Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, Я. А. Коренной, В. И. Манько, О вычислениях средних значений квантовых наблюдаемых в представлении оптической томографии, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 475–482

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:51:50

© 2012 г. Г. Г. Амосов*, Я. А. Коренной†, В. И. Манько†

О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ КВАНТОВЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Определено дуальное отображение из специального класса $\mathcal{A}$ квантовых наблюдаемых $\hat{a}$ в специальный класс обобщенных функций $a(X, \phi)$. Класс $\mathcal{A}$ включает все симметризованные полиномы от канонических наблюдаемых $\hat{q}, \hat{p}$.

Ключевые слова: оптическая томограмма, среднее значение квантовой наблюдаемой, дуальное отображение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что $\hat{\rho}$ является оператором плотности (положительным оператором с единичным следом) в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$, тогда он может быть представлен в виде интегрального оператора

$$(\hat{\rho}\psi)(X) = \int_{\mathbb{R}} \rho(X, Y) \psi(Y) dY,$$

$\psi(\cdot) \in H$. В этом случае ядро Гильберта–Шмидта $\rho(\cdot, \cdot)$ называется матрицей плотности $\hat{\rho}$ в координатном представлении. Это означает, что квантовая наблюдаемая, являющаяся диагональной в этом представлении, есть оператор умножения на независимую переменную $\hat{q}$, действующий в H следующим образом:

$$(\hat{q}\psi)(X) = X\psi(X),$$

$\psi \in H$.

В работе [1] была введена функция Вигнера $W(q, p)$, ассоциированная с матрицей плотности $\rho(\cdot, \cdot)$ в координатном представлении посредством формулы

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \rho\left(q + \frac{x}{2}, q - \frac{x}{2}\right) dx.$$

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: gramos@mi.ras.ru

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Представление Мойяла квантовой механики [2] определяет отображение из множества квантовых наблюдаемых $\hat{a}$ в множество функций $a(q, p)$ на фазовом пространстве, при котором среднее значение $\langle \hat{a} \rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a})$ дается формулой

$$\langle \hat{a} \rangle_{\hat{\rho}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) a(q, p) dq dp.$$

К сожалению, несмотря на выполнение условия нормировки $\iint W(q, p) dq dp = 1$, функция Вигнера $W(q, p)$ не является, вообще говоря, положительной. В работах [3], [4] была введена оптическая томограмма $w(X, \phi)$, которая может быть вычислена при экспериментальном измерении обобщенной квадратуры гомодина, определяемой как преобразование Радона функции Вигнера,

$$w(X, \phi) = \iint W(q, p) \delta(X - q \cos \phi - p \sin \phi) dq dp,$$

где $\hat{q}$ и $\hat{p}$ – операторы координаты и импульса. Однопараметрическое множество $\{w(X, \phi), \phi \in [0, 2\pi)\}$ состоит из распределений вероятностей на действительной оси. Оптическая томограмма может быть вычислена непосредственно по оператору плотности посредством формулы [5]

$$w(X, \phi) = \text{Tr}(\hat{\rho} \delta(X - \hat{q} \cos \phi - \hat{p} \sin \phi)).$$

Обратное преобразование Радона [6] позволяет восстановить функцию Вигнера по оптической томограмме.

Для оператора плотности $\hat{a}$ можно определить функцию комплексного переменного z по формуле

$$a(z, \phi) = -2\pi \text{Tr}(\hat{a}(z - \hat{q} \cos \phi - \hat{p} \sin \phi)^{-2}), \quad (1)$$

$z \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(z) \neq 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1. *Для операторов плотности $\hat{\rho}$ и $\hat{a}$ справедливо тождество*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\hat{\rho}}(X + i\varepsilon, \phi) a(X + i\varepsilon, \phi) dX d\phi = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}),$$

где функция $a(z, \phi)$ определена формулой (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мы будем называть соотношение (1) *отображением, дуальным к отображению оптической томографии*.

