Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Эгбали, А. Резаи-Агдам, Классические r -матрицы
двух- и трехмерных супербиалгебр Ли и их супергруппы
Пуассона–Ли, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 100–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 09:11:30

© 2012 г.

А. Эгбали*, А. Резаи-Агдам*

КЛАССИЧЕСКИЕ r -МАТРИЦЫ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ СУПЕРБИАЛГЕБР ЛИ И ИХ СУПЕРГРУППЫ ПУАССОНА–ЛИ

Получены классические r -матрицы двух- и трехмерных супербиалгебр Ли. На основании этого классифицируются все двух- и трехмерные кограничные супербиалгебры Ли и их типы (треугольные, квазитреугольные или факторизуемые). С использованием суперскобки Складина получены суперпуассоновы структуры на связанных с ними супергруппах Пуассона–Ли.

Ключевые слова: супербиалгебра Ли, супергруппа Пуассона–Ли, классическая r -матрица.

1. ВВЕДЕНИЕ

В математике биалгебры Ли впервые были введены Дринфельдом как алгебраические структуры и классический предел квантованных обертывающих алгебр (*квантовых групп*) [1]. В частности, каждая деформация универсальной обертывающей алгебры индуцирует структуру биалгебры Ли на соответствующей алгебре Ли. И наоборот, как было показано в работе [2], каждая биалгебра Ли допускает квантование. Поэтому классификацию биалгебр Ли можно рассматривать как первый шаг в классификации квантовых групп. С другой стороны, с физической точки зрения теория классических интегрируемых систем естественным образом связана с геометрией и теорией представлений групп Пуассона–Ли и соответствующими биалгебрами Ли и их классическими r -матрицами (см., например, [3]). Более того, биалгебры Ли и группы Пуассона–Ли можно применять в теории T -дуальных сигма-моделей Пуассона–Ли [4] и $N = 2$ суперконформных теориях поля [5]. Супербиалгебры Ли [6], как алгебры симметрии, играют важную роль в интегрируемых структурах AdS/CFT-соответствия [7], а также в моделях Тоды на супералгебрах Ли [8]. Аналогично можно рассмотреть T -дуальные сигма-модели Пуассона–Ли на супергруппах Пуассона–Ли [9]. Таким образом, а также с учетом того, что существует универсальное квантование для супербиалгебр Ли [10], классификация супербиалгебр Ли (особенно супербиалгебр Ли низких размерностей) оказывается важной как с физической, так и с математической точки зрения. В работах [11]

*Department of Physics, Faculty of Science, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran. E-mail: rezaei-a@azaruniv.edu

и [12] мы классифицировали все двух- и трехмерные супербиалгебры Ли. В настоящей работе, следуя работам [11] и [12], мы находим классические r -матрицы этих супербиалгебр Ли и определяем их типы (треугольные, квазитреугольные или факторизуемые). Более того, мы получаем суперпуассоновы структуры на соответствующих супергруппах Пуассона–Ли.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приведены некоторые основные определения и обозначения для кограничных супербиалгебр Ли и супертроек Манина. В разделе 3 перечислены разложимые и неразложимые супералгебры Ли и связанные с ними супербиалгебры Ли [11], [12]. В разделе 4 с использованием присоединенного и матричного представлений вычисляются классические r -матрицы и определяются двух- и трехмерные кограничные (треугольные, квазитреугольные или факторизуемые) супербиалгебры Ли. В разделе 5 мы сначала вычисляем инвариантные супервекторные поля, а затем, используя суперскобки Складина, получаем суперпуассоновы структуры на двух- и трехмерных супергруппах Пуассона–Ли.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей работе мы применяем обозначения де Витта для супервекторных пространств, суперматриц и т. д. [13]. Напомним некоторые основные определения и предложения, касающиеся супербиалгебр Ли [6], [11], [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Супералгебра Ли $\mathbf{g}$ является градуированным векторным пространством $\mathbf{g} = \mathbf{g}_B \oplus \mathbf{g}_F$ с градуировками $\text{grad}(\mathbf{g}_B) = 0$ и $\text{grad}(\mathbf{g}_F) = 1$, так что скобка Ли удовлетворяет суперантисимметричному тождеству и супертождеству Якоби, т. е. в градуированном базисе $\{X_i\}$ в $\mathbf{g}$ имеем¹⁾*

$$[X_i, X_j] = f^k_{ij} X_k, \quad (1)$$

и

$$(-1)^{i(j+k)} f^m_{jl} f^l_{ki} + f^m_{il} f^l_{jk} + (-1)^{k(i+j)} f^m_{kl} f^l_{ij} = 0, \quad (2)$$

так что

$$f^k_{ij} = -(-1)^{ij} f^k_{ji}. \quad (3)$$

Более того, имеем

$$f^k_{ij} = 0, \quad \text{grad}(i) + \text{grad}(j) \neq \text{grad}(k) \pmod{2}. \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, $\mathbf{g}^*$ – ее дуальное суперпространство относительно невырожденного канонического спаривания $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbf{g}^* \oplus \mathbf{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Структура *супербиалгебры Ли* на супералгебре Ли $\mathbf{g}$ является линейным отображением $\delta: \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$ (*суперкоммутатором*) таким, что:

1) δ является супер-1-циклом, т. е.²⁾

$$\delta([X, Y]) = (\text{ad}_X \otimes I + I \otimes \text{ad}_X) \delta(Y) - (-1)^{|X||Y|} (\text{ad}_Y \otimes I + I \otimes \text{ad}_Y) \delta(X) \quad (5)$$

$$\forall X, Y \in \mathbf{g};$$

¹⁾Заметим, что скобка в случае пары бозон–бозон или бозон–фермион представляет собой обычный коммутатор, однако в случае пары фермион–фермион она представляет собой антикоммутатор. Более того, мы обозначаем градуировку индексов теми же индексами в степени числа -1 , например $\text{grad}(i) \equiv i$; такие обозначения применял де Витт в работе [13].

²⁾Здесь $|X|$ ($|Y|$) обозначает градуировку элемента X (Y).

2) дуальное отображение ${}^t\delta: \mathbf{g}^* \otimes \mathbf{g}^* \rightarrow \mathbf{g}^*$ является суперскобкой Ли на $\mathbf{g}^*$, т.е.

$$(\xi \otimes \eta, \delta(X)) = ({}^t\delta(\xi \otimes \eta), X) = ([\xi, \eta]_*, X) \quad \forall X \in \mathbf{g}, \quad \xi, \eta \in \mathbf{g}^*. \quad (6)$$

Супербиалгебру Ли, определяемую таким способом, будем обозначать как $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ или $(\mathbf{g}, \delta)$ [6], [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Супербиалгебра Ли является *кограничной*, если суперкоммутатор является 1-кограницей, т.е. если существует элемент $r \in \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$ такой, что

$$\delta(X) = (I \otimes \text{ad}_X + \text{ad}_X \otimes I)r \quad \forall X \in \mathbf{g}. \quad (7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Две кограничные супербиалгебры Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ и $(\mathbf{g}', \mathbf{g}'^*)$, определенные с помощью $r \in \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$ и $r' \in \mathbf{g}' \otimes \mathbf{g}'$, являются изоморфными тогда и только тогда, когда имеется изоморфизм супералгебр Ли $\alpha: \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}'$ такой, что $(\alpha \otimes \alpha)r - r'$ есть $\mathbf{g}'$ -инвариант [14], т.е.

$$(I \otimes \text{ad}_X + \text{ad}_X \otimes I)((\alpha \otimes \alpha)r - r') = 0 \quad \forall X \in \mathbf{g}'. \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кограничная супербиалгебра Ли может быть двух различных типов.

А. Если r является суперкососимметричным решением классического уравнения Янга–Бакстера (КУЯБ), т.е. $r^{ij} = -(-1)^{ij}r^{ji}$ и

$$[[r, r]] = 0, \quad (9)$$

то говорят, что кограничная супербиалгебра Ли является *треугольной*. При этом суперскобка Схоутена определяется как³⁾

$$[[r, r]] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}], \quad (10)$$

и если обозначить $r = r^{ij}X_i \otimes X_j$, то $r_{12} = r^{ij}X_i \otimes X_j \otimes 1$, $r_{13} = r^{ij}X_i \otimes 1 \otimes X_j$ и $r_{23} = r^{ij}1 \otimes X_i \otimes X_j$. Решение КУЯБ часто называют *классической r -матрицей*.

Б. Если r – решение КУЯБ такое, что $r_{12} + r_{21}$ является $\mathbf{g}$ -инвариантным элементом в $\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$, то говорят, что кограничная супербиалгебра Ли *квазитреугольная*. Более того, если суперсимметричная часть r обратима, то матрица r называется *факторизуемой*.

Иногда условие Б можно заменить на следующее.

Б'. Если r – суперкососимметричное решение модифицированного КУЯБ

$$[[r, r]] = \omega, \quad \omega \in \bigwedge^3 \mathbf{g}, \quad (11)$$

то говорят, что кограничная супербиалгебра Ли является *квазитреугольной* [6].

Заметим, что если $\mathbf{g}$ – супербиалгебра Ли, то $\mathbf{g}^*$ – также супербиалгебра Ли [6], однако это не всегда верно для свойства кограничности.

³⁾Заметим, что r имеет грасманову четность нуль, а грасманова четность r^{ij} определяется индексами; например, имеем $[r_{12}, r_{13}] = (-1)^{i(k+l)+jl}r^{ij}r^{kl}[X_i, X_k] \otimes X_j \otimes X_l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathbf{g}$ – кограничная супербиалгебра Ли с супер-1-коциклом δ , а $\mathbf{g}^*$ – также кограничная супербиалгебра Ли с супер-1-коциклом δ^* ,

$$\forall \xi \in \mathbf{g}^* \quad \exists r^* \in \mathbf{g}^* \otimes \mathbf{g}^*, \quad \delta^*(\xi) = (I \otimes \text{ad}_\xi + \text{ad}_\xi \otimes I)r^*, \quad (12)$$

где $\delta^*: \mathbf{g}^* \longrightarrow \mathbf{g}^* \otimes \mathbf{g}^*$. Тогда пара $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ называется *би- r -матричной супербиалгеброй Ли* [14], если суперскобка Ли $[\cdot, \cdot]'$ на $\mathbf{g}$, определяемая с помощью ${}^t\delta^*$ как

$$(\delta^*(\xi), X \otimes Y) = (\xi, {}^t\delta^*(X \otimes Y)) = (\xi, [X, Y]') \quad \forall X, Y \in \mathbf{g}, \quad \xi \in \mathbf{g}^*, \quad (13)$$

эквивалентна исходной [14], т. е.

$$[X, Y]' = S^{-1}[SX, SY] \quad \forall X, Y \in \mathbf{g}, \quad S \in \text{Aut}(\mathbf{g}). \quad (14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Супертройка Манина* представляет собой тройку супералгебр Ли $(\mathcal{D}, \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$ вместе с невырожденной ад-инвариантной суперсимметричной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{D}$ такой, что:

- 1) $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ являются подсупералгебрами Ли супералгебры $\mathcal{D}$;
- 2) $\mathcal{D} = \mathbf{g} \oplus \tilde{\mathbf{g}}$ как супервекторное пространство;
- 3) $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ изотропны относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т. е.

$$\langle X_i, X_j \rangle = \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0, \quad \delta_i{}^j = \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = (-1)^{ij} \langle \tilde{X}^j, X_i \rangle = (-1)^{ij} \delta^j{}_i, \quad (15)$$

где $\{X_i\}$ и $\{\tilde{X}^i\}$ – базисы супералгебр Ли $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ соответственно [6], [11].

