Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Е. В. Писковский, Ска-
тывание в модели Хиггса и эллиптические функции,
ТМФ, 2012, том 172, номер 1, 138–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 03:48:31

© 2012 г. И. Я. Арефьева*, И. В. Волович*, Е. В. Писковский*

СКАТЫВАНИЕ В МОДЕЛИ ХИГГСА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Асимптотические методы в нелинейной динамике, например метод усреднения Боголюбова–Крылова и теория Колмогорова–Арнольда–Мозера, используются обычно для улучшения теории возмущений в режиме малых колебаний. Однако в ряде задач нелинейной динамики, в частности для уравнения Хиггса в теории поля, представляет интерес не только режим малых колебаний, но и режим скатывания. В космологии Фридмана важны режимы как медленно, так и быстро скатывания. Предлагается асимптотический метод решения уравнения Хиггса в режиме скатывания. Показано, что для улучшения теории возмущений в режиме скатывания эффективным оказывается разложение известного решения в терминах эллиптических функций не по тригонометрическим функциям, как в методе усреднения в режиме малых колебаний, а по гиперболическим функциям. Приводится набросок оценки точности второго приближения. Рассмотрено также уравнение Хиггса с затуханием.

Ключевые слова: асимптотические методы в нелинейной динамике, скатывание, модель Хиггса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известные асимптотические методы в нелинейной динамике такие, как метод усреднения Боголюбова–Крылова, метод медленно изменяющихся параметров Ляпунова, методы Пуанкаре, Ван-дер-Поля и теория Колмогорова–Арнольда–Мозера, используются обычно для улучшения теории возмущений в режиме малых колебаний [1]–[4]. Даже сам термин “нелинейная механика” нередко используется как синоним теории нелинейных колебаний [1].

Однако для уравнения Хиггса в теории поля [5], уравнения Фридмана в космологии [6], [7] и в ряде других задач нелинейной динамики представляет значительный интерес не только режим малых колебаний, но и режим скатывания (см., например, работы [8], [9] и приведенные в них ссылки). В режиме малых колебаний рассматривают возмущения условно периодических движений, в частности в окрестности решений линейного уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega > 0, \quad (1.1)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

где $q = q(t)$ – вещественнозначная функция времени t . В режиме скатывания (или подъема) рассматриваются возмущения движения в окрестности решений следующего линейного уравнения:

$$\ddot{q} - \mu^2 q = 0, \quad \mu > 0. \quad (1.2)$$

В настоящей работе мы предлагаем развитие метода теории возмущений гамильтоновой системы в режиме скатывания, которое заключается в построении приближенных решений с использованием разложения по гиперболическим функциям, и рассматриваем этот метод на примере важного модельного уравнения Хиггса, в том числе с затуханием. Установлена интересная аналогия полученных результатов с формулами метода усреднения. Уравнения (1.1) и (1.2) связаны заменой $\omega = i\mu$, однако для доказательства оценки приближения в режиме скатывания метод усреднения непосредственно неприменим, и мы используем другой метод – разложение эллиптических функций по гиперболическим¹⁾. Приведен набросок оценки точности второго приближения.

Для уравнения ангармонического осциллятора (уравнения Дюффинга) известно решение в терминах эллиптических функций, причем формулы метода усреднения для малых колебаний соответствуют разложению эллиптической функции в ряд Фурье по тригонометрическим функциям. В настоящей работе рассматривается уравнение Хиггса, и с использованием известного решения в терминах эллиптических функций исследован режим скатывания. Рассмотрено также уравнение Хиггса с затуханием. Показано, что для улучшения теории возмущений в режиме скатывания эффективным оказывается разложение не по тригонометрическим функциям, как в режиме осцилляций, а по гиперболическим функциям.

Хорошо известно, что простейшие уравнения нелинейной динамики допускают точное решение, которое можно получить, используя эллиптические функции. Соответствие между этими точными решениями и асимптотическим методом усреднения рассмотрено в книге [2], где исследуется уравнение ангармонического осциллятора с вещественной частотой,

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = -\epsilon q^3(t), \quad \omega > 0, \quad \epsilon > 0, \quad (1.3)$$

а также проведено численное сравнение приближенного и точного решений. Применение приближенных решений в функциональной механике можно найти в работах [10], [11].

В настоящей работе в отличие от книги [2] мы рассматриваем уравнение ангармонического осциллятора с мнимой частотой (уравнение Хиггса):

$$\ddot{q}(t) - \mu^2 q(t) = -\epsilon q^3(t), \quad \mu > 0, \quad \epsilon > 0. \quad (1.4)$$

С помощью представления решения в терминах эллиптических функций мы исследуем режим скатывания.

Как известно, при помощи сдвига на константу $q(t) = x(t) + \mu/\sqrt{\epsilon}$ уравнение (1.4) переводится в уравнение для нелинейных осцилляций

$$\ddot{x} + 2\mu^2 x = -\epsilon x^3 - 3\sqrt{\epsilon}\mu x^2,$$

¹⁾Было бы интересно рассмотреть возможное соответствие метода разложения по гиперболическим функциям, используемого в настоящей работе при не слишком больших значениях времени t , с предложенным в работе [4] развитием первого метода Ляпунова, который эффективен при $t \rightarrow \infty$.

однако это преобразование не позволяет исследовать режим скатывания более эффективно, чем при непосредственном рассмотрении исходного уравнения Хиггса.

В разделе 2 мы обсуждаем гиперболический аналог метода усреднения. В разделе 3 приведены в удобной для нас форме известные решения уравнения Хиггса в терминах эллиптических функций. Разложения эллиптических функций по гиперболическим с соответствующими оценками рассмотрены в разделе 4. Наконец, набросок оценки второго приближения представлен в разделе 5.