Следует отметить, что понятие дуальности, которое мы вводим, отличается от известной концепции [7].

Обозначим через $\mathcal{D}$ выпуклое множество операторов плотности $\hat{\rho}$, ядра которых в координатном представлении $\rho(\cdot, \cdot)$ принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Тогда оптические томограммы $w(X, \phi)$ могут быть вычислены по ядрам $\rho(\cdot, \cdot)$ согласно формуле

$$w(X, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iXt} \int_{\mathbb{R}} e^{itY \cos \phi} \rho\left(Y + \frac{t \sin \phi}{2}, Y - \frac{t \sin \phi}{2}\right) dY dt. \quad (2)$$

Множество таких томограмм обозначим через Ω . Из формулы (2) следует, что $w(X, \phi)$, принадлежащие Ω , являются функциями X из пространства Шварца и бесконечно дифференцируемы по ϕ . Определим сопряженное пространство Ω^* как пространство таких обобщенных функций $a(X, \phi)$, что $a(\cdot, \phi) \in S(\mathbb{R})$ для любого фиксированного ϕ с действием $\langle a(\cdot, \phi), f(\cdot) \rangle$ обобщенной функции $a(\cdot, \phi)$ на основную функцию $f \in S(\mathbb{R})$, принадлежащим сопряженному пространству $(C^\infty)^*$ по ϕ , где C^∞ – пространство 2π -периодических бесконечно дифференцируемых по ϕ функций. Сопряженное пространство к пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$ состоит из обобщенных функций медленного роста a . Любая такая обобщенная функция a может рассматриваться как ядро $a(\cdot, \cdot)$ интегрального оператора, отвечающего квантовой наблюдаемой $\hat{a}$. Множество всех таких наблюдаемых будем называть сопряженным пространством $\mathcal{A} = \mathcal{D}^*$. Заметим, что $\mathcal{A}$ содержит как минимум все ограниченные наблюдаемые.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Дуальное отображение (1) может быть расширено на все $\hat{a} \in \mathcal{A}$. Расширение $a(X, \phi)$ принадлежит сопряженному пространству Ω^* . Более того, для любого оператора плотности $\hat{\rho} \in \mathcal{D}$ справедливо равенство*

$$\int_0^{2\pi} \langle a(\cdot, \phi) w_{\hat{\rho}}(\cdot, \phi) \rangle d\phi = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}).$$

Определим симметризованное произведение канонических квантовых наблюдаемых $\hat{q}^m \hat{p}^n$ следующей формулой:

$$\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \hat{p}^k \hat{q}^m \hat{p}^{n-k}. \quad (3)$$

Ниже мы используем тригонометрические полиномы $Q_n^m(\cos \phi)$, определенные в приложении.

ТЕОРЕМА 2. *Действие дуального отображения (1) на наблюдаемые (3) приводит к функциям $a_{mn}(X, \phi)$ вида*

$$a_{mn}(X, \phi) = Q_{n+m}^m(\cos \phi) X^{n+m}.$$

2. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ, СВЯЗАННОЕ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Для заданного оператора плотности $\hat{\rho}$ функция $F(\mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{i\mu\hat{q} + i\nu\hat{p}})$ называется характеристической функцией состояния $\hat{\rho}$. Ассоциированный с ней набор распределений вероятностей называется *симплектической квантовой томограммой* [5]

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iXt} F(t\mu, t\nu) dt,$$

которая связана с оптической томограммой формулой

$$w(X, \phi) = w(X, \cos \phi, \sin \phi).$$

Следовательно,

$$F(t \cos \phi, t \sin \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} w(X, \phi) dX. \quad (4)$$

Стандартная формула $e^{i\mu\hat{q}+i\nu\hat{p}} = e^{i\mu\nu/2} e^{i\mu\hat{q}} e^{i\nu\hat{p}}$ приводит к

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} \rho\left(x + \frac{\nu}{2}, x - \frac{\nu}{2}\right) dx. \quad (5)$$

Отсюда немедленно следует справедливость следующего равенства типа Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(X, Y) dX dY = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(\hat{\rho}^2),$$

что эквивалентно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(\mu, \nu) \overline{F_{\hat{\sigma}}}(\mu, \nu) d\mu d\nu = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}) \quad (6)$$

для характеристических функций любых двух операторов плотности $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ [8].