Заметим, что в соотношении (15) $\delta^j{}_i$ – обыкновенная дельта-функция. Имеется взаимно однозначное соответствие между супербиалгеброй Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ и супертройкой Манина $(\mathcal{D}, \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$, где $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^*$. Если выбрать структурные константы супералгебр Ли $\mathbf{g}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ так, что

$$[X_i, X_j] = f^k{}_{ij} X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}^{jk}{}_i \tilde{X}^k, \quad (16)$$

то из ад-инвариантности билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{D} = \mathbf{g} \oplus \tilde{\mathbf{g}}$ следует, что [11]

$$[X_i, \tilde{X}^j] = (-1)^j \tilde{f}^{jk}{}_i X_k + (-1)^i f^j{}_{ki} \tilde{X}^k. \quad (17)$$

Очевидно, используя соотношения (6), (15) и (16), имеем

$$\delta(X_i) = (-1)^{jk} \tilde{f}^{jk}{}_i X_j \otimes X_k. \quad (18)$$

Заметим, что множитель $(-1)^{jk}$ появляется в этом соотношении в связи с определением естественного скалярного произведения между $\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$ и $\mathbf{g}^* \otimes \mathbf{g}^*$ как $(\tilde{X}^i \otimes \tilde{X}^j, X_k \otimes X_l) = (-1)^{jk} \delta^i{}_k \delta^j{}_l$. В результате, если мы применим это соотношение супер-1-коцикла к условию (5), то получим супертождества Якоби (2) для дуальной супералгебры Ли и смешанные супертождества Якоби:

$$f^m{}_{jk} \tilde{f}^{il}{}_m = f^i{}_{mk} \tilde{f}^{ml}{}_j + f^l{}_{jm} \tilde{f}^{im}{}_k + (-1)^{jl} f^i{}_{jm} \tilde{f}^{ml}{}_k + (-1)^{ik} f^l{}_{mk} \tilde{f}^{im}{}_j. \quad (19)$$

Это соотношение также можно получить из супертождества Якоби для супералгебры $\mathcal{D}$.

3. ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ И СУПЕРБИАЛГЕБРЫ ЛИ

В работе [11] мы получили и классифицировали все двух- и трехмерные супербиалгебры Ли для всех двух- и трехмерных неразложимых супералгебр Ли. Метод классификации является новым и представляет собой усовершенствование и обобщение на супералгебры Ли метода из работы [15]⁴⁾. В рамках этого метода путем прямого вычисления, используя присоединенное представление супертождества Якоби и смешанных супертождеств Якоби (2) и (19), мы находим дуальные супералгебры Ли; затем, используя лиевские супергруппы автоморфизмов супералгебр Ли, мы классифицируем все неизоморфные двух- и трехмерные супербиалгебры Ли [11], [12]. Для наглядности используемых обозначений и для самосогласованности работы в табл. 1–4 приведены соответственно двух- и трехмерные неразложимые и разложимые супералгебры Ли [17] и связанные с ними супербиалгебры Ли [11], [12] (заметим, что поскольку мы используем в настоящей работе обозначения де Витта и стандартный базис, структурные константы C_{FF}^B должны быть чисто мнимыми). В настоящем разделе мы будем использовать классификацию двух- и трехмерных супералгебр Ли, приведенную в работе [17]. В этой классификации супералгебры Ли делятся на два типа: тривиальные и нетривиальные супералгебры Ли, для которых коммутаторы в случае пары фермион–фермион равны или не равны нулю соответственно. Результаты представлены в табл. 1. Как видно из таблицы, $(m, n - m)$ супералгебры Ли имеют m бозонных генераторов $\{X_1, \dots, X_m\}$ и $n - m$ фермионных генераторов $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$. При нумерации тривиальных супералгебр Ли буквы A , B и C с целочисленными верхними индексами i и вещественными нижними индексами p обозначают классы эквивалентности супералгебр Ли размерности d , где $d = 1$ для A , $d = 2$ для B и $d = 3$ для C . Верхние индексы i и вещественные нижние индексы p обозначают число неизоморфных супералгебр Ли и параметры супералгебры Ли соответственно. Для нетривиальных супералгебр Ли к символу в скобках для соответствующей тривиальной супералгебры Ли добавляется, где это необходимо, целочисленный верхний индекс и вещественный нижний индекс.

В табл. 1 разложимые супералгебры Ли имеют вид $B + A_{1,1} = B \oplus A_{1,1}$, $(2A_{1,1} + A) = (A_{1,1} + A) \oplus A_{1,0}$, $C_0^1 = C_{p=0}^1$, $C_0^2 = C_{p=0}^2 = B \oplus A_{0,1}$ и $(A_{1,1} + 2A)^0 = (A_{1,1} + A) \oplus A_{0,1}$. Супералгебра Ли A является одномерной абелевой супералгеброй Ли с одним фермионным генератором, причем супералгебра Ли $A_{1,1}$ является ее бозонизацией. Более того, супералгебра $(C_{1/2}^1)$ отлична от C_p^1 , что мы показываем с помощью $C_{p=1/2}^1$.

Некоторые из приведенных в табл. 1 супералгебр Ли малых размерностей являются подсупералгебрами Ли классических супералгебр Ли:

$$B \subset gl(1 | 1), osp(1 | 2), \quad (A_{1,1} + A) \subset osp(1 | 2), \quad B + A_{1,1} \subset gl(1 | 1),$$

$$C_0^1 \subset osp(1 | 2), \quad C_p^1 \subset osp(1 | 2), \quad (C_{1/2}^1) \subset osp(1 | 2), e(2),$$

$$(A_{1,1} + 2A)^0 \subset e(2).$$

⁴⁾Заметим, что в работе [16], к сожалению, отсутствует стандартный и логичный метод получения биалгебр Ли низких размерностей.

ТАБЛИЦА 1. Двух- и трехмерные разложимые и неразложимые супералгебры Ли.

Тип	$\mathfrak{g}$	Бозон- ный базис	Фермион- ный базис	Ненулевые (анти)коммутационные соотношения	Комментарии
(1, 1)	B	X_1	X_2	$[X_1, X_2] = X_2$	ТРВ
(2, 1)	$(A_{1,1} + A)$	X_1	X_2	$\{X_2, X_2\} = X_1$	НТР
	$B + A_{1,1}$	X_1, X_2	X_3	$[X_1, X_3] = X_3$	РЗР, ТРВ
	$(2A_{1,1} + A)$	X_1, X_2	X_3	$\{X_3, X_3\} = X_1$	НЛП, НТР
	C_0^1	X_1, X_2	X_3	$[X_1, X_2] = X_2$	РЗР, ТРВ
	C_p^1	X_1, X_2	X_3	$[X_1, X_2] = X_2,$ $[X_1, X_3] = pX_3$	$p \neq 0$, ТРВ
(1, 2)	$(C_{1/2}^1)$	X_1, X_2	X_3	$[X_1, X_2] = X_2,$ $[X_1, X_3] = X_2,$ $[X_1, X_3] = \frac{1}{2}X_3,$ $\{X_3, X_3\} = X_2$	НТР
	C_0^2	X_1	X_2, X_3	$[X_1, X_2] = X_2$	РЗР, ТРВ
	$(A_{1,1} + 2A)^0$	X_1	X_2, X_3	$\{X_2, X_2\} = X_1$	НЛП, НТР
	C_p^2	X_1	X_2, X_3	$[X_1, X_2] = X_2,$ $[X_1, X_3] = pX_3$	$0 < p \leq 1$, ТРВ
	C^3	X_1	X_2, X_3	$[X_1, X_3] = X_2$	НЛП, ТРВ
	C^4	X_1	X_2, X_3	$[X_1, X_2] = X_2,$ $[X_1, X_3] = X_2 + X_3$	ТРВ
	C_p^5	X_1	X_2, X_3	$[X_1, X_2] = pX_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + pX_3$	$p \geq 0$, ТРВ
	$(A_{1,1} + 2A)^1$	X_1	X_2, X_3	$\{X_2, X_2\} = X_1, \{X_3, X_3\} = X_1$	НЛП, НТР
	$(A_{1,1} + 2A)^2$	X_1	X_2, X_3	$\{X_2, X_2\} = X_1, \{X_3, X_3\} = -X_1$	НЛП, НТР

Примечание: ТРВ – тривиальные, НТР – нетривиальные, РЗР – разрешимые, НЛП – нильпотентные.

В табл. 4 все дуальные супералгебры Ли являются неизоморфными. Рассматривая их нижние индексы, эти дуальные супералгебры Ли можно представить посредством следующих обозначений: $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma} = (A_{1,1} + 2A)_{\alpha,\beta,\gamma}^0, (A_{1,1} + 2A)_{\alpha,\beta,\gamma}^1$ и $(A_{1,1} + 2A)_{\alpha,\beta,\gamma}^2$, где имеют место антикоммутационные соотношения

$$\{\tilde{X}^2, \tilde{X}^2\} = \alpha \tilde{X}^1, \quad \{\tilde{X}^2, \tilde{X}^3\} = \beta \tilde{X}^1, \quad \{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = \gamma \tilde{X}^1, \quad (20)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, -1, \epsilon, k, s$.

4. ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫЕ КОГРАНИЧНЫЕ СУПЕРБИАЛГЕБРЫ ЛИ

В настоящем разделе мы определим, сколько из 74 перечисленных в табл. 2–4 двух- и трехмерных супербиалгебр Ли являются кограничными. Заметим, что здесь мы будем работать в нестандартном базисе, поэтому будем опускать коэффициент $i = \sqrt{-1}$ во всех антикоммутационных соотношениях для супералгебр Ли и супербиалгебр Ли из работ [11] и [12]. Таким образом, мы должны найти $r = r^{ij} X_i \otimes X_j \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ так, чтобы суперкокоммутатор супербиалгебры Ли можно было записать в виде (7). Используя соотношения (7), (16) и (18), находим

$$\tilde{\mathcal{Y}}_i = \mathcal{X}_i^{\text{st}} r + (-1)^l r \mathcal{X}_i, \quad (21)$$

ТАБЛИЦА 2. Трехмерные супербиалгебры Ли типа $(2, 1)$.

