Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, О дискретном спектре гамильтонианов некоторых моделей квантовых систем, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 44–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 05:36:43

© 2012 г.

Г. М. Жислин*

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТониАНОВ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Изучается дискретный спектр гамильтониана $H_0[Z_1]$ относительного движения n -частичной квантовой системы Z_1 , состоящей из тождественных между собой частиц двух типов; взаимодействие частиц первого типа описывается короткодействующим потенциалом W_1 , взаимодействие частиц второго типа – дальнедействующим потенциалом W_2 , взаимодействие частиц разных типов – отрицательным дальнедействующим потенциалом W_3 . При некоторых предположениях относительно потенциалов W_2, W_3 показано, что дискретный спектр оператора $H_0[Z_1]$ бесконечен как с учетом перестановочной симметрии, так и без ее учета.

Ключевые слова: многочастичные гамильтонианы, дискретный спектр, перестановочная симметрия, математические модели квантовых систем.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье мы изучаем дискретный спектр гамильтониана $H_0[Z_1]$ относительного движения n -частичной квантовой системы Z_1 , которая состоит из двух типов тождественных между собой частиц. Мы считаем, что потенциалы W_1 и W_2 взаимодействия между частицами для частиц первого и второго типов являются соответственно короткодействующим и дальнедействующим, а потенциал W_3 взаимодействия между частицами разных типов отвечает отрицательному дальнедействию. При некоторых предположениях о потенциалах W_2, W_3 мы устанавливаем бесконечность дискретного спектра оператора $H_0[Z_1]$ как с учетом перестановочной симметрии (теорема 1.2), так и без ее учета (теорема 1.1).

Настоящая работа представляет собой шаг на пути к изучению дискретного спектра протон-нейтронных систем, ибо из трех типов потенциалов, определяющих взаимодействия в таких системах, два “с запасом” моделируются использованными нами потенциалами W_1, W_2 . Настоящая статья, по-видимому, является первой в исследовании математических моделей систем рассматриваемого типа и содержит новые результаты (теоремы 1.1 и 1.2). Хотя использованный в работе метод пробных функций для многочастичных гамильтонианов хорошо известен, его применение

* Научно-исследовательский радиофизический институт, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

к конкретным системам сопряжено с трудностями. Главная из них состоит в том, что для доказательства бесконечности дискретного спектра с помощью этого метода необходимо установить (исключая ситуацию эффекта Ефимова) справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ А. Среди разбиений системы Z_1 , определяющих согласно теореме Хунцикера–ван Винтера–Жислина (ХВЖ) нижнюю границу существенного спектра оператора $H_0[Z_1]$, найдется разбиение на два устойчивых кластера.

В существующих работах, посвященных структуре дискретного спектра многочастичных гамильтонианов общего вида, выполнение утверждения А, как правило, постулируется, поэтому для конкретных систем надо доказывать справедливость этого утверждения отдельно. Именно такое доказательство (с учетом симметрии и без него) и составляет главную часть настоящей работы.

Рассмотрим квантовую систему Z_1 , состоящую из тождественных между собой частиц двух типов: из k частиц первого типа с номерами $1, \dots, k$ и p частиц второго типа с номерами $k+1, \dots, n$, где $n = k+p$. Далее для краткости частицы первого типа мы условно называем “нейтронами”, а второго – “протонами”. Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ и m_i – радиус-вектор и масса i -й частицы, $r_{ij} = r_i - r_j$, а $V_{ij}(|r_{ij}|) = V_{ji}(|r_{ij}|)$ – потенциалы взаимодействия i -й и j -й частиц. По условию мы имеем $m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $m_{k+1} = m_{k+2} = \dots = m_n$. Пусть

$$\begin{aligned} W_1(r_1) &= V_{ij}(|r_1|), & i, j &= 1, \dots, k, \\ W_2(r_1) &= V_{ij}(|r_1|), & i, j &= k+1, \dots, n, \\ W_3(r_1) &= V_{ij}(|r_1|), & i &= 1, \dots, k, \quad j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Относительно потенциалов W_i мы предполагаем, что они вещественны и удовлетворяют условиям

$$|W_i(r_1)| \leq C_0 |r_1|^{-b} \quad \text{при} \quad |r_1| \leq A, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} |W_1(r_1)| &\leq C_0 |r_1|^{-\beta}, & |W_2(r_1)| &\leq e |r_1|^{-\gamma_1}, \\ -\delta_1 |r_1|^{-\gamma_2} &\leq W_3(r_1) \leq -\delta |r_1|^{-\gamma} & \text{при} \quad |r_1| > A, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $b, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \beta, e, \delta, \delta_1, A, C_0$ – некоторые положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_2 \leq \gamma \leq b < 3/2, \quad \beta > 2, \quad \gamma_1 \geq \gamma, \quad A > 1.$$

Отметим, что ограничение $\gamma < 3/2$ введено только для упрощения выкладок. Фактически результаты работы справедливы при $\gamma < 2$ и при любом $b < 3/2$.