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АНАЛОГ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Простейшее одномерное уравнение колебаний в нелинейной динамике имеет вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \epsilon f(q, \dot{q}), \quad (2.1)$$

где $q = q(t)$ – вещественнозначная функция времени, частота ω – положительное число, ϵ – малый параметр. В приложениях встречается также уравнение

$$\ddot{q} - \mu^2 q = \epsilon f(q, \dot{q}), \quad \mu^2 > 0, \quad (2.2)$$

которое получается из (2.1) заменой $\omega = i\mu$. Такое уравнение можно назвать уравнением скатывания. Данный вид имеют, например, уравнение Хиггса [5] и уравнение Фридмана [9], которое описывает динамику тахионного поля в космологии.

По аналогии с методом разложения Боголюбова–Крылова, применявшимся для уравнения колебаний (2.1), будем искать общее решение уравнения скатывания (2.2) в виде разложения

$$q = a \operatorname{sh} \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \epsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots,$$

где величины a, ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \epsilon A(a, \epsilon) = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \mu + \epsilon B(a, \epsilon) = \mu + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots. \end{aligned}$$

Для построения решения рассмотрим функцию вида $q(t) = \mathfrak{A} \operatorname{sh}(\mu t m) + \dots$ и определим параметры $\mathfrak{A}, m$ из условия сохранения функциональной формы решения после подстановки в уравнение (1.4). В правой части (1.4) имеем

$$-\epsilon (\mathfrak{A} \operatorname{sh}(\mu t m) + \dots)^3 = -\epsilon \left(\frac{1}{4} \mathfrak{A}^3 \operatorname{sh}(3\mu t m) + 3 \operatorname{sh}(\mu t m) + \dots \right). \quad (2.3)$$

В левой части (1.4) имеем

$$(\partial^2 - \mu^2)(\mathfrak{A} \operatorname{sh}(\mu t m) + \dots) = \mathfrak{A} \mu (m^2 - 1) \operatorname{sh}(\mu t m) + \dots.$$

Таким образом, чтобы получить равенство, необходимо выполнение тождества

$$\mathfrak{A} \mu^2 (1 - m^2) = -\frac{3}{4} \mathfrak{A}^3 \epsilon,$$

откуда получаем $\mathfrak{m}^2 = 1 + 3\mathfrak{A}^2\epsilon/4\mu^2$. Рассматривая невязку в правой и левой частях (1.4), получаем, что следующее приближение следует взять в виде

$$q(t) = \mathfrak{A} \operatorname{sh} \left(\mu t \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{A}^2 \epsilon}{\mu^2} \right) \right) + \mathfrak{A}_1 \operatorname{sh}(3\mu t) + \dots, \quad (2.4)$$

и с учетом (2.3) мы получаем

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{32} \frac{\mathfrak{A}^3 \epsilon^2}{\mu^4}. \quad (2.5)$$

Приближение (2.4), (2.5) получено в работе [8].

Описанную процедуру можно продолжить, и оказывается, что для уравнения (1.4) она приводит к представлению решения уравнения с начальным условием $\dot{q}(0) = 0$ в виде бесконечной суммы

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(t), \quad (2.6)$$

где члены $\mathfrak{s}_n$, отвечающие модам $n = 0, 1, 2, \dots$, имеют вид

$$\mathfrak{s}_0(t) = \mathfrak{A} \operatorname{sh}(\mu t \mathfrak{m}), \quad (2.7)$$

$$\mathfrak{s}_n(t) = \mathfrak{A} \mathfrak{a}_n(\lambda) \operatorname{sh}((2n+1)\mu t \mathfrak{m}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

а $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\lambda)$ и $\mathfrak{a}_n(\lambda)$ являются рядами по безразмерному параметру $\lambda = \mathfrak{A}^2 \epsilon / \mu^2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(\lambda) &= 1 + \mathfrak{m}_1 \lambda + \dots + \mathfrak{m}_n \lambda^n + \dots, \\ \mathfrak{a}_n(\lambda) &= \mathfrak{a}_{n0} \lambda^n + \mathfrak{a}_{n1} \lambda^{n+1} + \dots + \mathfrak{a}_{nn} \lambda^{2n} + \dots. \end{aligned}$$

Решение зависит от параметров задачи ϵ, μ и характеризуется единственным параметром $\mathfrak{A}$. В этих обозначениях первые члены ряда (2.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathfrak{A} \operatorname{sh} \left(\mu t \left(1 + \frac{3\mathfrak{A}^2 \epsilon}{8\mu^2} - \frac{15\mathfrak{A}^4 \epsilon^2}{256\mu^4} \right) \right) - \\ &- \mathfrak{A} \left(\frac{\mathfrak{A}^2 \epsilon}{32\mu^2} - \frac{21\mathfrak{A}^4 \epsilon^2}{1024\mu^4} \right) \operatorname{sh} \left(3\mu t \left(1 + \frac{3\mathfrak{A}^2 \epsilon}{8\mu^2} \right) \right) + \frac{21\mathfrak{A}^5 \epsilon^2}{1024\mu^4} \operatorname{sh}(5\mu t) + \dots. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Этот ряд совпадает с рядом, который получается распространением формул Боголюбова–Крылова для ангармонического осциллятора на случай уравнения Хиггса, и формально может быть получен из разложения метода усреднения (см. ниже формулу (3.1)) заменами $\omega \rightarrow i\mu$, $A \rightarrow -i\mathfrak{A}$.