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	Ненулевые (анти)коммутационные соотношения в $\tilde{\mathfrak{g}}$	Комментарии
$(2A_{1,1} + A)$ $B + A_{1,1}$	$I_{(2,1)}$ $I_{(2,1)}$ $B + A_{1,1} .i$ $(2A_{1,1} + A)$ $(2A_{1,1} + A).i$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = \tilde{X}^1$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = -\tilde{X}^1$	
C_p^1	$I_{(2,1)}$ $(2A_{1,1} + A)$ $(2A_{1,1} + A).i$ $(2A_{1,1} + A).ii$	$\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = \tilde{X}^1$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = -\tilde{X}^1$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = \tilde{X}^2$	$p \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{R}$ $p = 1/2$
C_0^1 $(C_{1/2}^1)$	$C_{-p}^1.i$ $C_{0,k}^1$ $I_{(2,1)}$ $C_p^1.i _{p=-1/2}$ $C_p^1.ii _{p=-1/2}$ $(C_{1/2}^1).i$ $(C_{1/2}^1).ii$ $(C_{1/2,k}^1)$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = p\tilde{X}^3$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = k\tilde{X}^2$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{1}{2}\tilde{X}^3$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\frac{1}{2}\tilde{X}^3$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\frac{1}{2}\tilde{X}^3,$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = \tilde{X}^1$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{1}{2}\tilde{X}^3,$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = -\tilde{X}^1$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = k\tilde{X}^2, [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \frac{k}{2}\tilde{X}^3,$ $\{\tilde{X}^3, \tilde{X}^3\} = k\tilde{X}^2$	$p \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

где индекс l соответствует строке матрицы $\mathcal{X}_i$, а $(\mathcal{X}_i)_l^k = -f_{il}^k$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}_i)^{jk} = -\tilde{f}^{jk}_i$ являются присоединенными представлениями для супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ соответственно (здесь верхний индекс “st” обозначает супертранспонирование). Теперь, используя приведенные выше соотношения, можно найти r -матрицы супербиалгебр Ли. Таким образом, мы можем определить, какие из представленных в табл. 2–4 супербиалгебр Ли являются кограничными, и получить их r -матрицы. Мы также проделаем это для дуальных супербиалгебр Ли $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, используя соотношения, аналогичные (21):

$$\mathcal{Y}^i = (\tilde{\mathcal{X}}^i)^{\text{st}} \tilde{r} + (-1)^l \tilde{r} \tilde{\mathcal{X}}^i, \quad (22)$$

где, как и ранее, $(\tilde{\mathcal{X}}^i)^j_l = -\tilde{f}^{ij}_l$ и $(\mathcal{Y}^i)_{jk} = -f_{jk}^i$. Результаты собраны в табл. 5–7. Заметим, что для определения суперскобок Схоутена на супергруппах Пуассона–Ли

ТАБЛИЦА 3. Двумерные супербиалгебры Ли типа $(1, 1)$.

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	(Анти)коммутационные соотношения в $\tilde{\mathfrak{g}}$
$(A_{1,1} + A)$ B	$I_{(1,1)}$ $I_{(1,1)}$ $(A_{1,1} + A)$ $(A_{1,1} + A).i$	$\{\tilde{X}^2, \tilde{X}^2\} = \tilde{X}^1$ $\{\tilde{X}^2, \tilde{X}^2\} = -\tilde{X}^1$

ТАБЛИЦА 4. Трехмерные супербиалгебры Ли типа $(1, 2)$, где $\epsilon = \pm 1$.

$\mathbf{g}$	$\tilde{\mathbf{g}}$	Комментарии
C_1^2	$I_{(1,2)}$ $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,\epsilon}^1$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,-\epsilon}^2$	
C_p^2 , $-1 \leq p < 1$	$I_{(1,2)}$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,\epsilon,\epsilon}^0$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,k,\epsilon}^1$ $(A_{1,1} + 2A)_{0,1,0}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,1,0}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,1,\epsilon}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,k,-\epsilon}^2$	$-1 < k < 1$ $k \in \mathbb{R}$
C^3	$I_{(1,2)}$ $(A_{1,1} + 2A)_{1,0,0}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,1}^0$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,\epsilon}^1$ $(A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,-\epsilon}^2$	
C^4	$I_{(1,2)}$ $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$ $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^1$ $(A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2$	$0 < k, s < 0$ $k < 0, 0 < s$
C_p^5 , $p \geq 0$	$I_{(1,2)}$ $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$ $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^1$ $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2$	$0 < k, s < 0$ $k < 0, 0 < s$
$(A_{1,1} + 2A)^0$	$I_{(1,2)}$	
$(A_{1,1} + 2A)^1$	$I_{(1,2)}$	
$(A_{1,1} + 2A)^2$	$I_{(1,2)}$	

важна информация о типе супербиалгебры Ли (является ли она треугольной или квазитреугольной). В результате мы классифицируем все типы двух- и трехмерных кограничных супербиалгебр Ли. Следует подчеркнуть два момента. Во-первых, во всех таблицах мы выписываем все кограничные супербиалгебры Ли $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$ с кограничными дуальными $(\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g})$. Поскольку такие структуры можно задать (с точностью до автоморфизма) с помощью пар r -матриц, естественно называть их би- r -матричными супербиалгебрами [14]. Здесь мы приводим полный список двух- и трехмерных кограничных и би- r -матричных супербиалгебр. Во-вторых, очевидно, что в табл. 5–7 мы рассмотрели суперкососимметричные r -матричные решения. Конечно, имеются другие решения для некоторых супербиалгебр Ли из этих таблиц. Эти решения также приведены в таблицах.

Как показано в табл. 5, имеются две би- r -матричные супербиалгебры Ли такие, что супербиалгебры Ли $(B, (A_{1,1} + A))$ и $(B, (A_{1,1} + A).i)$ являются треугольными, тогда как дуальные к ним, т. е. супербиалгебры Ли $((A_{1,1} + A), B)$ и $((A_{1,1} + A).i, B)$, являются квазитреугольными. Более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона для $((A_{1,1} + A), I_{(1,1)})$, мы должны положить $a = 0$, т. е. $r = 0$, в этом случае мы имеем тривиальное решение.

В табл. 6 $(C_{1/2,\epsilon=1}^1)$ и $(C_{1/2,\epsilon=-1}^1)$ обозначают дуальные супералгебры Ли для $(C_{1/2}^1.i)$ и $(C_{1/2}^1.ii)$ соответственно; $((2A_{1,1} + A), I_{(2,1)})$ – треугольные супербиалгебры Ли такие, что, как показано в разделе 5, для получения суперкососимметричных

Таблица 5. Двумерные кограничные и би- r -матричные супербиалгебры Ли типа $(1,1)$.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	r	$[[r, r]]$	$\tilde{r}$	$[[\tilde{r}, \tilde{r}]]$	Комментарии
$((A_{1,1} + A), I_{(1,1)})$	$aX_1 \otimes X_1$	0			$a \in \mathbb{R}$
$(B, (A_{1,1} + A))$	$-\frac{1}{4}X_2 \wedge X_2$	0	$a\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \frac{1}{2}\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2$	$-\frac{1}{2}\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2$	$a \in \mathbb{R}$
$(B, (A_{1,1} + A).i)$	$\frac{1}{4}X_2 \wedge X_2$	0	$a\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 - \frac{1}{2}\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2$	$\frac{1}{2}\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2$	$a \in \mathbb{R}$

суперскобок Пуассона следует положить $a = d = 0$, $b = -c$, так что ее r -матрица будет иметь вид $r = bX_1 \wedge X_2$.

Заметим, что, вообще говоря, мы имеем

$$X_i \wedge X_j \wedge X_k = X_i \otimes X_j \otimes X_k + (-1)^{i(j+k)} X_j \otimes X_k \otimes X_i + (-1)^{k(i+j)} X_k \otimes X_i \otimes X_j - (-1)^{jk} X_i \otimes X_k \otimes X_j - (-1)^{ij} X_j \otimes X_i \otimes X_k - (-1)^{ij+ik+jk} X_k \otimes X_j \otimes X_i.$$

Таблица 6. Трехмерные кограничные и би- r -матричные супербиалгебры Ли типа $(2, 1)$, где ζ, η являются a -числами.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	r	Комментарии
$((2A_{1,1} + A), I_{(2,1)})$	$r = aX_1 \otimes X_1 + bX_1 \otimes X_2 + cX_2 \otimes X_1 + dX_2 \otimes X_2$	$a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$(B + A_{1,1}, I_{(2,1)})$	$[[r, r]] = 0$ $r = aX_2 \otimes X_2$	$a \in \mathbb{R}$
$(B + A_{1,1}, B + A_{1,1}.i)$	$[[r, r]] = 0$ $r = aX_2 \otimes X_2 + X_1 \wedge X_2$	$a \in \mathbb{R}$
$(B + A_{1,1}, (2A_{1,1} + A))$	$[[r, r]] = 0$ $\tilde{r} = b\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 - \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = 0$ $r = aX_2 \otimes X_2 - \frac{1}{4}X_3 \wedge X_3$	$b \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$
$(B + A_{1,1}, (2A_{1,1} + A).i)$	$[[r, r]] = 0$ $\tilde{r} = b\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + c\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^2 + d\tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^1 + e\tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^2 + \frac{1}{2}\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = -\frac{1}{2}\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $r = aX_2 \otimes X_2 + \frac{1}{4}X_3 \wedge X_3$	$b, c, d, e \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$
$(C_p^1, (2A_{1,1} + A))$	$[[r, r]] = 0$ $\tilde{r} = b\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + c\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^2 + d\tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^1 + e\tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^2 - \frac{1}{2}\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = \frac{1}{2}\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $r_1 = -\frac{1}{4p}X_3 \wedge X_3$ $[[r_1, r_1]] = 0$ $r_2 = \zeta X_2 \otimes X_3 + \eta X_3 \otimes X_2 - \frac{1}{4}X_3 \wedge X_3$ $[[r_2, r_2]] = 0$	$b, c, d, e \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ $p = 1$

