\omega})$ несет в себе два тороидальных отображения моментов, определенные двумя наборами функций: $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$. После этого мы выявили симплектоморфизм между $(P, \hat{\omega})$ и $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$, который переводит любое из этих отображений моментов в стандартное отображение момента тора вращения на $\mathbb{C}P(n-1)$, приводя к соотношениям

$$\hat{\alpha}_k \leftrightarrow (\hat{J}_k + g) \leftrightarrow \hat{\beta}_k. \quad (4.1)$$

$\hat{J}_k \in C^\infty(\mathbb{C}P(n-1))$ образуются из $J_k \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ (3.14) с помощью обычной симплектической редукции. Согласно (3.26) $\hat{\beta}_k$ представляют собой глобальные аналоги положений частиц компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайдера, для которой $\hat{\alpha}_k$ служат *переменными действия*.

Вспомним, что стандартные гамильтонианы Рейсенарса–Шнайдера $\mathcal{H}_r$, $r = 1, \dots, n-1$, представляют собой действительные части элементарных симметричных функций матрицы Лакса. Из уравнений (3.24), (3.26) и (3.8)–(3.10) следует, что единственные глобально гладкие расширения этих гамильтонианов оснащены элементарными симметричными функциями матрицы

$$\delta\left(\frac{a\hat{\alpha}}{2}\right) = \exp\left(-ia \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\alpha}_k \Lambda_k\right). \quad (4.2)$$

Следовательно, коммутирующие квантовые операторы $\mathcal{H}_r^{\text{op}}$ можно определить взятием элементарных симметричных функций от

$$\delta\left(\frac{a\hat{\alpha}^{\text{op}}}{2}\right) = \exp\left(-ia \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\alpha}_k^{\text{op}} \Lambda_k\right) \quad (4.3)$$

при условии, что можно построить коммутирующие самосопряженные операторы $\hat{\alpha}_k^{\text{op}}$, соответствующие переменным действия.

Теперь мы видим, что стандартное квантование Кэлера для $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$ приводит к естественному квантованию функций $\hat{J}_k$, и через симплектоморфизм, в силу которого $\hat{\alpha}_k \leftrightarrow (\hat{J}_k + g)$, этот факт можно использовать для квантования переменных $\hat{\alpha}_k$. С помощью такой процедуры *немедленно получается совместный спектр итоговых квантованных переменных действия*. Разумеется, применение аналогичной процедуры квантования к $\hat{\beta}_k$ приводит к тому же спектру.

Продолжая это рассуждение, очертим кванто-механический эквивалент классической процедуры редукции, в силу которой мы получили $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$ из канонического симплектического пространства $(\mathbb{C}^n, \Omega)$. Для этого рассмотрим стандартное голоморфное квантование пространства $(\mathbb{C}^n, \Omega)$. Это порождает коммутирующие самосопряженные операторы $J_l^{\text{op}} = u_l \partial / \partial u_l$. Общий ортонормированный базис собственных векторов операторов

$$(J_1^{\text{op}}, \dots, J_n^{\text{op}}) \quad (4.4)$$

можно представить в виде n -кратного набора

$$|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle \quad (4.5)$$

с произвольными $\nu_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $l = 1, \dots, n$. Другими словами, J_l^{op} , $l = 1, \dots, n$, являются “операторами-числами” независимых гармонических осцилляторов и ν_l – соответствующие собственные числа. Поскольку это голоморфные функции на фазовом пространстве $\mathbb{C}^n$, то с точностью до нормировочной константы можно представить $|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle \sim \prod_{l=1}^n u_l^{\nu_l}$.

Теперь проквантуем $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$ с помощью квантовой гамильтоновой редукиции. На самом деле это требует наложения на состояния системы квантового аналога $U(1)$ -ограничения на отображения моментов

$$\sum_{k=1}^n J_k = M. \quad (4.6)$$

Редуцированное пространство Гильберта покрывается теми базисными векторами $|\nu_1, \dots, \nu_n\rangle$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \nu_k = M. \quad (4.7)$$

Следовательно, должно быть выполнено *условие квантования* $M \in \mathbb{Z}_{>0}$. Результирующий отнормированный базис редуцированного пространства Гильберта можно рассматривать как $(n-1)$ -кратный набор

$$|\nu_1, \dots, \nu_{n-1}\rangle_{\text{red}} \quad (4.8)$$

при условии $\nu_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \leq M$. Такой $(n-1)$ -кратный набор представляет собой состояние

$$\left| \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, M - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \right\rangle \quad (4.9)$$

в изначальном пространстве Гильберта. Процедура квантовой гамильтоновой редукиции порождает коммутирующие операторы $\hat{J}_l^{\text{op}}$, которые действуют на редуцированном пространстве Гильберта согласно формулам

$$\hat{J}_l^{\text{op}} |\nu_1, \dots, \nu_{n-1}\rangle_{\text{red}} = \nu_l |\nu_1, \dots, \nu_{n-1}\rangle_{\text{red}}. \quad (4.10)$$

Проще говоря, операторы $\hat{J}_l^{\text{op}}$ представляют собой просто сужения операторов J_l^{op} на состояния, удовлетворяющие ограничению (4.7).