Для уравнения Хиггса с трением

$$(\partial^2 + 2\epsilon h \partial - \omega^2)q + \epsilon q^3 = 0, \quad q(0) = 0, \quad (2.10)$$

приближенное решение имеет вид

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathfrak{A} e^{-\epsilon h t} \operatorname{sh} \left(\mu \left(t - \frac{3\mathfrak{A}^2(1 - e^{-2\epsilon h t})}{16\mu^2 h} \right) \right) - \\ &- \frac{\mathfrak{A}^3 \epsilon}{32\mu^2} e^{-3\epsilon h t} \operatorname{sh} \left(3\mu \left(t - \frac{3\mathfrak{A}^2(1 - e^{-2\epsilon h t})}{16\mu^2 h} \right) \right). \end{aligned}$$

Метод, предлагающийся в настоящей статье, можно использовать также при исследовании режима скатывания (не обязательно медленного) для уравнения Фридмана как в локальной, так и нелокальной космологии [7], [8]:

$$\ddot{q} + \epsilon_1 \sqrt{\frac{\dot{q}^2}{2} \pm \omega^2 \frac{q^2}{2} + \epsilon_2 V(q)} \pm \omega^2 q + \epsilon_2 V'(q) = 0.$$

3. УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА И ХИГГСА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе выписаны точные и приближенные решения простейших нелинейных уравнений теории колебаний и теории скатывания.

3.1. Решения уравнения Дюффинга. Уравнение вида $\ddot{q} + V'(q) = 0$ имеет интеграл энергии $E = \dot{q}^2/2 + V(q)$, и его решение записывается в виде

$$t = \int \frac{dq}{\sqrt{2(E - V(q))}}.$$

Если $V(q)$ – многочлен четвертой степени, то последний интеграл выражается через эллиптические функции [12]–[14]. Этот факт приводит к тому, что решение уравнения ангармонического осциллятора (1.3) (уравнения Дюффинга) можно записать как $q(t) = a \operatorname{cn}(\Omega t + b, k)$, где $\operatorname{cn}(u, k) = \operatorname{cn} u$ – эллиптический косинус с модулем k . Здесь a, b, Ω – постоянные, связанные с параметрами уравнения ω, ϵ :

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \epsilon a^2}, \quad k = \sqrt{\frac{\epsilon a^2}{2(\omega^2 + \epsilon^2)}}.$$

Функция $\operatorname{cn}(\Omega t + b, k)$ допускает разложение по тригонометрическим функциям:

$$\operatorname{cn}(\Omega t + b, k) = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{q}^{n-1/2}}{1 + \mathbf{q}^{2n-1}} \cos\left((2n-1) \frac{\pi(\Omega t + b)}{2\mathbf{K}}\right),$$

где $\mathbf{q} = e^{-\pi \mathbf{K}'/\mathbf{K}}$ и $\mathbf{q}' = e^{-\pi \mathbf{K}/\mathbf{K}'}$, а $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}' = \mathbf{K}'(k)$ – полные эллиптические интегралы первого рода. Из этого представления можно получить асимптотическое разложение при малых ϵ , которое получается с помощью метода усреднения Крылова–Боголюбова [2]:

$$q(t) = A \sin\left(\omega t \left(1 + \frac{3A^2\epsilon}{8\omega^2}\right)\right) - \frac{A^3\epsilon}{32\omega^2} \sin\left(3\omega t \left(1 + \frac{3A^2\epsilon}{8\omega^2}\right)\right) + \dots, \quad (3.1)$$

где A – произвольный вещественный параметр и взято начальное условие $q(0) = 0$.

3.2. Решение уравнения Хиггса. Уравнение (1.4) в зависимости от начальных данных $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = v_0$ имеет три типа решений, которые определяются знаком энергии

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}\mu^2 q_0^2 + \frac{1}{4}\epsilon q_0^4.$$

1. Если энергия $E > 0$, то мы имеем решение “в 2-х впадинах” потенциальной энергии:

$$q(t) = a \operatorname{cn}(\Omega t + b, k), \quad (3.2)$$

где

$$a^2 = \frac{\mu^2}{\epsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\epsilon E}{\mu^4}} \right), \quad \Omega^2 = \mu^2 \sqrt{1 + \frac{4\epsilon E}{\mu^4}}, \quad k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon E/\mu^4}}. \quad (3.3)$$

Отметим также, что

$$(k')^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon E/\mu^4}}.$$

Параметр b определяется из условия $q(0) = a \operatorname{cn}(b, k)$. Решение параметризовано величинами q_0, v_0 или E, b . Мы рассмотрим случай специальных начальных данных: $q(0) = 0$. При этом $b = -\mathbf{K}$ и

$$q(t) = a \operatorname{cn}(\Omega t - \mathbf{K}, k). \quad (3.4)$$

Для этого решения

$$v \equiv \dot{q}(0) = \frac{a\mu k'}{\sqrt{1 - 2(k')^2}},$$

а энергия E связана с параметром k' :

$$\frac{E\epsilon}{\mu^4} = \frac{\mu^4(k')^2(1 - (k')^2)}{(2(k')^2 - 1)^2}.$$

Отметим также связь параметра a с величинами ϵ и k' ,

$$a^2 = \frac{\mu^2}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{1 - 2(k')^2} \right),$$

а также связь Ω и параметров μ, k' :

$$\Omega^2 = \frac{\mu^2}{1 - 2(k')^2}. \quad (3.5)$$

2. Если энергия $E = 0$, то мы имеем решение “в 2-х впадинах” с периодом $T = \infty$:

$$q(t) = \mu \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1}{\operatorname{ch}(\mu t + b)},$$

где параметр b находится из начального условия

$$q(0) = \mu \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1}{\operatorname{ch} b}. \quad (3.6)$$

3. Если энергия $E < 0$, то мы имеем решение “в одной впадине”, например правой:

$$q(t) = a \operatorname{dn}(\Omega t + b, k),$$

где

$$a^2 = \frac{\mu^2}{\epsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\epsilon E}{\mu^4}} \right), \quad \Omega^2 = a^2 \frac{\epsilon}{2} = \frac{\mu^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\epsilon E}{\mu^4}} \right),$$

$$k^2 = 2 - \frac{2\mu^2}{\epsilon a^2} = 2 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon E/\mu^4}}.$$