Продолжение табл. 6

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	r	Комментарии
$(C_p^1, (2A_{1,1} + A).i)$	$r_1 = \frac{1}{4p} X_3 \wedge X_3$ $[r_1, r_1] = 0$ $r_2 = \zeta X_2 \otimes X_3 + \eta X_3 \otimes X_2 + \frac{1}{4} X_3 \wedge X_3$ $[r_2, r_2] = 0$	$p \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ $p = 1$
$(C_p^1, C_{-p}^1.i)$	$r_1 = X_1 \wedge X_2 + \frac{a}{2} X_3 \wedge X_3$ $[r_1, r_1] = 0$ $r_2 = X_1 \wedge X_2 + \zeta X_2 \wedge X_3$ $[r_2, r_2] = 0$ $r_3 = X_1 \wedge X_2$ $[r_3, r_3] = 0$	$p = 0, a \in \mathbb{R}$ $p = 1$ $p \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
$(C_p^1, I_{(2,1)})$	$\tilde{r}_1 = -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 + \frac{b}{2} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[\tilde{r}_1, \tilde{r}_1] = 0$ $\tilde{r}_2 = -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 + \zeta \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3$ $[\tilde{r}_2, \tilde{r}_2] = 0$ $\tilde{r}_3 = -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2$ $[\tilde{r}_3, \tilde{r}_3] = 0$	$p = 0, b \in \mathbb{R}$ $p = -1$ $p \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$
$(C_p^1, I_{(2,1)})$	$r_1 = \frac{a}{2} X_3 \wedge X_3$ $[r_1, r_1] = 0$ $r_2 = \zeta X_2 \otimes X_3 + \eta X_3 \otimes X_2$ $[r_2, r_2] = 0$	$p = 0, a \in \mathbb{R}$ $p = 1$
$((C_{1/2}^1), C_p^1.i _{p=-1/2})$	$r = X_1 \wedge X_2$ $[r, r] = 0$ $\tilde{r} = -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 - \frac{1}{2} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[\tilde{r}, \tilde{r}] = \frac{1}{2} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$	
$((C_{1/2}^1), C_p^1.ii _{p=-1/2})$	$r = -X_1 \wedge X_2$ $[r, r] = 0$ $\tilde{r} = \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 + \frac{1}{2} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[\tilde{r}, \tilde{r}] = -\frac{1}{2} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$	
$((C_{1/2}^1), (C_{1/2}^1, \epsilon))$	$r = \epsilon X_1 \wedge X_2 - \frac{\epsilon}{2} X_3 \wedge X_3$ $[r, r] = 0$ $\tilde{r} = -\frac{1}{\epsilon} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[\tilde{r}, \tilde{r}] = 0$	$\epsilon = \pm 1$ $\epsilon = \pm 1$

Аналогично для треугольной супербиалгебры Ли $(B + A_{1,1}, I_{(2,1)})$ имеем $r = 0$, для би- r -матричной супербиалгебры Ли $(B + A_{1,1}, B + A_{1,1}|.i)$ треугольного типа имеем $r = X_1 \wedge X_2$ (т. е. $a = 0$) и $\tilde{r} = -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2$ (т. е. $b = 0$). В случае би- r -матричных супербиалгебр Ли $(B + A_{1,1}, (2A_{1,1} + A))$ и $(B + A_{1,1}, (2A_{1,1} + A).i)$ треугольного типа и квазитреугольного типа для дуальных к ним имеем $r = -\frac{1}{4} X_3 \wedge X_3$ (т. е. $a = 0$) и $r = \frac{1}{4} X_3 \wedge X_3$ (т. е. $a = 0$) соответственно.

Таблица 7. Трехмерные кограничные и би- r -матричные супербиалгебры Ли типа $(1, 2)$, где ζ, η являются a -числами.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	r	Комментарии
$(C_p^2, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma}), p \leq 1$	$r_1 = -\frac{\alpha}{4} X_2 \wedge X_2 - \beta X_2 \wedge X_3 + \frac{b}{2} X_3 \wedge X_3$ $[[r_1, r_1]] = 0$ $r_2 = -\frac{\alpha}{4} X_2 \wedge X_2 + b X_2 \otimes X_3 + c X_3 \otimes X_2 +$ $+\frac{\gamma}{4} X_3 \wedge X_3$ $[[r_2, r_2]] = 0$ $r_3 = -\frac{\alpha}{4} X_2 \wedge X_2 - \frac{\beta}{1+p} X_2 \wedge X_3 - \frac{\gamma}{4p} X_3 \wedge X_3$ $[[r_3, r_3]] = 0$	$p = 0, \gamma = 0, b \in \mathbb{R}$ $p = -1, \beta = 0, b, c \in \mathbb{R}$ $p \in (-1, 1] - \{0\}$
$(C^3, I_{(1,2)})$	$\tilde{r}_1 = b \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \zeta \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^3 + \eta \tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^1 +$ $+\frac{1}{2\alpha} \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2 + \frac{\epsilon}{2} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}_1, \tilde{r}_1]] = -\frac{1}{2\alpha} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2$ $\tilde{r}_2 = b \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \frac{1}{2\alpha} \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2 +$ $+\frac{p}{2\gamma} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}_2, \tilde{r}_2]] = -\frac{1}{2\alpha} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2 - \frac{p^2}{2\gamma} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$	$p = 0, \beta = \gamma = 0, \alpha \neq 0,$ $b, c \in \mathbb{R}$ $p \in [-1, 1] - \{0\}, b \in \mathbb{R}$ $\beta = 0, \alpha, \gamma \neq 0$ $c, d \in \mathbb{R}$
$(C^3, I_{(1,2)})$	$r = \zeta X_1 \wedge X_2 + \frac{\epsilon}{2} X_2 \wedge X_2 + d(X_2 \otimes X_3 - X_3 \otimes X_2)$ $[[r, r]] = 0$	$c, d \in \mathbb{R}$
$(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{1,0,0}^0)$	$r = \frac{b}{2} X_2 \wedge X_2 + c X_2 \otimes X_3 - (1+c) X_3 \otimes X_2$ $[[r, r]] = 0$	$b, c \in \mathbb{R}$
$(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2)$	$\tilde{r} = m \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \zeta(\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^3 +$ $+ \tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^1) + \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 + \frac{n}{2} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = -\frac{1}{2} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$	$m, n \in \mathbb{R}$
$(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2)$	$r = \zeta X_1 \wedge X_2 + \frac{\epsilon}{2} X_2 \wedge X_2 +$ $+ d(X_2 \otimes X_3 - X_3 \otimes X_2) - \frac{\epsilon}{2} X_3 \wedge X_3$ $[[r, r]] = \epsilon \zeta X_2 \wedge X_3 \wedge X_2$ $\tilde{r} = m \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \eta(\tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^3 + \tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^1) +$ $+\frac{1}{2\epsilon} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = 0$	$c, d \in \mathbb{R}$ $m \in \mathbb{R}$
$(C^4, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma})$	$r = \frac{2(\beta-\alpha)-\gamma}{8} X_2 \wedge X_2 + \frac{\gamma-2\beta}{4} X_2 \wedge X_3 - \frac{\gamma}{4} X_3 \wedge X_3$ $[[r, r]] = 0$ $\tilde{r} = a \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 + \frac{1}{\beta} \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 + \frac{1}{2\beta} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = -\frac{1}{\beta} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 +$ $+\frac{1}{\beta} \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3$	$\alpha = \gamma = 0, \beta \neq 0, a \in \mathbb{R}$
$(C_p^5, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha 0 \gamma}), p \geq 0$	$r_1 = \frac{a}{2} X_2 \wedge X_2 + \frac{a}{2} X_3 \wedge X_3 +$ $+ b X_2 \otimes X_3 + (\gamma - b) X_3 \otimes X_2$ $[[r_1, r_1]] = 0$ $r_2 = -\frac{2\alpha p^2 + \alpha + \gamma}{8p(1+p^2)} X_2 \wedge X_2 + \frac{\gamma - \alpha}{4p(1+p^2)} X_2 \wedge X_3 -$ $-\frac{2\gamma p^2 + \alpha + \gamma}{8p(1+p^2)} X_3 \wedge X_3$ $[[r_2, r_2]] = 0$ $\tilde{r} = a \tilde{X}^1 \otimes \tilde{X}^1 - \frac{p}{2\gamma} (\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2 - \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3) -$ $-\frac{1}{2} \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3$ $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = \frac{p^2-1}{2\gamma} (\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^2 - \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^3) +$ $+\frac{2p}{\gamma} \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3$	$p = 0, \alpha + \gamma = 0, a, b \in \mathbb{R}$ $p > 0$ $p \geq 0, \alpha + \gamma = 0, a \in \mathbb{R}$ $\gamma \neq 0$

Продолжение табл. 7

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	r	Комментарии
$((A_{1,1} + 2A)^0, I_{(1,2)})$	$r = aX_1 \otimes X_1 + \zeta X_1 \otimes X_3 + \eta X_3 \otimes X_1 +$ $+ \frac{d}{2} X_3 \wedge X_3$ $[[r, r]] = 0$	$a, d \in \mathbb{R}$
$((A_{1,1} + 2A)^1, I_{(1,2)})$	$r = aX_1 \otimes X_1$ $[[r, r]] = 0$	$a \in \mathbb{R}$
$((A_{1,1} + 2A)^2, I_{(1,2)})$	$r = aX_1 \otimes X_1 + \zeta[X_1 \otimes X_2 +$ $+ X_2 \otimes X_1 \pm X_1 \otimes X_3 \pm X_3 \otimes X_1]$ $[[r, r]] = 0$	$a \in \mathbb{R}$

Заметим, что супербиалгебры Ли $(C_p^1, (2A_{1,1} + A))$ и $(C_p^1, (2A_{1,1} + A).i)$ являются треугольными и не имеют кограничных дуальных. Более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона, мы должны положить $r_2 = \zeta X_2 \wedge X_3 \mp \frac{1}{4} X_3 \wedge X_3$ (при $p = 1$), т. е. $\eta = -\zeta$. Супербиалгебры Ли $(C_p^1, C_{-p}^1.i)$ и дуальные к ним при значении $p = 0$ (r_1 и $\tilde{r}_1$), $p = 1$ (r_2 и $\tilde{r}_{3|p=1}$), $p = -1$ ($r_{3|p=-1}$ и $\tilde{r}_2$) и $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ (r_3 и $\tilde{r}_3$) являются би- r -матричными супербиалгебрами Ли треугольного типа.

Супербиалгебры $(C_p^1, I_{(2,1)})$ являются треугольными при $p = 0$ и $p = 1$; более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона, мы должны положить $r_2 = \zeta X_2 \wedge X_3$, т. е. $\eta = -\zeta$. Далее, $((C_{1/2}^1, C_p^1.i|_{p=-1/2})$ и $((C_{1/2}^1, C_p^1.ii|_{p=-1/2})$ являются би- r -матричными супербиалгебрами Ли треугольного типа, в то время как дуальные к ним являются квазитреугольными. Супербиалгебры Ли $((C_{1/2}^1, (C_{1/2}^1, \epsilon))$ и дуальные к ним являются би- r -матричными супербиалгебрами Ли треугольного типа.