Пусть β_0 и γ_0 – некоторые числа такие, что $\beta_0 \in (\gamma, 2)$, а $\gamma_0 = \gamma_1$ при $\gamma_1 < 2$ и $\gamma_0 \in (\gamma, 2)$ при $\gamma_1 \geq 2$. Тогда в силу (1.2)

$$|W_1(r_1)| \leq C_0 |r_1|^{-\beta_0}, \quad |W_2(r_1)| \leq e |r_1|^{-\gamma_0} \quad \text{при} \quad |r_1| \geq A. \quad (1.3)$$

Именно эти оценки для W_1 и W_2 (вместе с оценкой для W_3 из (1.2)) будут использоваться в настоящей работе.

Зададим оператор энергии

$$H = T + V, \quad (1.4)$$

где

$$T = T[Z_1] = - \sum_{i \in Z_1} \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i, \quad V = V[Z_1] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \in Z_1, \\ i \neq j}} V_{ij}(|r_{ij}|), \quad (1.5)$$

$\hbar = h/2\pi$, h – постоянная Планка, $\Delta_i = \partial^2/\partial x_i^2 + \partial^2/\partial y_i^2 + \partial^2/\partial z_i^2$. Следуя работе [1], введем пространства относительного движения $R_0 = R_0[Z_1]$ и движения центра масс $R_c = R_c[Z_1]$ системы Z_1 :

$$R_0 := R_0[Z_1] = \left\{ r \mid r = (r_1, \dots, r_n), \sum_{i=1}^n m_i r_i = 0 \right\},$$

$$R_c := R_c[Z_1] = \left\{ r \mid r = (r_1, \dots, r_n), r_j = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i \right\},$$

где $M = \sum_{i \in Z_1} m_i$.

Тогда оператор (1.4) можно записать как сумму оператора $H_0 = H_0[Z_1]$ энергии относительного движения системы Z_1 и оператора $H_c = H_c[Z_1]$ энергии движения ее центра масс, определенных соответственно в пространствах $\mathcal{L}_2(R_0)$ и $\mathcal{L}_2(R_c)$:

$$H = H_0 \times I_c + I_0 \times H_c. \quad (1.6)$$

Здесь I_s – единичный оператор в $\mathcal{L}_2(R_s)$, $s = 0, c$. Далее для краткости в соотношениях типа (1.6) единичные операторы будут опущены.

Операторы H_0 и H_c имеют вид $H_0 = T_0 + V_0$ и $H_c = T_c$, где $T_0 = T_0[Z_1]$ и $V_0 = V[Z_1]$ – это операторы T и V , рассматриваемые на функциях из пространства $C_0^2(R_0)$, а T_c – оператор T на $C_0^2(R_c)$. Для получения явного вида операторов T_0 , V_0 и T_c достаточно ввести в R_0 и R_c независимые координаты. Однако при учете перестановочной симметрии это неудобно, так как при этом нарушается “симметричное” равноправие частиц (см., например, статью [2]), и мы этого делать не будем. Оператор H_0 на $C_0^2(R_0)$ ограничен снизу. Расширим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

Пусть S – группа перестановок тождественных частиц системы Z_1 , α – произвольный тип неприводимого представления группы S , $P_0^{(\alpha)}$ – проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций симметрии α [1]. Положим $H_0^{(\alpha)} = P_0^{(\alpha)} H_0$.