Параметр b определяется соотношением $q(0) = a \operatorname{dn}(b, k)$. Энергия в этом случае может быть записана через параметр k' :

$$E = -\frac{\mu^4(k')^2}{\epsilon((k')^2 + 1)^2}.$$

В случае специального начального условия $v_0 = 0$ имеем $q(t) = a \operatorname{dn}(\Omega t - \mathbf{K}, k)$. Режим скатывания соответствует движению около “точки поворота”, ближайшей к вершине.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим решение (3.4). Оно является периодическим с периодом $T = 4\mathbf{K}/\Omega$, где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$. Покажем, что при $|t| < T/2$ решение допускает разложение в ряд (2.9) по гиперболическим функциям и первые члены разложения (2.6) действительно являются достаточно точным приближением к решению (3.2) при $b = -\mathbf{K}$. Важность этого замечания связана с тем, что для более сложных потенциалов или в задаче с трением мы можем непосредственно применять гиперболический аналог метода Крылова–Боголюбова, в то время как точные решения в этих случаях неизвестны (см., например, задачу с трением (2.10)).

Нам понадобится разложение эллиптической функции в окрестности точки, координата которой равна четверти полупериода, взятой со знаком минус, т. е. функции $\operatorname{sn}(u - \mathbf{K}, k)$, при малых значениях k' . При $k' \rightarrow 0$ полный эллиптический интеграл $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\sqrt{1 - (k')^2})$ имеет следующую асимптотику:

$$\mathbf{K} \approx \ln \frac{4}{k'} + \frac{(k')^2}{4} \ln \frac{4}{(k')^2} - \frac{(k')^2}{4} + \dots$$

Нас интересует предел $k' \rightarrow 0$, поскольку именно в этом пределе согласно (3.2) параметр $\epsilon \rightarrow 0$:

$$k' = \frac{\sqrt{E\epsilon}}{\mu^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{E\epsilon}{\mu^4} + O(\epsilon^2) \right).$$

В силу элементарного неравенства

$$\frac{1}{2y} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}} \right) < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq y < \infty$$

имеет место оценка

$$(k')^2 \leq \frac{2\epsilon E}{\mu^4}, \quad (4.1)$$

и, следовательно, разложение по k' соответствует разложению по $\sqrt{\epsilon E}$.

По формуле сложения для эллиптических функций с учетом равенств $\operatorname{sn} \mathbf{K} = 1$, $\operatorname{cn} \mathbf{K} = 0$, $\operatorname{dn} \mathbf{K} = k'$ мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u - \mathbf{K}) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} \mathbf{K} + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} \mathbf{K} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} \mathbf{K}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(\mathbf{K})} = \\ &= k' \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = k' \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn}^2 u} = k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1. Теория возмущений. Рассмотрим разложение эллиптической функции (4.2), представляющей решение, в ряд по малому параметру k' (т.е. по параметру ϵ) и сравним первые члены ряда теории возмущений с точным решением. При малых k' имеют место следующие разложения [14]:

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{th} u + \frac{1}{4}(k')^2(\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - u) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} + \dots, \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \frac{1}{\operatorname{ch} u} + \frac{1}{4}(k')^2(\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + u) \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} + \dots.\end{aligned}$$

Следовательно, при малых k'

$$\frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} = \operatorname{sh} u + \frac{1}{4}(k')^2(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh}^2 u) - \frac{1}{4}(k')^2 u \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} - \operatorname{th} u \right) + \dots,$$

и мы получаем следующее разложение:

$$\operatorname{cn}(u - \mathbf{K}, k) = k' \mathbf{c}_0(u) + (k')^3 \mathbf{c}_1(u) + \dots, \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{c}_0(u) = \operatorname{sh} u, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{c}_1(u) = \frac{1}{4}(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh}^2 u) - \frac{1}{4}u \left(\frac{1}{\operatorname{ch} u} - \operatorname{th} u \right). \quad (4.5)$$

В этом разложении имеется секулярный член $(k')^3$, однако, в отличие от тригонометрического случая, здесь при достаточно больших значениях переменной u доминирует член $(k')^3 \operatorname{sh}^2 u / 4$. В следующем пункте построена модифицированная теория возмущений с использованием разложения по гиперболическим функциям, которая более точно описывает решение при достаточно больших значениях u . Интересно отметить, что, как будет показано ниже, в нашей модифицированной теории возмущений важный вклад дает член $-(k')^3 \operatorname{sh}(3u)/16$, который с ростом u растет быстрее, чем член $(k')^3 \operatorname{sh}^2 u / 4$ из теории возмущений.

4.2. Модифицированная теория возмущений. Покажем, что

$$\operatorname{cn}(u - \mathbf{K}, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{A}_n \operatorname{sh}((2n+1)u'), \quad (4.6)$$

где

$$\mathcal{A}_n = \frac{\pi}{k\mathbf{K}' \operatorname{ch}((2n+1)\rho')}, \quad u' = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}'}, \quad \rho' = \frac{\pi \mathbf{K}}{2\mathbf{K}'},$$

и ряд в правой части (4.6) сходится при $|\operatorname{Re} u| < \mathbf{K}$ и $-1 < k < 1$. Для доказательства формулы (4.6) используем соотношение (4.2) и заметим, что имеет место представление [12]

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\pi}{kk'\mathbf{K}'} \left\{ \frac{\operatorname{sh} u'}{\operatorname{ch} \rho'} - \frac{\operatorname{sh}(3u')}{\operatorname{ch}(3\rho')} + \frac{\operatorname{sh}(5\rho')}{\operatorname{ch}(5u')} + \dots \right\}.$$

Умножение последнего равенства на k' и дает формулу (4.6).

Рис. 1. Сравнение первых двух порядков обычной (см. формулы (4.4), (4.5)) и модифицированной (см. формулы (4.7), (4.8)) теории возмущений с точным решением $\text{sp}(u, -\mathbf{K})$, $k = 0.999$, и между собой. Представлены первое (тонкая сплошная линия) и второе (пунктир) приближения в рамках обычной теории возмущений (а); первое (жирная штриховая линия) и второе (тонкая штриховая линия) приближения в рамках модифицированной теории возмущений (б); первые приближения в рамках обычной (тонкая сплошная линия) и модифицированной (жирная штриховая линия) теории возмущений (в); вторые приближения в рамках обычной (пунктир) и модифицированной (тонкая штриховая линия) теории возмущений (г). На всех рисунках жирная сплошная линия отвечает точному решению.