Трехмерные супербиалгебры Ли вида $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta\gamma})$, где $\mathbf{g} = C_p^2, C^3, C^4, C_p^5$ и $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta\gamma}$ — одна из супербиалгебр, дуальных к супералгебрам Ли, из табл. 4, приведены в табл. 7. Мы видим, что при $p = 0$ супербиалгебры Ли $(C_p^2, \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta\gamma})$ являются би- r -матричными только при $\beta = \gamma = 0$ и $\alpha \neq 0$ (т. е. при $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta\gamma} = (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0$ из табл. 4). Заметим, что супербиалгебры $(C_{p=0}^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0)$ являются треугольными, тогда как дуальные к ним — квазитреугольными. Более того, супербиалгебры Ли $(C_{p=0}^2, \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta,0})$ (т. е. $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta,0} = I_{(1,2)}$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,1,0}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,1,0}^2$) являются треугольными. При $p = -1$ супербиалгебры Ли $(C_p^2, \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta\gamma})$ при $\beta = 0$ и $\alpha, \gamma \neq 0$ (т. е. $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha \neq 0, \beta=0, \gamma \neq 0} = (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,\epsilon}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,-\epsilon}^2$) являются би- r -матричными, причем $(C_{p=-1}^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,\epsilon}^1)$ и $(C_{p=-1}^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,-\epsilon}^2)$ являются треугольными, тогда как дуальные к ним — квазитреугольными. Заметим, что при $\beta = \gamma = 0$ супербиалгебры Ли $(C_{p=-1}^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0)$ являются треугольными (r_2). Более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона, следует положить $b = c$ в r_2 . Для $p \in (-1, 1] - \{0\}$ при $\beta = 0$ и $\alpha, \gamma \neq 0$ супербиалгебры Ли $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,\epsilon}^1)$ и $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,-\epsilon}^2)$ являются би- r -матричными, имеющими треугольный тип (r_3), в то время как дуальные к ним — квазитреугольного ($\tilde{r}_2$). С другой стороны, супербиалгебры Ли $(C_p^2, I_{(1,2)})$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,\epsilon,\epsilon}^0)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,k \neq 0,\epsilon}^1)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{0,1,0}^2)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,1,0}^2)$, $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{0,1,\epsilon}^2)$ и $(C_p^2, (A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,k \neq 0,-\epsilon}^2)$ являются треугольными.

Заметим, что $(C^3, I_{(1,2)})$ являются треугольными супербиалгебрами Ли, тогда как $(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{1,0,0}^0)$ и $(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2)$ являются треугольными би- r -матричными супербиалгебрами Ли, а дуальные к ним – квазитреугольными. Более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона для $(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{1,0,0}^0)$, следует положить $c = -1/2$ в r , а для $(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2)$ следует положить $m = \eta = 0$ в $\tilde{r}$.

Супербиалгебры Ли $(C^4, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma})$ при $\alpha = \gamma = 0$ и $\beta \neq 0$ (т.е. $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha=0,\beta,\gamma=0} = (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2$) являются би- r -матричными треугольного типа, в то время как дуальные к ним являются квазитреугольными. При $\beta = 0$ имеем треугольные супербиалгебры Ли $(C^4, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma})$ (т.е. $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha,\beta,\gamma} = I_{(1,2)}$, $(A_{1,1} + 2A)_{\epsilon,0,0}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2$).

Супербиалгебры Ли $(C_p^5, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha,\beta=0,\gamma})$ при $p = 0$, $\alpha + \gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ (т.е. $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha,\beta=0,\gamma} = (A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2$) являются би- r -матричными $(r_1, \tilde{r})$ треугольного типа, в то время как дуальные к ним являются квазитреугольными. Более того, чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона, мы должны положить $b = \gamma/2$ в r_1 . Заметим, что при $p > 0$, $\alpha + \gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ супербиалгебры Ли $(C_p^5, (A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2)$, $(C_p^5, (A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2)$ являются би- r -матричными $(r_2, \tilde{r})$ треугольного типа, тогда как дуальные к ним являются квазитреугольными. В то же время при $p > 0$ и $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, -1, \epsilon, k, s$, т.е. супералгебры $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma} = I_{(1,2)}$, $(A_{1,1} + 2A)_{0,0,\epsilon}^0$, $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^1$, $(A_{1,1} + 2A)_{k,0,1}^2$, $(A_{1,1} + 2A)_{s,0,-1}^2$ являются треугольными.

Наконец, супербиалгебры Ли $((A_{1,1} + 2A)^0, I_{(1,2)})$, $((A_{1,1} + 2A)^1, I_{(1,2)})$ и $((A_{1,1} + 2A)^2, I_{(1,2)})$ являются треугольными. Для того чтобы получить суперкососимметричные суперскобки Пуассона, следует положить $a = 0$, $\eta = -\zeta$ для супербиалгебры Ли $((A_{1,1} + 2A)^0, I_{(1,2)})$, т.е. $r = \zeta X_1 \wedge X_3 + \frac{d}{2} X_3 \wedge X_3$, для $((A_{1,1} + 2A)^1, I_{(1,2)})$ – $a = 0$ (т.е. $r = 0$), а для $((A_{1,1} + 2A)^2, I_{(1,2)})$ – $a = b = 0$ (т.е. $r = 0$); здесь в двух последних случаях мы имеем тривиальные решения.

Все эти кограничные супербиалгебры Ли являются неизоморфными. В предыдущем разделе мы упоминали условия (8), при которых кограничные супербиалгебры Ли являются изоморфными. Здесь мы рассмотрим эти условия более точно и неформально. Используя матричный вид изоморфизма $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$

$$\alpha(X_i) = (-1)^j \alpha_i^j X'_j, \quad (23)$$

соотношение (8) можно переписать как

$$\begin{aligned} & [\mathcal{X}'_i^{\text{st}} ((-1)^{l+k+jk} \alpha^{\text{st}} r^{\text{st}} \alpha - (-1)^{k+l} r'^{\text{st}})]^{\text{st}} = \\ & = -\mathcal{X}'_i^{\text{st}} [(-1)^{n+j+jk} \alpha^{\text{st}} r \alpha - (-1)^{j+jn} r'], \end{aligned} \quad (24)$$

где в левой части индексы k и j обозначают строку и столбец матрицы r^{st} , l – столбец матрицы α , а в правой части индексы j и k обозначают строку и столбец матрицы r , n – столбец матрицы α . Если приведенные выше матричные соотношения выполнены, то две кограничные супербиалгебры Ли $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ и $(\mathfrak{g}', \tilde{\mathfrak{g}}')$ являются изоморфными. Таким образом, можно исследовать эти соотношения для всех кограничных супербиалгебр Ли из таблиц и увидеть, что все они являются неизоморфными.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУПЕРПУАССОНОВЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ СУПЕРСКОБКИ СКЛЯНИНА

Для треугольных и квазитреугольных супербиалгебр Ли можно получить соответствующие супергруппы Пуассона–Ли с помощью суперскобки Склянина, определяемой заданной суперкососимметричной r -матрицей $r = r^{ij} X_i \otimes X_j$ [6], [18]

$$\{f, h\} = f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}^\mu X_i^{(L,r)} r^{ij} X_j^{(L,l)\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} h - f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}^\mu X_i^{(R,r)} r^{ij} X_j^{(R,l)\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} h \quad (25)$$

$$\forall f, h \in C^\infty(G),$$

где ${}_j X^{(L,l)}(X_i^{(L,r)})$ и ${}_j X^{(R,l)}(X_i^{(R,r)})$ – лево- и право-инвариантные супервекторные поля, включающие левые (правые) дифференцирования на супергруппе Пуассона–Ли G . Если r является решением КУЯБ, то следующие суперскобки также являются суперпуассоновыми структурами на супергруппе G [6]:

$$\{f, h\}^L = f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}^\mu X_i^{(L,r)} r^{ij} X_j^{(L,l)\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} h, \quad (26)$$

$$\{f, h\}^R = f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}^\mu X_i^{(R,r)} r^{ij} X_j^{(R,l)\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} h. \quad (27)$$

Для вычисления левого и правого инвариантных супервекторных полей на супергруппе G достаточно определить левые и правые инвариантные 1-формы. Для $g \in G$ имеем [19]

$$g^{-1} dg = L^i{}_i X = (-1)^i L^{(r)i}{}_\mu \overleftarrow{dx}^\mu X_i = (-1)^i \overrightarrow{dx}^\mu{}_\mu L^{(l)i} X_i, \quad (28)$$

$$dg g^{-1} = R^i{}_i X = (-1)^i R^{(r)i}{}_\nu \overleftarrow{dx}^\nu X_i = (-1)^i \overrightarrow{dx}^\nu{}_\nu R^{(l)i} X_i, \quad (29)$$

где x^μ – координаты на супергруппе. Теперь, используя формулы [13]

$$\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{dx}^j \rangle = \left\langle \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}, \overrightarrow{dx}^j \right\rangle = {}_i \delta^j, \quad \langle \overleftarrow{dx}^i, \overleftarrow{e}_j \rangle = \left\langle \overleftarrow{dx}^i, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^j} \right\rangle = {}^i \delta_j \quad (30)$$

в соотношениях

$$\langle {}_j X^{(L(R),l)}, L(R)^{(l)i} \rangle = {}_j \delta^i, \quad \langle L(R)^{(r)i}, X_j^{(L(R),r)} \rangle = {}^i \delta_j, \quad (31)$$

где

$${}_j X^{(L(R),l)} := {}_j X^{(L(R),l)\mu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}, \quad X_j^{(L(R),r)} := \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\nu}{}^\nu X_j^{(L(R),r)}, \quad (32)$$

получаем следующие результаты:

$${}_j X^{(L(R),l)\nu} = {}_j L(R)^{(l)-1\nu}, \quad {}_\eta X_j^{(L(R),r)} = {}_\eta L(R)^{(r)-1}_j. \quad (33)$$

Чтобы вычислить приведенные выше матрицы, будем предполагать, что двумерная супергруппа G имеет следующую параметризацию:

$$g = e^{xX_1} e^{\psi X_2}. \quad (34)$$

Аналогично для трехмерных супергрупп (с двумя бозонными и одним фермионным генераторами) полагаем

$$g = e^{xX_1} e^{yX_2} e^{\psi X_3}, \quad (35)$$

а для трехмерных супергрупп (с двумя фермионными и одним бозонным генераторами) используем параметризацию

$$g = e^{xX_1} e^{\psi X_2} e^{\chi X_3}. \quad (36)$$

Результаты собраны в табл. 8, 9 (в этих таблицах для сокращения формул мы применяем обозначения $\frac{\partial}{\partial \bullet} = \frac{\partial}{\partial \bullet}$ и $\frac{\partial}{\partial \bullet} = \frac{\partial}{\partial \bullet}$). Чтобы получить эти результаты для дуальных супергрупп Ли $\tilde{G}$, нужно воспользоваться следующими соотношениями⁵⁾:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} d\tilde{g} &= \tilde{L}_i \tilde{X}^i = \tilde{L}_{i\mu}^{(r)} \overleftarrow{d\tilde{x}^\mu} \tilde{X}^i = \overrightarrow{d\tilde{x}^\mu}_\mu \tilde{L}_i^{(l)} \tilde{X}^i, \\ d\tilde{g} \tilde{g}^{-1} &= \tilde{R}_i \tilde{X}^i = \tilde{R}_{i\nu}^{(r)} \overleftarrow{d\tilde{x}^\nu} \tilde{X}^i = \overrightarrow{d\tilde{x}^\nu}_\nu \tilde{R}_i^{(l)} \tilde{X}^i, \\ \langle j \tilde{X}^{(L(R),l)}, \tilde{L}_i(\tilde{R})^{(l)} \rangle &= j \delta_i, \quad \langle \tilde{L}_i(\tilde{R})^{(r)}, \tilde{X}^{j(L(R),r)} \rangle = \delta_i^j, \\ j \tilde{X}^{(L(R),l)} &:= j \tilde{X}^{(L(R),l)\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}, \quad \tilde{X}^{j(L(R),r)} := \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{X}^{j(L(R),r)}, \\ j \tilde{X}^{\mu(L(R),l)} &= j \tilde{L}(\tilde{R})^{(l)-1\mu}, \quad {}^\mu X^{j(L(R),r)} = {}^\mu \tilde{L}(\tilde{R})^{(r)-1j}. \end{aligned} \quad (37)$$

Заметим, что параметризация супергруппы Ли для $\tilde{G}$ аналогична параметризации для G (т.е. параметры x, y, ψ, χ заменяются на $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}$).