Цель настоящей работы – исследование дискретных спектров операторов H_0 и $H_0^{(\alpha)}$. Всюду далее при $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$ мы предполагаем выполнение условия

$$e(p-1) < \delta k. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Дискретный спектр $\sigma_d(H_0)$ оператора H_0 бесконечен, если $\gamma_1 > \gamma$ или если $\gamma_1 = \gamma$ и выполняется условие (1.7).*

ТЕОРЕМА 1.2. *При любом α дискретный спектр $\sigma_d(H_0^{(\alpha)})$ оператора $H_0^{(\alpha)}$ бесконечен, если $\gamma_1 > \gamma$ или если $\gamma_1 = \gamma$ и выполняется условие (1.7).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (1.7) оказалось несколько похожим на полученное нами ранее условие существования дискретного спектра систем типа атома [2], хотя система Z_1 абсолютно не атомоподобна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1.1 вытекает из теоремы 1.2. Дело в том, что нижняя граница $\mu^{(\alpha)}$ существенного спектра оператора $H_0^{(\alpha)}$ для некоторых α совпадает с нижней границей μ существенного спектра оператора H_0 , и поэтому для таких α из теоремы 1.2 следует существование бесконечного дискретного спектра $\sigma_d(H_0)$ оператора H_0 слева от μ . Однако, поскольку в идейном плане доказательства теорем 1.1 и 1.2 близки, мы для облегчения понимания сначала доказываем теорему 1.1, а потом указываем, какие изменения надо сделать для учета перестановочной симметрии.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

2.1. Пусть $D \subseteq Z_1$ – произвольный кластер из системы Z_1 , $|D|$ – число элементов D и $M[D] = \sum_{i \in D} m_i$. Определим оператор энергии $H[D] = T[D] + V[D]$ кластера D аналогично оператору энергии $H[Z_1]$ всей системы Z_1 , заменяя в суммах в (1.5) Z_1 на D . Положим

$$R[D] = \{r \mid r = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i = 0 \text{ при } i \notin D\}$$

и введем для кластера D пространства $R_0[D]$ относительного движения и $R_c[D]$ движения центра масс кластера:

$$R_0[D] = \left\{ r \mid r \in R[D], \quad \sum_{j \in D} m_j r_j = 0 \right\},$$

$$R_c[D] = \left\{ r \mid r \in R[D], \quad r_j = r_c[D] = \sum_{i \in D} \frac{m_i}{M[D]} r_i \text{ при } j \in D \right\}.$$

Относительные координаты частиц из D будем обозначать через $r_i^0[D]$, а их совокупность – через $r_0[D]$.

Обозначим через $H_0[D]$ и $H_c[D]$ соответственно операторы энергии относительного движения и энергии движения центра масс кластера D . Эти операторы получаются из оператора $H[D]$, если его рассматривать соответственно в пространствах $\mathcal{L}_2(R_0[D])$ и $\mathcal{L}_2(R_c[D])$. Отметим, что при $|D| = 1$ пространство $R_0[D]$ состоит, очевидно, только из нулевого вектора, поэтому $H_0[D] = 0$ при $|D| = 1$. Кластер D назовем *устойчивым*, если дискретный спектр оператора $H_0[D]$ не пуст или если $|D| = 1$ (т.е. $H_0[D] = 0$).

Обозначим через $Z_t = (D_1, \dots, D_t)$ произвольное разбиение системы Z_1 на не взаимодействующие между собой непустые кластеры D_i без общих элементов. Пусть

$$R_0(Z_t) = \sum_{i=1}^t \oplus R_0[D_i], \quad H_0(Z_t) = \sum_{i=1}^t H_0[D_i].$$

Очевидно, $H_0(Z_t)$ есть оператор энергии относительного движения составной системы Z_t в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0(Z_t))$. Разбиение Z_t назовем *устойчивым*, если оно состоит из устойчивых кластеров, т.е. если дискретный спектр $\sigma_d(H_0(Z_t))$ оператора $H_0(Z_t)$ не пуст или если $H_0(Z_t) = 0$ (все кластеры одночастичные). Пусть μ – нижняя грань существенного спектра оператора H_0 . По теореме ХВЖ [3] [4]

$$\mu = \min_{Z_t} \inf H_0(Z_t). \quad (2.1)$$

Разбиение Z_t , $t \geq 2$, назовем *определяющим*, если $\inf H_0(Z_t) = \mu$.

2.2. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Если существует неустойчивое определяющее разбиение Z_t , то найдется устойчивое определяющее разбиение Z'_{t_1} с $t_1 > t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_t = (D_1, \dots, D_t)$ – произвольное определяющее разбиение системы Z_1 . Если разбиение Z_t неустойчиво, то найдется кластер $D_j \in Z_t$, $|D_j| \geq 2$, такой, что $\sigma_d(H_0[D_j]) = \emptyset$. Пусть $Z[D_j] = (D_{j_1}, D_{j_2})$ – произвольное разбиение подсистемы D_j на два непустых не взаимодействующих между собой кластера D_{j_1}, D_{j_2} без общих элементов. Тогда согласно теореме ХВЖ, примененной к оператору $H_0[D_j]$, нижняя граница $\mu[D_j]$ существенного спектра оператора $H_0[D_j]$ есть