Мы будем рассматривать приближения

$$\mathfrak{C}^{(0)}(u) = \mathcal{A} \operatorname{sh} u', \quad A = A_0, \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{C}^{(1)}(u) = \mathcal{A} \operatorname{sh} u' - \mathcal{A}_1 \operatorname{sh}(3u'), \quad (4.8)$$

.....,

$$\mathfrak{C}^{(n)}(u) = \mathcal{A} \operatorname{sh} u' - \mathcal{A}_1 \operatorname{sh}(3u') + \cdots + (-1)^n \mathcal{A}_n \operatorname{sh}((2n+1)u'). \quad (4.9)$$

Отметим, что u' и $\mathcal{A}_{2n+1}$, $n = 0, 1, 2$, имеют следующие разложения в ряды по $(k')^2$:

$$u' = \frac{\pi}{2\mathbf{K}'} u \approx \left(1 - \frac{1}{4}(k')^2 + \dots\right) u$$

и

$$\mathcal{A} = k' + \frac{7}{16}(k')^3 + \frac{79}{256}(k')^5 + O(k')^7,$$

$$\mathcal{A}_1 = -\left(\frac{1}{16}(k')^3 + \frac{1}{16}(k')^5 + O(k')^7\right), \quad \mathcal{A}_3 = \frac{1}{4096}(k')^7 + O(k')^9,$$

однако в рамках принятых обозначений мы не используем эти разложения.

На рис. 1 приведены графики первых двух слагаемых разложений по обычной и модифицированной теории возмущений в сравнении с точным решением $\text{sn}(u, -\mathbf{K})$ при $k = 0.999$, которое на всех рисунках изображено жирной сплошной линией. На рис. 1а первое приближение (4.4) по обычной теории возмущения изображено тонкой сплошной линией, второе приближение (4.5) – пунктиром. Видно, что первое и второе приближения обычной теории возмущений почти совпадают друг с другом, и второе приближение практически не является улучшением первого приближения. На рис. 1б изображены два первых порядка приближения по модифицированной теории возмущений: первый порядок (4.7) – жирная штриховая линия и второй порядок (4.8) – тонкая штриховая линия. Рис. 1в приведен для сравнения приближений первого порядка в обычной (тонкая сплошная линия) и модифицированной (жирная штриховая линия) теории возмущений. Аналогичное сравнение для второго порядка представлено на рис. 1г: обычная теория возмущений – пунктирная линия, модифицированная – тонкая штриховая линия. Видно, что первые приближения, вычисленные в рамках обычной и модифицированной теории возмущений, практически совпадают друг с другом, однако вторые приближения существенно различаются. Второе приближение, вычисленное по модифицированной теории возмущений, ближе к точному ответу по сравнению со вторым приближением обычной теории возмущений.

Следующие члены разложения представлены на рис. 2.

4.3. Оценка модифицированного ряда для эллиптического косинуса.

Можно доказать следующую лемму, дающую оценку сходимости ряда (4.6).

ЛЕММА 1. Пусть $\mu > 0$, $0 < c < 1/2$ и Ω задано формулой (3.5). Тогда при всех

$$0 \leq t \leq \frac{c}{\mu\sqrt{2}} \ln \frac{1}{k'}, \quad 0 \leq k' \leq 1/2 \quad (4.10)$$

выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\text{cn}(\Omega t - \mathbf{K}, k) - \mathfrak{C}^{(0)}(\Omega t)| &\leq \frac{4}{k} (k')^{3(1-c)}, \\ |\text{cn}(\Omega t - \mathbf{K}, k) - \mathfrak{C}^{(1)}(\Omega t)| &\leq \frac{4}{k} (k')^{5(1-c)}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

здесь $\mathfrak{C}^{(0)}(u)$ и $\mathfrak{C}^{(1)}(u)$ означают приближения, введенные формулами (4.7) и (4.8).

Рис. 2. Приближения более высоких порядков, вычисленные по формуле (4.6): общий вид (а) и поведение решений в окрестности максимума (б); номер кривой соответствует порядку приближения. Жирная сплошная линия – функция $\operatorname{sn}(u - \mathbf{K}, k)$ при $k = 0.999$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетривиальность оценок (4.11) по сравнению с утверждением о сходимости ряда (4.6) при $|\operatorname{Re} u| < \mathbf{K}$ и $-1 < k < 1$ связана с тем, что эти оценки в силу (4.10) позволяют рассматривать предел $t \rightarrow \infty$ при $k' \rightarrow 0$.

5. ПРИБЛИЖЕНИЯ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

В этом разделе приведены приближения точного решения, в которых используются разложения (4.7)–(4.9).

5.1. Оценка точности приближения, содержащего одну моду. Рассмотрим приближение точного решения (3.4), используя его представление в виде ряда (4.6). Имеем

$$q(t) = a \operatorname{cn}(\Omega t - \mathbf{K}, k) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(t), \quad (5.1)$$

где введены обозначения ($n = 1, 2, \dots$)

$$s_0(t) = A \operatorname{sh} \frac{\pi \Omega t}{2\mathbf{K}'}, \quad s_n(t) = (-1)^n A_n \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi \Omega t}{2\mathbf{K}'}, \quad (5.2)$$

$$A = a \frac{\pi}{k\mathbf{K}'} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi \mathbf{K}/2\mathbf{K}')}, \quad A_n = a \frac{\pi}{k\mathbf{K}'} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n+1)\pi \mathbf{K}/2\mathbf{K}')}. \quad (5.3)$$

Определим приближения, содержащие $n = 0, 1, 2, \dots$ мод:

$$q_0(t) = s_0(t), \quad q_n(t) = s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t) \quad (5.4)$$

(заметим, что мы не указываем явно зависимость функций от $(k')^2$).