Теперь можно вычислить суперпуассоновы структуры на супергруппах Ли G и $\tilde{G}$. Можно упростить соотношение (25), переписав его в матричном виде:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \begin{pmatrix} f \overleftarrow{X}_1^{(L,r)} & f \overleftarrow{X}_2^{(L,r)} & f \overleftarrow{X}_3^{(L,r)} \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \overrightarrow{1X}^{(L,l)} g \\ \overrightarrow{2X}^{(L,l)} g \\ \overrightarrow{3X}^{(L,l)} g \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} f \overleftarrow{X}_1^{(R,r)} & f \overleftarrow{X}_2^{(R,r)} & f \overleftarrow{X}_3^{(R,r)} \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \overrightarrow{1X}^{(R,l)} g \\ \overrightarrow{2X}^{(R,l)} g \\ \overrightarrow{3X}^{(R,l)} g \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

и аналогично переписать (26) и (27)⁶⁾. Таким образом, мы вычисляем фундаментальную суперскобку Пуассона для всех треугольных и квазиреугольных супербиалгебр Ли. Результаты приведены в табл. 10–13. Заметим, что для треугольных супербиалгебр Ли мы вычислили все суперпуассоновы структуры (25)–(27) и привели их в отдельных таблицах.

⁵⁾Причина, по которой мы не можем воспользоваться формулами (28)–(33) для дуальной супергруппы Ли $\tilde{G}$, заключается в том, что для дуальных супералгебр Ли мы используем базис с верхними индексами и в обозначениях де Витта они отличаются от нижних индексов для супералгебр Ли.

⁶⁾Заметим, что для дуальной супергруппы Ли $\tilde{G}$ мы используем суперскобку Складина

$$\{\tilde{f}, \tilde{h}\} = (-1)^i \left(\tilde{f} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} {}^\mu \tilde{X}^{i(L,r)} \tilde{r}_{ij}^j \tilde{X}^{(L,l)\nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{h} - \tilde{f} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} {}^\mu \tilde{X}^{i(R,r)} \tilde{r}_{ij}^j \tilde{X}^{(R,l)\nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{h} \right) \quad \forall \tilde{f}, \tilde{h} \in C^\infty(\tilde{G}).$$

Продолжение табл. 9

$\mathbf{g}$	C^3	C^4	$C_p^5 (p \geq 0)$
$\left. \begin{matrix} 1X^{(L,l)} \\ 2X^{(L,l)} \\ 3X^{(L,l)} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - \chi \vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - (\chi + \psi) \vec{\partial}_\psi - \chi \vec{\partial}_\chi \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - (p\psi + \chi) \vec{\partial}_\psi + (\psi - p\chi) \vec{\partial}_\chi \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$
$\left. \begin{matrix} X_1^{(L,r)} \\ X_2^{(L,r)} \\ X_3^{(L,r)} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - \vec{\partial}_\psi \chi \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - \vec{\partial}_\psi (\chi + \psi) - \vec{\partial}_\chi \chi \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x - \vec{\partial}_\psi (p\psi + \chi) + \vec{\partial}_\chi (\psi - p\chi) \\ -\vec{\partial}_\psi \\ -\vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$
$\left. \begin{matrix} 1X^{(R,l)} \\ 2X^{(R,l)} \\ 3X^{(R,l)} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -\vec{\partial}_\psi \\ x \vec{\partial}_\psi - \vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -e^{-x} \vec{\partial}_\psi \\ e^{-x} (x \vec{\partial}_\psi - \vec{\partial}_\chi) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -e^{-xp} (\cos x \vec{\partial}_\psi + \sin x \vec{\partial}_\chi) \\ e^{-xp} (\sin x \vec{\partial}_\psi - \cos x \vec{\partial}_\chi) \end{matrix} \right\}$
$\left. \begin{matrix} X_1^{(R,r)} \\ X_2^{(R,r)} \\ X_3^{(R,r)} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -\vec{\partial}_\psi \\ \vec{\partial}_\psi x - \vec{\partial}_\chi \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -\vec{\partial}_\psi e^{-x} \\ (\vec{\partial}_\psi x - \vec{\partial}_\chi) e^{-x} \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \vec{\partial}_x \\ -(\vec{\partial}_\psi \cos x + \vec{\partial}_\chi \sin x) e^{-xp} \\ (\vec{\partial}_\psi \sin x - \vec{\partial}_\chi \cos x) e^{-xp} \end{matrix} \right\}$

$\tilde{\mathbf{g}}$	$B + A_{1,1} \cdot i$	$(2A_{1,1} + A)$	$(2A_{1,1} + A) \cdot i$	$C_{-p}^1 \cdot i \ (p \in \mathbb{R})$
$1 \tilde{X}^{(L,1)}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$e^{-\tilde{y}} \overrightarrow{\partial_x}$
$2 \tilde{X}^{(L,1)}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - \tilde{\psi} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - p \tilde{\psi} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$
$3 \tilde{X}^{(L,1)}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$-\frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$
$\tilde{X}^{1(L,r)}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x} e^{-\tilde{y}}$
$\tilde{X}^{2(L,r)}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \tilde{\psi}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} p \tilde{\psi}$
$\tilde{X}^{3(L,r)}$	$-\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\overrightarrow{\partial_x} \frac{\tilde{\psi}}{2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$-\overrightarrow{\partial_x} \frac{\tilde{\psi}}{2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$-\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$
$1 \tilde{X}^{(R,1)}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$
$2 \tilde{X}^{(R,1)}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$-\tilde{x} \overrightarrow{\partial_x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$
$3 \tilde{X}^{(R,1)}$	$e^{-\tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$-\frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$e^{-p \tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$
$\tilde{X}^{1(R,r)}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$	$\overrightarrow{\partial_x}$
$\tilde{X}^{2(R,r)}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$\overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$	$-\overrightarrow{\partial_x} \tilde{x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}}$
$\tilde{X}^{3(R,r)}$	$-\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} e^{-\tilde{y}}$	$-\overrightarrow{\partial_x} \frac{\tilde{\psi}}{2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$\overrightarrow{\partial_x} \frac{\tilde{\psi}}{2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}}$	$-\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} e^{-p \tilde{y}}$

$\tilde{\mathbf{g}}$	$C_P^1 \cdot i _{p=-1/2}$	$C_P^1 \cdot ii _{p=-1/2}$	$(C_{1/2}^1, \epsilon)$	$\tilde{g}_{\alpha\beta\gamma}$
$\begin{pmatrix} 1 \tilde{X}(\text{L}, \text{l}) \\ 2 \tilde{X}(\text{L}, \text{l}) \\ 3 \tilde{X}(\text{L}, \text{l}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-\tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - \frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} + \frac{\tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-\epsilon \tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} + \frac{\epsilon \tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ \frac{\epsilon}{2} \tilde{\psi} e^{-\epsilon \tilde{y}} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ (\beta \tilde{\chi} + \frac{\alpha \tilde{\psi}}{2}) \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ \frac{\gamma \tilde{\chi}}{2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\chi}}} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \tilde{X}^1(\text{L}, \text{r}) \\ \tilde{X}^2(\text{L}, \text{r}) \\ \tilde{X}^3(\text{L}, \text{r}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{x}} e^{-\tilde{y}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\tilde{\psi}}{2} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} e^{\tilde{y}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} + \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\tilde{\psi}}{2} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} e^{-\epsilon \tilde{y}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} + \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\psi}} \frac{\epsilon \tilde{\psi}}{2} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \frac{\epsilon}{2} \tilde{\psi} e^{-\epsilon \tilde{y}} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} (\beta \tilde{\chi} + \frac{\alpha \tilde{\psi}}{2}) - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \frac{\gamma \tilde{\chi}}{2} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\chi}} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \tilde{X}(\text{R}, \text{l}) \\ 2 \tilde{X}(\text{R}, \text{l}) \\ 3 \tilde{X}(\text{R}, \text{l}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\tilde{x} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ e^{-\tilde{y}/2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \tilde{x} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ e^{\tilde{y}/2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\epsilon \tilde{x} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ -\frac{\epsilon}{2} \tilde{\psi} e^{-\epsilon \tilde{y}/2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + e^{\epsilon \tilde{y}/2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\frac{\alpha \tilde{\psi}}{2} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ -(\beta \tilde{\psi} + \frac{\gamma \tilde{\chi}}{2}) \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} + \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\chi}} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \tilde{X}^1(\text{R}, \text{r}) \\ \tilde{X}^2(\text{R}, \text{r}) \\ \tilde{X}^3(\text{R}, \text{r}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \tilde{x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} e^{-\tilde{y}/2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \tilde{x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} e^{\tilde{y}/2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \epsilon \tilde{x} + \overrightarrow{\partial_{\tilde{y}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \frac{\epsilon \tilde{\psi}}{2} e^{-\epsilon \tilde{y}/2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} e^{\epsilon \tilde{y}/2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} \frac{\alpha \tilde{\psi}}{2} - \overrightarrow{\partial_{\tilde{\psi}}} \\ -\overrightarrow{\partial_{\tilde{x}}} (\beta \tilde{\psi} + \frac{\gamma \tilde{\chi}}{2}) - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{\chi}} \end{pmatrix}$

Таблица 10. Суперскобки Пуассона, связанные с би- r -матричными, треугольными и квазитреугольными трехмерными супербиалгебрами Ли типа (2, 1).