Стоит отметить, что редуцированное пространство Гильберта, определенное выше, то же самое, что и результат (геометрического) квантования Кэлера пространства $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$. Это можно проверить, рассматривая состояние (4.8) как $U(1)$ -эквивариантную комплексную функцию на $\chi^{-1}(M) \subset \mathbb{C}^n$ (см. формулу (3.16)). Только что упомянутая функция является ограничением функции (4.9) и включает в себя голоморфную часть соответствующего пучка линий над $(\mathbb{C}P(n-1), M\omega_{\text{FS}})$.

Кстати, любое гамильтоново тороидальное многообразие можно квантовать аналогичным способом с помощью квантовой гамильтоновой редукции, что на несколько другом языке объясняется в работе [10].

Применяя указанное выше квантование Кэлера к переменным действия для компактифицированной системы Рейсенарса–Шнайдера, мы сразу получим из соотношений (4.1), что *совместный спектр квантованных операторов действия $\hat{\alpha}_k^{\text{op}}$ дается $(n-1)$ -кратным набором*

$$(\nu_1 + g, \dots, \nu_{n-1} + g) \quad (4.11)$$

при условии $\nu_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \leq M$. Совместный спектр операторов действия не вырожден (все общие собственные числа имеют кратность 1), а собственные числа коммутирующих гамильтонианов $\mathcal{H}_r^{\text{op}}$ можно получить как соответствующие симметричные функции матрицы

$$\delta\left(\frac{a(\nu + g\varrho)}{2}\right) = \exp\left(-ia \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_k + g)\Lambda_k\right), \quad (4.12)$$

где $\varrho := \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_k$ и следует помнить о соответствии (1.6).

Приведенный выше очень простой анализ воспроизводит результат ван Дижена и Винета [2], которые определили совместный спектр коммутирующих гамильтонианов $\mathcal{H}_r^{\text{op}}$ с помощью квантования Шредингера. Они использовали коммутирующие формальные сеточные операторы (введенные ранее Рейсенарсом), самосопряженные на конечномерном пространстве Гильберта. Гамильтонианы $\mathcal{H}_r^{\text{op}}$ были диагонализированы нетривиальными вычислениями. Их конечномерное пространство Гильберта строится на решетке из точек $\sum_{k=1}^{n-1} (\nu_k + g)\Lambda_k$, удовлетворяющих тому же условию, что мы имеем для (4.8). Эта решетка рассматривается как дискретизация глобальных переменных, которыми являются положения частиц. Мы объяснили, что такая дискретизация, так же как и спектры гамильтонианов, следует из квантования Кэлера, т. е. квантования Кэлера и Шредингера приводят к одинаковому результату.

Можно воспроизвести спектральные результаты работы [2], и далее было бы интересно вывести также их собственные функции и соответствующее квантованное дуальное отображение с помощью геометрических методов (квантования).

Благодарности. К. Климчик выражает благодарность организаторам конференции CQIS (Протвино, январь 2011) за возможность представить эту работу, которая получила частичную финансовую поддержку от Hungarian Scientific Research Fund (ОТКА), грант K 77400.

Список литературы

- [1] S. N. M. Ruijsenaars, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **31**:2 (1995), 247–353.
- [2] J. F. van Diejen, L. Vinet, *Commun. Math. Phys.*, **197**:1 (1998), 33–74, arXiv: math/9709221.
- [3] L. Fehér, C. Klimčík, *Nucl. Phys. B*, **860**:3 (2012), 464–515, arXiv: 1101.1759.
- [4] A. Alekseev, A. Malkin, E. Meinrenken, *J. Diff. Geom.*, **48**:3 (1998), 445–495, arXiv: dg-ga/9707021.

- [5] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **436**:3 (1995), 582–608, arXiv: hep-th/9401017.
- [6] J.-H. Lu, “Momentum mappings and reduction of Poisson actions”, *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable systems* (Berkeley, CA, 1989), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **20**, eds. P. Dazord, A. Weinstein, Springer, New York, 1991, 209–226.
- [7] L. Fehér, C. Klimčík, *Commun. Math. Phys.*, **301** (2011), 55–104, arXiv: 0906.4198.
- [8] M. Audin, A. Cannas da Silva, E. Lerman, *Symplectic Geometry of Integrable Hamiltonian Systems*, Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [9] T. Delzant, *Bull. Soc. Math. France*, **116**:3 (1988), 315–339.
- [10] M.D. Hamilton, “The quantization of a toric manifold is given by the integer lattice points in the moment polytope”, *Toric Topology*, Contemp. Math., **460**, eds. M. Harada, Y. Karshon, M. Masuda, T. Panov, AMS, Providence, RI, 2008, 131–140, arXiv: 0708.2710.