Из леммы 1 и оценки (4.1) вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < c < 1/2$. Тогда при всех

$$0 \leq t \leq \frac{c}{\mu 2\sqrt{2}} \ln \frac{\mu^4}{2\epsilon E}$$

выполнена оценка

$$|q(t) - q_1(t)| \leq \frac{8\sqrt{2E}}{k\mu} \left(\frac{2\epsilon E}{\mu^4} \right)^{2-5c/2}.$$

5.2. Гиперболический аналог модифицированной теории возмущений.

Цель последующих рассуждений – дать оценку приближения, получающегося из представления (2.9). Для этого заметим, что в приближении, заданном формулами (5.2)–(5.4), как постоянные A_i , так и аргументы гиперболических синусов являются рядами по $(k')^2$ и, следовательно, по ϵ .

5.2.1. Переразложение ряда для эллиптического косинуса. Имеет место следующее представление, позволяющее от ряда (5.1) перейти к ряду (2.6): решение (5.1) может быть представлено в виде

$$q(t) = a \operatorname{cn}(\Omega t - \mathbf{K}, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A \bar{a}_n(\lambda) \operatorname{sh}((2n+1)\mu t \bar{\Omega}(\lambda)).$$

Здесь $\lambda = A^2\epsilon/\mu^2$, а $\bar{a}_n(\lambda)$ и $\bar{\Omega}(\lambda)$ выражаются через функции

$$a_n((k')^2) = \frac{\operatorname{ch}(\pi \mathbf{K}/2\mathbf{K}')}{\operatorname{ch}((2n+1)\pi \mathbf{K}/2\mathbf{K}')}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_0((k')^2) = 1,$$

$$\bar{\Omega}((k')^2) = \frac{1}{\mu} \frac{\pi \Omega}{2\mathbf{K}'} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(k')^2}} \frac{\pi}{2\mathbf{K}'}$$

при помощи замены переменных

$$\bar{a}_n(\lambda) = a_n(F^{-1}(\lambda)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_0(\lambda) = 1, \\ \bar{\Omega}(\lambda) = \Omega(F^{-1}(\lambda)),$$

где функция $F^{-1}(\lambda)$ определяется из соотношения $\lambda = F((k')^2)$,

$$F((k')^2) = \left(1 + \frac{1}{1 - 2(k')^2}\right) \left(\frac{\pi/k\mathbf{K}'}{\operatorname{ch}(\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')}\right)^2.$$

В низшем порядке

$$\lambda = 2(k')^2 + \frac{15}{4}(k')^4 + O(k')^6. \quad (5.5)$$

Доказательство представления очевидно. Неочевидным фактом является совпадение таким образом построенного ряда с рядом (2.6) (см. ниже лемму 2).

5.3. Приближения, содержащие n мод.

5.3.1. *Приближения, содержащие n мод, как ряды по k' .* Рассмотрим следующие ряды по $(k')^2$:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(k')^2}} \frac{\pi}{2\mathbf{K}'} = 1 + (k')^2 \Omega_1 + (k')^4 \Omega_2 + \dots, \quad (5.6) \\ \frac{\operatorname{ch}(\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')}{\operatorname{ch}((2i+1)\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')} = (k')^{2i} l_{i0} + (k')^{2(i+1)} l_{i1} + \dots.$$

Приведем явный вид младших коэффициентов:

$$\Omega_1 = \frac{3}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{75}{64}, \quad l_{10} = \frac{1}{16}, \quad l_{11} = \frac{9}{256}.$$

Используя приближения

$$\Omega^{(n)} = 1 + (k')^2 \Omega_1 + \dots + (k')^{2n} \Omega_n, \quad (5.7) \\ A_i^{(n)} = A((k')^{2i} l_{i0} + (k')^{2(i+1)} l_{i1} + \dots + (k')^{2(i+n)} l_{in}),$$

мы получим следующие приближения для отдельных слагаемых в ряду (5.1):

$$s_0^{(0)}(t) = A \operatorname{sh}(\mu t), \quad (5.8)$$

$$s_0^{(1)}(t) = A \operatorname{sh}(\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1)), \dots, \quad (5.9)$$

$$s_0^{(n)}(t) = A \operatorname{sh}(\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1 + \dots + (k')^{2n} \Omega_n)). \quad (5.10)$$

Заметим, что в рамках принятых обозначений мы не разлагаем A в ряд по $(k')^2$.

Аналогично,

$$s_i^{(n,j)}(t) = (-1)^i A_i^{(n)} \operatorname{sh}((2i+1)\mu t \Omega^{(j)})$$

или, в более явном виде,

$$s_i^{(n,j)}(t) = (-1)^i A((k')^{2i} l_{i,0} + \dots + (k')^{2(n+i)} l_{in}) \times \\ \times \operatorname{sh}((2i+1)\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1 + \dots + (k')^{2j} \Omega_j)).$$

В соответствии с разложениями (5.6) и (5.7) имеем следующие приближения к $s_1(t)$:

$$\begin{aligned} s_1^{(0,0)}(t) &= -A(k')^2 l_{10} \operatorname{sh}(3\mu t), \\ s_1^{(0,1)}(t) &= -A(k')^2 l_{10} \operatorname{sh}(3\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1)), \\ s_1^{(1,2)}(t) &= -A((k')^2 l_{10}(k')^4 l_{11}) \operatorname{sh}(3\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1(k')^4 \Omega_2)). \end{aligned}$$