Принимая во внимание равенство типа Парсеваля (6), можно расширить отображение $\hat{\rho} \rightarrow F_{\hat{\rho}}$ на все операторы Гильберта–Шмидта. Более того, можно определить обобщенную функцию медленного роста $F_{\hat{a}} \in S'(\mathbb{R}^2)$, ассоциированную с наблюдаемой $\hat{a}$, так что $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(\mu, \nu) F_{\hat{a}}(\mu, \nu) d\mu d\nu = (1/(2\pi)) \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a})$ для всех операторов плотности $\hat{\rho} \in \mathcal{D}$. Для полноты изложения приведем хорошо известный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Обобщенные функции медленного роста $F_{\hat{a}} \equiv F_{mn}$, ассоциированные с наблюдаемыми $\hat{a}$ вида (3), определяются формулой*

$$F_{mn}(\mu, \nu) = (-i)^{m+n} \delta^{(m)}(\mu) \delta^{(n)}(\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство типа Парсеваля (6), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(\mu, \nu) F_{00}(\mu, \nu) d\mu d\nu = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(\hat{\rho}) = \frac{1}{2\pi}.$$

Поскольку $F_{\hat{\rho}}(0, 0) = 1$ для всех операторов плотности $\hat{\rho}$, это приводит к тому, что

$$F_{00}(\mu, \nu) = \delta(\mu) \delta(\nu). \quad (7)$$

Заметим, что утверждение верно, если один из индексов m или n равен нулю. Предположим, что оно верно для всех натуральных чисел вплоть до m и n . Докажем, что тогда оно верно для $m+1$ и $n+1$. Используя равенства

$$\begin{aligned} \hat{p}^k \hat{q}^m \hat{p}^{n-k} &= \hat{p}^k \hat{q}^{m+1} \hat{p}^{n-k} - i(n-k) \hat{p}^k \hat{q}^m \hat{p}^{n-k-1}, \\ \nu \delta(\nu) &= 0, \quad \nu \delta^{(n)}(\nu) = -n \delta^{(n-1)}(\nu), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\text{Tr}(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s e^{i\mu\hat{q}+i\nu\hat{p}})) = \text{Tr}\left(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s \left(i\hat{q} + \frac{i\nu}{2}\right) e^{i\mu\nu/2} e^{i\mu\hat{q}} e^{i\nu\hat{p}}\right) =$$

$$= i \operatorname{Tr}(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s \hat{q} e^{i\mu \hat{q} + i\nu \hat{p}}) - \frac{i}{2} n \delta^{(m)}(\mu) \delta^{(n-1)}(\nu) = i \operatorname{Tr}(\{\hat{q}^{m+1} \hat{p}^n\}_s e^{i\mu \hat{q} + i\nu \hat{p}}).$$

С другой стороны, равенства

$$\frac{\hat{p}}{2} \{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s + \{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s \frac{\hat{p}}{2} = \{\hat{q}^m \hat{p}^{n+1}\}_s$$

приводят к тому, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} (\operatorname{Tr}(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s e^{i\mu \hat{q} + i\nu \hat{p}})) &= \operatorname{Tr} \left(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s e^{i\mu \nu / 2} e^{i\mu \hat{q}} \left(i\hat{p} + \frac{i\mu}{2} \right) e^{i\nu \hat{p}} \right) = \\ &= \operatorname{Tr} \left(\frac{i\hat{p}}{2} \{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s e^{i\mu \nu / 2} e^{i\mu \hat{q}} e^{i\nu \hat{p}} \right) + \\ &\quad + \operatorname{Tr} \left(\{\hat{q}^m \hat{p}^n\}_s e^{i\mu \nu / 2} \left(\frac{i\hat{p}}{2} - \frac{i\mu}{2} \right) e^{i\mu \hat{q}} e^{i\nu \hat{p}} \right) + \frac{im}{2} \delta^{(m-1)}(\mu) \delta^{(n)}(\nu) = \\ &= i \operatorname{Tr}(\{\hat{q}^m \hat{p}^{n+1}\}_s e^{i\mu \hat{q} + i\nu \hat{p}}). \end{aligned}$$

3. ДУАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Для доказательства теоремы 1 и следствия 1 нам потребуется следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для данного оператора плотности $\hat{a}$ отношение между дуальным отображением (1) и характеристической функцией $F_{\hat{a}}$ дается формулой

$$tF_{\hat{a}}(t \cos \phi, t \sin \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} a(X - i\varepsilon, \phi) dX, \quad t > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим представление $\hat{p} \cos \phi + \hat{q} \sin \phi$ в пространстве $H_{\phi} = L^2(\mathbb{R})$, так что

$$((\hat{p} \cos \phi + \hat{q} \sin \phi)f)(x) = xf(x), \quad f \in H_{\phi}.$$

Тогда для данных $f, g \in H_{\phi}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} (g, (X - i\varepsilon - \hat{p} \cos \phi - \hat{q} \sin \phi)^{-2} f) dX &= \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x) f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} \frac{1}{(X - x - i\varepsilon)^2} dX dx &\equiv I. \end{aligned}$$

Вычисляя вычет в $z_0 = x + i\varepsilon$, получаем

$$I = 2\pi i \begin{cases} it(g, e^{it(\hat{q} \cos \phi + \hat{p} \sin \phi + i\varepsilon)} f), & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Предложение доказано.

Докажем теперь теорему 1. Используя выражение для $w_{\hat{\rho}}$ через характеристическую функцию $F_{\hat{\rho}}$ и определение $a(z, \phi)$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\hat{\rho}}(X + i\varepsilon, \phi) a(X + i\varepsilon, \phi) dX d\phi = \\
 & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itX} F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) \times \\
 & \quad \times \text{Tr}(\hat{a}(X + i\varepsilon - \hat{q} \cos \phi - \hat{p} \sin \phi)^{-2}) dt dX d\phi = \\
 & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) \times \\
 & \quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(\hat{a} e^{-itX} (X + i\varepsilon - \hat{q} \cos \phi - \hat{p} \sin \phi)^{-2}) dX \right) dt d\phi = \\
 & = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) \times \\
 & \quad \times \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(\hat{a} e^{itX} (X - i\varepsilon - \hat{q} \cos \phi - \hat{p} \sin \phi)^{-2} dX \right) dt d\phi \equiv I.
 \end{aligned}$$

Подставляя соотношение из предложения 2, находим

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\hat{\rho}}(\mu, \nu) \overline{F_{\hat{a}}}(\mu, \nu) d\mu d\nu = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}).$$

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству следствия 1

Если оператор плотности $\hat{\rho} \in \mathcal{D}$, т. е. матрица плотности в координатном представлении $\rho(\cdot, \cdot) \in S(\mathbb{R}^2)$, то его характеристическая функция

$$F_{\hat{\rho}}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} \rho\left(x + \frac{\nu}{2}, x - \frac{\nu}{2}\right) dx$$

также принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, соответствующая оптическая томограмма

$$\omega(X, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itX} F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) dt$$

принадлежит $S(\mathbb{R})$ по X и бесконечно дифференцируема по ϕ . Используя равенство типа Парсеваля из теоремы 1,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\hat{\rho}}(X + i\varepsilon, \phi) a(X + i\varepsilon, \phi) dX d\phi = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}),$$

мы можем определить расширение отображения $\hat{a} \rightarrow a(X, \phi)$, дуального к томографическому, так, что $a(X, \phi)$ должно быть обобщенной функцией на множестве Ω оптических томограмм $\omega_{\hat{\rho}}$, т. е.

$$\langle a, \omega_{\hat{\rho}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}).$$

Следствие доказано.