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C_p^1, C_{-p}^1.i)$ $p = 0$	$(C_p^1, C_{-p}^1.i)$ $p = 1$	$(C_p^1, C_{-p}^1.i)$ $p = -1$	$(C_p^1, C_{-p}^1.i)$ $p \in \mathbb{R}$ $-\{0, 1, -1\}$	$((C_{1/2}^1),$ $(C_{1/2}^1, \epsilon))$	$(B + A_{1,1},$ $B + A_{1,1} .i)$
$\{x, y\}^L$	1	1	1	1	ϵ	1
$\{x, \psi\}^L$	0	0	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^L$	0	$\psi - \zeta$	$-\psi$	$p\psi$	$\epsilon\psi$	ψ
$\{\psi, \psi\}^L$	a	0	0	0	$-\epsilon$	0
$\{x, y\}^R$	e^{-x}	e^{-x}	e^{-x}	e^{-x}	ϵe^{-x}	1
$\{x, \psi\}^R$	0	0	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^R$	0	$-\zeta e^{-2x}$	0	0	$-\epsilon \frac{\psi}{2} e^{-x}$	0
$\{\psi, \psi\}^R$	a	0	0	0	$-\epsilon e^{-x}$	0
$\{x, y\}$	$1 - e^{-x}$	$1 - e^{-x}$	$1 - e^{-x}$	$1 - e^{-x}$	$\epsilon(1 - e^{-x})$	0
$\{x, \psi\}$	0	0	0	0	0	0
$\{y, \psi\}$	0	$\psi - \zeta(1 - e^{-2x})$	$-\psi$	$p\psi$	$\epsilon\psi(1 + \frac{\epsilon^{-x}}{2})$	ψ
$\{\psi, \psi\}$	0	0	0	0	$-\epsilon(1 - e^{-x})$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{y}\}^L$	$-e^{-\tilde{y}}$	$-e^{-\tilde{y}}$	$-e^{-\tilde{y}}$	$-e^{-\tilde{y}}$	$-\frac{\epsilon^{-\epsilon\tilde{y}}}{\epsilon}$	-1
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}^L$	0	$\tilde{\psi}e^{-\tilde{y}}$	$(\zeta - \tilde{\psi})e^{-\tilde{y}}$	$p\tilde{\psi}e^{-\tilde{y}}$	$-\tilde{\psi}e^{-\epsilon\tilde{y}}$	$\tilde{\psi}$
$\{\tilde{y}, \tilde{\psi}\}^L$	0	0	0	0	0	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}^L$	b	0	0	0	$\frac{1}{\epsilon}$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{y}\}^R$	-1	-1	-1	-1	$-\frac{1}{\epsilon}$	-1
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}^R$	0	0	$\zeta e^{\tilde{y}}$	0	$\frac{\tilde{\psi}}{2}$	0
$\{\tilde{y}, \tilde{\psi}\}^R$	0	0	0	0	0	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}^R$	b	0	0	0	$\frac{1}{\epsilon} e^{\epsilon\tilde{y}}$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$	$1 - e^{-\tilde{y}}$	$1 - e^{-\tilde{y}}$	$1 - e^{-\tilde{y}}$	$1 - e^{-\tilde{y}}$	$\frac{1}{\epsilon}(1 - e^{-\epsilon\tilde{y}})$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	0	$\tilde{\psi}e^{-\tilde{y}}$	$-\tilde{\psi}e^{-\tilde{y}} - 2\zeta \operatorname{sh} \tilde{y}$	$p\tilde{\psi}e^{-\tilde{y}}$	$-\tilde{\psi}(\frac{1}{2} + e^{-\epsilon\tilde{y}})$	$\tilde{\psi}$
$\{\tilde{y}, \tilde{\psi}\}$	0	0	0	0	0	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\epsilon}(1 - e^{\epsilon\tilde{y}})$	0

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$((C_{1/2}^1), C_{p=-1/2}^1.i)$	$((C_{1/2}^1), C_{p=-1/2}^1.ii)$	$(B + A_{1,1},$ $(2A_{1,1} + A))$	$(B + A_{1,1},$ $(2A_{1,1} + A).i)$
$\{x, y\}^L$	1	-1	0	0
$\{x, \psi\}^L$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^L$	$\frac{\psi}{2}$	$-\frac{\psi}{2}$	0	0
$\{\psi, \psi\}^L$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\{x, y\}^R$	e^{-x}	$-e^{-x}$	0	0
$\{x, \psi\}^R$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^R$	0	0	0	0
$\{\psi, \psi\}^R$	0	0	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$	$\frac{1}{2}e^{-2x}$
$\{x, y\}$	$1 - e^{-x}$	$e^{-x} - 1$	0	0
$\{x, \psi\}$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}$	$\frac{\psi}{2}$	$-\frac{\psi}{2}$	0	0
$\{\psi, \psi\}$	0	0	$-\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$
$\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$	$1 - e^{-\tilde{y}}$	$e^{\tilde{y}} - 1$	0	0
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	$\frac{\tilde{\psi}}{2}e^{-\tilde{y}}$	$\frac{\tilde{\psi}}{2}e^{\tilde{y}}$	$-\tilde{\psi}$	$-\tilde{\psi}$
$\{\tilde{y}, \tilde{\psi}\}$	0	0	0	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	$e^{-\tilde{y}} - 1$	$1 - e^{\tilde{y}}$	0	0

Таблица 11. Суперскобки Пуассона, связанные с треугольными и квазитреугольными трехмерными супербиалгебрами Ли типа $(2, 1)$.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$((2A_{1,1} + A), I_{(2,1)})$	$(C_{p=0}^1, I_{(2,1)})$	$(C_{p=1}^1, I_{(2,1)})$	$(C_{p=1}^1, (2A_{1,1} + A))$
$\{x, y\}^L$	b	0	0	0
$\{x, \psi\}^L$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^L$	0	0	$-\zeta$	$-\zeta$
$\{\psi, \psi\}^L$	0	a	0	$-\frac{1}{2}$
$\{x, y\}^R$	b	0	0	0
$\{x, \psi\}^R$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}^R$	0	0	$-\zeta e^{-2x}$	$-\zeta e^{-2x}$
$\{\psi, \psi\}^R$	0	a	0	$-\frac{1}{2} e^{-2x}$
$\{x, y\}$	0	0	0	0
$\{x, \psi\}$	0	0	0	0
$\{y, \psi\}$	0	0	$-\zeta(1 - e^{-2x})$	$-\zeta(1 - e^{-2x})$
$\{\psi, \psi\}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$
$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C_{p=1}^1, (2A_{1,1} + A).i)$	$(C_p^1, (2A_{1,1} + A)) _{p \in \mathbb{R} - \{0,1\}}$	$(C_p^1, (2A_{1,1} + A).i) _{p \in \mathbb{R} - \{0,1\}}$	
$\{x, y\}^L$	0	0	0	
$\{x, \psi\}^L$	0	0	0	
$\{y, \psi\}^L$	$-\zeta$	0	0	
$\{\psi, \psi\}^L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p}$	
$\{x, y\}^R$	0	0	0	
$\{x, \psi\}^R$	0	0	0	
$\{y, \psi\}^R$	$-\zeta e^{-2x}$	0	0	
$\{\psi, \psi\}^R$	$\frac{1}{2} e^{-2x}$	$-\frac{1}{2p} e^{-2px}$	$\frac{1}{2p} e^{-2px}$	
$\{x, y\}$	0	0	0	
$\{x, \psi\}$	0	0	0	
$\{y, \psi\}$	$-\zeta(1 - e^{-2x})$	0	0	
$\{\psi, \psi\}$	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$	$-\frac{1}{2p}(1 - e^{-2px})$	$\frac{1}{2p}(1 - e^{-2px})$	

Таблица 12. Суперскобки Пуассона, связанные с треугольными и квазитреугольными двумерными супербиалгебрами Ли типа $(1, 1)$

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(B, (A_{1,1} + A))$	$(B, (A_{1,1} + A).i)$
$\{x, \psi\}^L$	0	0
$\{\psi, \psi\}^L$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\{x, \psi\}^R$	0	0
$\{\psi, \psi\}^R$	$-\frac{1}{2} e^{-2x}$	$\frac{1}{2} e^{-2x}$
$\{x, \psi\}$	0	0
$\{\psi, \psi\}$	$-\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	$-\tilde{\psi}$	$-\tilde{\psi}$
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	0	0

Таблица 13. Суперскобки Пуассона, связанные с би- r -матричными треугольными трехмерными супербиалгебрами Ли типа (1, 2) (суперскобка Пуассона существует, если удовлетворяются условия, приведенные в графе “Комментарии”).