Мы также будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} s_i^{(\text{exact},j)}(t) &= (-1)^i A_i \operatorname{sh}((2i+1)\mu t(1 + (k')^2 \Omega_1 + \dots + (k')^{2j} \Omega_j)), \\ s_i^{(n,\text{exact})}(t) &= (-1)^i A((k')^{2i} l_{i0} + \dots + (k')^{2(n+i)} l_{in}) \operatorname{sh}((2i+1)\mu t \Omega). \end{aligned}$$

5.3.2. *Приближения, содержащие n мод, как ряды по λ .* Чтобы получить переразложение ряда (5.1), аналогичное (2.6), нам надо разложить Ω и A_i/A в ряды по ϵ :

$$\begin{aligned} \Omega &= \mu \left[1 + \frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{\Omega}_1 + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^2 \bar{\Omega}_2 + \dots \right], \\ A_i &= A \left[\left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^i \bar{l}_{i0} + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^{i+1} \bar{l}_{i1} + \dots \right], \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{3}{8}, \quad \bar{l}_{10} = \frac{1}{32}. \quad (5.11)$$

Будем также использовать обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^{(n)} &= \mu \left[1 + \frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{\Omega}_1 + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^2 \bar{\Omega}_2 + \dots + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^n \bar{\Omega}_n \right], \\ \bar{A}_i^{(n)} &= A \left[\left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^i \bar{l}_{i0} + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^{i+1} \bar{l}_{i1} + \dots + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^{i+n} \bar{l}_{in} \right]. \end{aligned}$$

В низших порядках имеем следующие приближения:

$$\begin{aligned} \bar{s}_1^{(0)}(t) &= A \operatorname{sh}(\mu t), \\ \bar{s}_0^{(1)}(t) &= A \operatorname{sh} \left(\mu t \left(1 + \frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{\Omega}_1 \right) \right), \\ \bar{s}_1^{(0,1)}(t) &= \frac{A^3 \epsilon}{\mu^2} \bar{l}_1 \operatorname{sh} \left(3\mu t \left(1 + \frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{\Omega}_1 \right) \right), \\ \bar{s}_1^{(1,2)}(t) &= A \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{l}_{10} + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^2 \bar{l}_{11} \right) \operatorname{sh} \left(3\mu t \left(1 + \frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \bar{\Omega}_1 + \left(\frac{A^2 \epsilon}{\mu^2} \right)^2 \bar{\Omega}_2 \right) \right), \end{aligned}$$

где $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{l}_{10}$ задаются формулами (5.11). Черта над s_i означает, что мы берем разложение по ϵ .

Имеет место

ЛЕММА 2. *При отождествлении амплитуд в (5.3) и (2.9), т.е. при $\mathfrak{A} = A$, справедливы равенства $\mathfrak{a}_{nk} = \bar{l}_{nk}$ и $\mathfrak{m}_i = \bar{\Omega}_i$.*

Данная лемма позволяет утверждать, что при $\mathfrak{A} = A$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_0^{(i)}(t) &= \bar{s}_0^{(i)}(t), & i &= 1, 2, \dots, \\ \mathfrak{s}_n^{(i,j)}(t) &= \bar{s}_n^{(i,j)}(t), & n &= 1, \dots, i, \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

если амплитуды в (2.7) и (5.3) одинаковы.

5.3.3. *Приближения, содержащие одну моду.* Точному выражению $q_0(t)$ для приближения, содержащего одну моду (см. формулу (5.4)), сопоставим в соответствии с формулами (5.8) и (5.9) низшие приближения следующего вида:

$$\bar{s}_0^{(0)}(t) = A \operatorname{sh}(\mu t), \quad \bar{s}_0^{(1)}(t) = A \operatorname{sh}\left(\mu t \left(1 + \frac{3A^2}{8\mu^2} \epsilon\right)\right).$$

В данных выражениях по сравнению с (5.2) присутствуют гиперболические синусы с другими аргументами. Разность аргументов дается выражениями

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mu t \delta_0 = \mu t \left(1 - \frac{\pi}{2\mathbf{K}'} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(k')^2}}\right), \\ \Delta_1 &= \mu t \delta_1 = \mu t \left(\left(1 + \frac{3A^2}{8\mu^2} \epsilon\right) - \frac{\pi\Omega}{2\mu\mathbf{K}'}\right) = \\ &= \mu t \left(1 + \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{1 - 2(k')^2}\right) \left(\frac{\pi/k\mathbf{K}'}{\operatorname{ch}(\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')}\right)^2 - \frac{\pi}{2\mathbf{K}'} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(k')^2}}\right). \end{aligned}$$

Оценим вклады, связанные с разностью аргументов. Имеем

$$s_0(t) - s_0^{(r)}(t) = A \operatorname{sh}(\mu t \Omega)(1 - \operatorname{ch} \Delta_r) - A \operatorname{ch}(\mu t \Omega) \operatorname{sh} \Delta_r.$$

При малых Δ , например при $|\Delta| < 1$, имеют место неравенства

$$|\operatorname{sh} \Delta| < 2|\Delta|, \quad |1 - \operatorname{ch} \Delta| < 2|\Delta|,$$

отсюда при $t > 0$ и $\Delta_r < 1$ получаем оценку

$$|s_0(t) - s_0^{(r)}(t)| < 2|\Delta_r| A \operatorname{sh}(\mu t \Omega) + 2|\Delta_r| A \operatorname{ch}(\mu t \Omega) = 2|\Delta_r| A e^{\mu t \Omega}. \quad (5.12)$$

Видно, что точность приближения $s_0^{(r)}(t)$ к $s_0(t)$ определяется малостью $|\Delta_r|$.