Докажем теорему 2. Для заданной оптической томограммы $\omega_{\hat{\rho}}(X, \phi)$ оператора плотности $\hat{\rho}$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} X^{n+m} Q_{n+m}^m(\cos \phi) \omega_{\hat{\rho}}(X, \phi) dX d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} X^{n+m} Q_{n+m}^m(\cos \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iXt} F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) dt dX d\phi = \\ &= i^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \delta^{(n+m)}(t) F_{\hat{\rho}}(t \cos \phi, t \sin \phi) Q_{n+m}^m(\cos \phi) dt d\phi = \\ &= (-i)^n \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k \frac{\partial^{n+m} F_{\hat{\rho}}}{\partial \mu^k \partial \nu^{n+m-k}}(0, 0) \cos^k \phi \sin^{m+n-k} \phi Q_{n+m}^m(\cos \phi) d\phi = \\ &= (-i)^n \frac{\partial^{n+m} F_{\hat{\rho}}}{\partial \mu^m \partial \nu^n}(0, 0). \end{aligned}$$

Теперь результат теоремы следует из предложения 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим тригонометрическую систему $\{\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi, 0 \leq k \leq n\}$. Взятие производных от $\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi$ приводит к линейным комбинациям тех же элементов. Следовательно, $\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $(n+1)$ -го порядка. Заметим, что

$$(\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi)^{(s)} = 0, \quad 0 \leq s < k, \quad (\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi)^{(k)} = k!, \quad \text{if } \phi = 0.$$

Следовательно, вронскиан $w(0) = \prod_{k=0}^n k! \neq 0$ и элементы этой системы линейно независимы на отрезке $[0, 2\pi]$. Таким образом, существует биортогональная система $\tilde{Q}_n^m(\cos \phi)$, состоящая из полиномов $\sin^k \phi \cos^{n-k} \phi$, так что

$$\int_0^{2\pi} \sin^k \phi \cos^{n-k} \phi \tilde{Q}_n^m(\cos \phi) d\phi = \delta_{km}.$$

Положим $Q_n^m(\cos \phi) = \tilde{Q}_n^m(\cos \phi) / C_n^m$. Выпишем несколько первых полиномов:

$$\begin{aligned} Q_0^0(\cos \phi) &= \frac{1}{2\pi}, & Q_1^0(\cos \phi) &= \frac{1}{\pi} \cos \phi, & Q_1^1(\cos \phi) &= \frac{1}{\pi} \sin \phi, \\ Q_2^0(\cos \phi) &= -\frac{1}{2\pi} \cos^2 \phi + \frac{3}{2\pi} \sin^2 \phi, \\ Q_2^1(\cos \phi) &= \frac{2}{\pi} \sin \phi \cos \phi, \\ Q_2^2(\cos \phi) &= \frac{3}{2\pi} \cos^2 \phi - \frac{1}{2\pi} \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Благодарности. Работа частично поддержана программой РАН “Математическая теория управления”, Аналитической ведомственной целевой программой “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/12136) и РФФИ (гранты № 10-02-00312, 11-02-00456).

Список литературы

- [1] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [2] J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**:1 (1949), 99–124.
- [3] J. Bertrand, P. Bertrand, *Found. Phys.*, **17**:4 (1987), 397–405.
- [4] K. Vogel, H. Risken, *Phys. Rev. A*, **40**:5 (1989), 2847–2849.
- [5] S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi, *Quant. Semiclass. Opt.*, **7**:4 (1995), 615–623.
- [6] G. M. d'Ariano, U. Leonhardt, H. Paul, *Phys. Rev. A*, **52**:3 (1995), R1801–R1804.
- [7] O. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Russ. Las. Res.*, **18**:5 (1997), 407–444.
- [8] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Наука, М., 1980.

Поступила в редакцию 23.06.2011,
после доработки 22.09.2011