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C^2_{p=0}, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha, \beta, 0})$	Ком- мен- тарии	$(C^2_{p=-1}, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha, 0, \gamma})$	Ком- мен- тарии	$(C^2_p, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma}) _{p \in (-1, 1] - \{0\}}$	Ком- мен- тарии
$\{x, \psi\}^{\mathbf{L}}$	0		0		0	
$\{x, \chi\}^{\mathbf{L}}$	0		0		0	
$\{\psi, \chi\}^{\mathbf{L}}$	$-\beta$		b		$-\frac{\beta}{p+1}$	
$\{\psi, \psi\}^{\mathbf{L}}$	$-\frac{\alpha}{2}$		$-\frac{\alpha}{2}$		$-\frac{\alpha}{2}$	
$\{\chi, \chi\}^{\mathbf{L}}$	b		$\frac{\gamma}{2}$		$-\frac{\gamma}{2p}$	
$\{x, \psi\}^{\mathbf{R}}$	0		0		0	
$\{x, \chi\}^{\mathbf{R}}$	0		0		0	
$\{\psi, \chi\}^{\mathbf{R}}$	$-\beta e^{-x}$		b		$-\frac{\beta}{p+1} e^{-x(1+p)}$	
$\{\psi, \psi\}^{\mathbf{R}}$	$-\frac{\alpha}{2} e^{-2x}$		$-\frac{\alpha}{2} e^{-2x}$		$-\frac{\alpha}{2} e^{-2x}$	
$\{\chi, \chi\}^{\mathbf{R}}$	b		$\frac{\gamma}{2} e^{2x}$		$-\frac{\gamma}{2p} e^{-2xp}$	
$\{x, \psi\}$	0		0		0	
$\{x, \chi\}$	0		0		0	
$\{\psi, \chi\}$	$\beta(e^{-x} - 1)$		0		$\frac{\beta}{p+1}(e^{-x(1+p)} - 1)$	
$\{\psi, \psi\}$	$\frac{\alpha}{2}(e^{-2x} - 1)$		$\frac{\alpha}{2}(e^{-2x} - 1)$		$\frac{\alpha}{2}(e^{-2x} - 1)$	
$\{\chi, \chi\}$	0		$\frac{\gamma}{2}(1 - e^{2x})$		$\frac{\gamma}{2p}(e^{-2xp} - 1)$	
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	$-\tilde{\psi}$		$-\tilde{\psi}$		$-\tilde{\psi}$	
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}$	0	если	$\tilde{\chi}$	если	$-p\tilde{\chi}$	если
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}$	0	$\beta = 0,$	0	$\alpha, \gamma \neq 0$	0	$\beta = 0,$
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	0	$\alpha \neq 0$	0		0	$\alpha, \gamma \neq 0$
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}$	0		0		0	
$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C^3, I_{(1,2)})$	$(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{1,0,0}^0)$	$(C^4, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\beta\gamma})$			Ком- мен- тарии
$\{x, \psi\}^{\mathbf{L}}$	$-\zeta$	0	0			
$\{x, \chi\}^{\mathbf{L}}$	0	0	0			
$\{\psi, \chi\}^{\mathbf{L}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\gamma-2\beta}{4}$			
$\{\psi, \psi\}^{\mathbf{L}}$	c	b	$\frac{2(\beta-\alpha)-\gamma}{4}$			
$\{\chi, \chi\}^{\mathbf{L}}$	0	0	$-\frac{\gamma}{2}$			
$\{x, \psi\}^{\mathbf{R}}$	$-\zeta$	0	0			
$\{x, \chi\}^{\mathbf{R}}$	0	0	0			
$\{\psi, \chi\}^{\mathbf{R}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-2x}}{4}[2\gamma x + \gamma - 2\beta]$			
$\{\psi, \psi\}^{\mathbf{R}}$	c	$b + x$	$\frac{e^{-2x}}{2}[-\gamma x^2 + (2\beta - \gamma)x + \beta - \alpha - \frac{\gamma}{2}]$			
$\{\chi, \chi\}^{\mathbf{R}}$	0	0	$\frac{-\gamma}{2}e^{-2x}$			
$\{x, \psi\}$	0	0	0			
$\{x, \chi\}$	0	0	0			
$\{\psi, \chi\}$	0	0	$\frac{1}{4}[(\gamma - 2\beta)(1 - e^{-2x}) - 2\gamma x e^{-2x}]$			
$\{\psi, \psi\}$	0	$-x$	$\frac{1}{2}[(\beta - \alpha - \frac{\gamma}{2})(1 - e^{-2x}) + (\gamma x^2 + \gamma x - 2\beta x)e^{-2x}]$			
$\{\chi, \chi\}$	0	0	$\frac{\gamma}{2}(e^{-2x} - 1)$			
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	—	0	$-\tilde{\psi}$			
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}$	—	$-\tilde{\psi}$	$-(\tilde{\psi} + \tilde{\chi})$			если
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}$	—	0	0			$\beta \neq 0,$
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	—	0	0			$\alpha = \gamma = 0$
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}$	—	0	0			

Продолжение табл. 13

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C_{p=0}^5, \tilde{\mathcal{G}}_{-\gamma,0,\gamma})$	Ком- мен- тарии	$(C_{p>0}^5, \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha,0,\gamma})$	Ком- мен- тарии
$\{x, \psi\}^L$	0		0	
$\{x, \chi\}^L$	0		0	
$\{\psi, \chi\}^L$	$\frac{\gamma}{2}$		$\frac{\gamma-\alpha}{4p(1+p^2)}$	
$\{\psi, \psi\}^L$	a		$-\frac{2\alpha p^2+\alpha+\gamma}{4p(1+p^2)}$	
$\{\chi, \chi\}^L$	a		$-\frac{\alpha+\gamma+2\gamma p^2}{4p(1+p^2)}$	
$\{x, \psi\}^R$	0		0	
$\{x, \chi\}^R$	0		0	
$\{\psi, \chi\}^R$	$\frac{\gamma}{2} \cos 2x$		$\frac{(\gamma-\alpha)e^{-2xp}}{4p(1+p^2)} [p^2 \sin 2x + \cos 2x]$	
$\{\psi, \psi\}^R$	$a - \frac{\gamma}{2} \sin 2x$		$\frac{e^{-2xp}}{4p(1+p^2)} [-2p^2(\alpha \cos^2 x + \gamma \sin^2 x) +$ $+(\alpha - \gamma) \sin 2x - \alpha - \gamma]$	
$\{\chi, \chi\}^R$	$a + \frac{\gamma}{2} \sin 2x$		$\frac{e^{-2xp}}{4p(1+p^2)} [-2p^2(\alpha \sin^2 x + \gamma \cos^2 x) -$ $-(\alpha - \gamma) \sin 2x - \alpha - \gamma]$	
$\{x, \psi\}$	0		0	
$\{x, \chi\}$	0		0	
$\{\psi, \chi\}$	$\gamma \sin^2 x$		$\frac{(\gamma-\alpha)}{4p(1+p^2)} [1 - e^{-2xp}(p^2 \sin 2x + \cos 2x)]$	
$\{\psi, \psi\}$	$\frac{\gamma}{2} \sin 2x$		$\frac{-1}{4p(1+p^2)} [2\alpha p^2 + \alpha + \gamma +$ $+e^{-2xp} [-2p^2(\alpha \cos^2 x + \gamma \sin^2 x) +$ $+(\alpha - \gamma) \sin 2x - \alpha - \gamma]]$	
$\{\chi, \chi\}$	$-\frac{\gamma}{2} \sin 2x$		$\frac{-1}{4p(1+p^2)} [\alpha + \gamma + 2\gamma p^2 +$ $+e^{-2xp} [-2p^2(\alpha \sin^2 x + \gamma \cos^2 x) -$ $-(\alpha - \gamma) \sin 2x - \alpha - \gamma]]$	
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	$\tilde{\chi}$		$\tilde{\chi} - p\tilde{\psi}$	
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}$	$\tilde{\psi}$	если	$\tilde{\psi} - p\tilde{\chi}$	если
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}$	0	$\gamma \neq 0$	0	$\gamma \neq 0,$
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	0		0	$\alpha + \gamma = 0$
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}$	0		0	

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(C^3, (A_{1,1} + 2A)_{0,\epsilon,0}^2)$	$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$((A_{1,1} + 2A)^0, I_{(1,2)})$
$\{x, \psi\}$	0	$\{x, \psi\}^L$	0
$\{x, \chi\}$	0	$\{x, \chi\}^L$	$-\zeta$
$\{\psi, \chi\}$	$-\epsilon x$	$\{\psi, \chi\}^L$	0
$\{\psi, \psi\}$	ϵx^2	$\{\psi, \psi\}^L$	0
$\{\chi, \chi\}$	0	$\{\chi, \chi\}^L$	d
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}^L$	0	$\{x, \psi\}^R$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}^L$	0	$\{x, \chi\}^R$	$-\zeta$
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}^L$	0	$\{\psi, \chi\}^R$	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}^L$	0	$\{\psi, \psi\}^R$	0
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}^L$	$1/\epsilon$	$\{\chi, \chi\}^R$	d
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}^R$	0	$\{x, \psi\}$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}^R$	$\tilde{\psi}$	$\{x, \chi\}$	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}^R$	0	$\{\psi, \chi\}$	0
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}^R$	0	$\{\psi, \psi\}$	0
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}^R$	$1/\epsilon$	$\{\chi, \chi\}$	0
$\{\tilde{x}, \tilde{\psi}\}$	0		
$\{\tilde{x}, \tilde{\chi}\}$	$-\tilde{\psi}$		
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\chi}\}$	0		
$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\}$	0		
$\{\tilde{\chi}, \tilde{\chi}\}$	0		

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определив типы (треугольные, квазитреугольные или факторизуемые) двух- и трехмерных супербиалгебр Ли и получив их r -матрицы и суперпуассоновы структуры, мы сможем выполнить квантование данных супербиалгебр Ли. Более того, теперь мы можем исследовать интегрируемость в условиях супер-Т-дуальности Пуассона–Ли, изучая супер-Т-дуальные сигма-модели Пуассона–Ли [9] над би- r -матричными супербиалгебрами.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Research Vice Chancellor of Azarbaijan Shahid Madani University. Авторы выражают благодарность С. Морадаси за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд, *Докл. АН СССР*, **268**:2 (1983), 285–287.
- [2] P. Etingof, D. Kazhdan, *Selecta Math.*, **2**:1 (1996), 1–41; **4**:2 (1998), 213–231.
- [3] Y. Kosmann-Schwarzbach, “Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations”, *Integrability of Nonlinear Systems*, Proceedings of the CIMPA International School (Pondicherry, January 8–26, 1996), Lecture Notes in Physics, **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, Springer, Berlin, 1996, 104–170.
- [4] C. Klimčík, P. Ševera, *Phys. Lett. B*, **351**:4 (1995), 455–462, arXiv: hep-th/9502122; *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **46** (1996), 116–121, arXiv: hep-th/9509095.
- [5] С. Е. Пархоменко, *ЖЭТФ*, **102**:1 (1992), 3–7; E. Getzler, *Manin triples and $N = 2$ superconformal field theory*, arXiv: hep-th/9307041.
- [6] N. Andruskiewitsch, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **63** (1993), 147–163.
- [7] N. Beisert, E. Spill, *Commun. Math. Phys.*, **285**:2 (2009), 537–565, arXiv: 0708.1762.
- [8] J. M. Evans, J. O. Madsen, *Nucl. Phys. B*, **503**:3 (1997), 715–746, arXiv: hep-th/9703065.
- [9] A. Eghbali, A. Rezaei-Aghdam, *JHEP*, **09** (2009), 094, 14 pp., arXiv: 0901.1592.
- [10] N. Geer, *Etingof–Kazdan quantization of Lie superbialgebras*, arXiv: math.QA/0409563.
- [11] A. Eghbali, A. Rezaei-Aghdam, F. Heidarpour, *J. Math. Phys.*, **51**:7 (2010), 073503, 14 pp., arXiv: 0901.4471.
- [12] A. Eghbali, A. Rezaei-Aghdam, F. Heidarpour, *J. Math. Phys.*, **51**:10 (2010), 103503, 33 pp., arXiv: 0911.1760.
- [13] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [14] A. Rezaei-Aghdam, M. Hemmati, A. R. Rastkar, *J. Phys. A*, **38**:18 (2005), 3981–3994, arXiv: math-ph/0412092.
- [15] M. A. Jafarzadeh, A. Rezaei-Aghdam, *Phys. Lett. B*, **458**:4 (1999), 477–490, arXiv: hep-th/9903152.
- [16] L. Šnobl, L. Hlavatý, *Int. J. Modern Phys. A*, **17**:28 (2002), 4043–4068, arXiv: math.QA/0202210.
- [17] N. Backhouse, *J. Math. Phys.*, **19**:11 (1978), 2400–2402.
- [18] C. Juszczak, J. T. Sobczyk, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4982–4992.
- [19] P. Kosiński, J. Lukierski, P. Maślanka, J. Sobczyk, *J. Phys. A*, **27**:20 (1994), 6827–6837, arXiv: hep-th/9405076.

Поступила в редакцию 18.06.2011,
после доработки 13.09.2011