Заметим, что аналогичное утверждение верно и для приближения, содержащего n мод: для $|\Delta_r| < 1$

$$|s_n(t) - s_n^{\text{exact},r}(t)| < 2|\Delta_r| A \operatorname{sh}(\mu t \Omega) + 2|\Delta_r| A_n \operatorname{ch}(\mu t \Omega) = 2|\Delta_r| A_n e^{\mu \Omega t}. \quad (5.13)$$

Из явных выражений для δ_0 и δ_1 вытекает, что $|\delta_0| < \sqrt{2}(k')^2$ и $\delta_1 < (k')^4$ для $0 \leq k' < 1/2$, следовательно,

$$|\Delta_0| < \sqrt{2} \mu t (k')^2, \quad \Delta_1 < \mu t (k')^4. \quad (5.14)$$

5.3.4. *Приближение, содержащее две моды.* Рассмотрим приближение $q_1(t) = q_0(t) + s_1(t)$, определенное формулами (5.2)–(5.4), и в качестве приближения к $s_1(t)$ возьмем

$$\bar{s}_1^{(0,0)} = -\frac{A^3 \epsilon}{32\mu^2} \operatorname{sh}(3\mu t) \quad (5.15)$$

или

$$s_1^{(0,0)}(t) = -A(k')^2 \frac{1}{16} \operatorname{sh}(3\mu t). \quad (5.16)$$

Тогда отклонение $\bar{s}_1^{(0,0)}$ от $s_1(t)$ связано не только с изменением аргумента гиперболического синуса, которое равно $3\Delta_0$, но и с поправками к точному значению $A_1 = (k')^2 A/16 + a(k')^5 L_1(k')$. В силу неравенства

$$-\frac{(k')^2}{16} \frac{\pi}{k\mathbf{K}'} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')} + \frac{\pi}{k\mathbf{K}'} \frac{1}{\operatorname{ch}(3\pi\mathbf{K}/2\mathbf{K}')} < \frac{1}{10}(k')^5, \quad (5.17)$$

справедливого при $0 \leq k' < 1/2$, имеет место оценка $L_1(k') < 1/10$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} s_1^{(0,0)}(t) - s_1(t) &= -A \frac{(k')^2}{16} \operatorname{sh}(3\mu t) + A_1 \operatorname{sh}(3\Omega t) = \\ &= -A \frac{(k')^2}{16} (\operatorname{sh}(3\mu t(\delta_0 + \Omega)) - \operatorname{sh}(3\mu t\Omega)) + \left(A \frac{(k')^2}{16} + A_1 \right) \operatorname{sh}(3\mu t\Omega). \end{aligned}$$

С учетом оценок типа (5.12) и (5.17) окончательно получаем

$$|s_1^{(0,0)}(t) - s_1(t)| < C(k')^4 e^{3\mu t\Omega}, \quad C = \operatorname{const}.$$

5.3.5. *Явная оценка точности приближения второго порядка по ϵ для модифицированной теории возмущений.* Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < c < 1/2$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдутся постоянные $C > 0$ и $\sigma < 3/4$ такие, что при всех

$$0 \leq t \leq \frac{c}{2\sqrt{2}\mu} \ln \frac{\mu^4}{2\epsilon E} \quad (5.18)$$

выполнена оценка

$$|q(t) - s_0^{(1)}(t) - s_1^{(0,0)}(t)| \leq C \frac{\sqrt{E}}{\mu} \left(\frac{\epsilon E}{\mu^4} \right)^{2-\sigma}. \quad (5.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В оценке (5.19) C – безразмерная постоянная, множитель $\sqrt{E}/\mu$ написан из соображений размерности, $\epsilon E/\mu^4$ – безразмерный множитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.4) $q_1(t) = q_0(t) + s_1(t)$. В оценке (5.19) мы взяли приближение $s_0^{(1)}(t)$ к $q_0(t)$ и приближение $s_1^{(0,0)}$ к $s_1(t)$. Мы имеем

$$q(t) - s_0^{(1)}(t) - s_1^{(0,0)}(t) = q(t) - q_1(t) + q_0(t) - s_0^{(1)}(t) + s_1(t) - s_1^{(0,0)}(t),$$

следовательно,

$$|q(t) - s_0^{(1)}(t) - s_1^{(0,0)}(t)| < |q(t) - q_1(t)| + |q_0(t) - s_0^{(1)}(t)| + |s_1(t) - s_1^{(0,0)}(t)|.$$

Первое слагаемое в правой части данного неравенства при выполнении условия (5.18) удовлетворяет оценке из теоремы 1. Для завершения доказательства используются оценки (5.13) и (5.14).

Благодарности. Авторы благодарны В. В. Козлову и Д. В. Трещёву за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 11-01-00894_а (И. Арефьева), 11-01-00828_а (И. Волович и Е. Писковский) и 11-01-12114-офи_м (И. Волович)), а также Программой поддержки ведущих научных школ (гранты НШ-4612.2012.1 (И. Арефьева), НШ-2928.2012.1 (И. Волович и Е. Писковский)).

Список литературы

- [1] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Изд-во АН УССР, Киев, 1937.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 2005.
- [3] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНТИ, М., 1985.
- [4] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2009.
- [5] В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля*, УРСС, М., 1999.
- [6] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [7] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория*, ИЯИ РАН, М., 2009.
- [8] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *JHEP*, **8** (2011), 102, 32 pp., arXiv: 1103.0273.
- [9] I. Ya. Aref'eva, N. V. Bulatov, R. V. Gorbachev, *FRW cosmology with non-positively defined Higgs potentials*, arXiv: 1112.5951.
- [10] И. В. Волович, *ТМФ*, **164**:3 (2010), 354–362.
- [11] E. V. Piskovskiy, I. V. Volovich, “On the correspondence between Newtonian and functional mechanics”, *Quantum Bio-Informatics IV: From Quantum Information to Bio-informatics* (Tokyo, Japan, March 10–13, 2010), Quantum Probability and White Noise Analysis, **28**, eds. L. Accardi, W. Freudenberg, M. Ohaya, World Scientific, Hackensack, NJ, 2011, 363–372.
- [12] А. М. Журавский, *Справочник по эллиптическим функциям*, Наука, М., 1941.
- [13] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М., Наука, 1970.
- [14] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

Поступила в редакцию 9.02.2012