$$\mu[D_j] = \min_{Z[D_j]} \inf H_0(Z[D_j]),$$

где $H_0(Z[D_j])$ – оператор энергии относительного движения составной системы $Z[D_j]$. Пусть разбиение $Z^{(1)}[D_j] = (D_{j_1}, D_{j_2})$ таково, что

$$\inf H_0(Z^{(1)}[D_j]) = \mu[D_j].$$

Поскольку $\sigma_d(H_0[D_j]) = \emptyset$, мы имеем $\mu[D_j] = \inf H_0[D_j]$, следовательно,

$$\inf H_0[D_j] = \inf H_0(Z^{(1)}[D_j]) = \inf H_0[D_{j_1}] + \inf H_0[D_{j_2}].$$

Пусть $Z_{t+1}^{(1)} = (D_1, \dots, D_{j-1}, D_{j_1}, D_{j_2}, D_{j+1}, \dots, D_t)$. По построению

$$\inf H_0(Z_t) = \inf H_0(Z_{t+1}^{(1)}).$$

Если определяющее разбиение $Z_{t+1}^{(1)}$ содержит хотя бы один неустойчивый кластер, то, применяя к нему рассуждения, аналогичные примененным к кластеру D_j , мы придем к некоторому разбиению $Z_{t+2}^{(2)}$, для которого $\inf H_0(Z_{t+2}^{(2)}) = \inf H_0(Z_t)$. Продолжая этот процесс, мы в итоге получим некоторое устойчивое определяющее разбиение Z'_{t_1} с $t_1 > t$. Лемма доказана.

2.3. Пусть $Z_t = \{D_1, \dots, D_t\}$ – произвольное разбиение системы Z_1 на t кластеров, $t \geq 2$, пусть k_i и p_i – числа “нейтронов” и “протонов” в i -м кластере.

ЛЕММА 2.2. *В любом разбиении Z_t найдутся такие кластеры D_j и D_s , что*

$$L_{js} := ep_j p_s \delta_{\gamma_0 \gamma} - \delta(k_j p_s + k_s p_j) < 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\gamma_0 \neq \gamma$ в качестве D_j и D_s можно взять два любых кластера, для которых $k_j \geq 1$, $p_s \geq 1$ или $p_j \geq 1$, $k_s \geq 1$. Поэтому далее мы считаем, что $\gamma_0 = \gamma$ (и, следовательно, выполнено неравенство (1.7)). Рассмотрим сначала два частных случая.

1. Пусть в разбиении Z_t для некоторого кластера D_{s_0} выполняется равенство $p_{s_0} = 0$. Тогда, очевидно, $k_{s_0} \geq 1$, ибо иначе $|D_{s_0}| = p_{s_0} + k_{s_0} = 0$. Выберем j_0 так, что $p_{j_0} \geq 1$. Тогда

$$L_{j_0 s_0} = -\delta k_{s_0} p_{j_0} < 0,$$

и неравенство (2.2), в котором $j = j_0$, $s = s_0$, доказано. Поэтому далее можно предполагать, что $p_s \geq 1$ при всех s (и, следовательно, $p \geq 2$).

2. Пусть $Z_t = (D_1, D_2)$ и $p_1 = p_2 = p/2$. Тогда

$$L_{12} = e \frac{p^2}{4} - \delta k \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \left(\frac{pe}{2} - \delta k \right) \leq \frac{p}{2} [e(p-1) - \delta k],$$

ибо $p/2 \leq p-1$. В силу (1.7) $L_{12} < 0$.

Таким образом, нам остается доказать неравенство (2.2) в общем случае, исключив случаи, рассмотренные выше. Предположим, что для разбиения Z_t утверждение леммы при $\gamma_0 = \gamma$ неверно, т. е. $L_{js} \geq 0$ при всех $j, s, j \neq s$. Фиксируя произвольное s , просуммируем эти неравенства по $j, j \neq s$. Будем иметь для любого s неравенство

$$\lambda(p - p_s)p_s - [k_s(p - p_s) + (k - k_s)p_s] \geq 0, \quad (2.3)$$

где $\lambda = e/\delta$. Поделив его на p_s (с учетом $p_s \geq 1$) получим, что для любого s

$$\lambda(p - p_s) - k_s p p_s^{-1} + 2k_s - k \geq 0. \quad (2.4)$$

Если бы для всех кластеров выполнялось неравенство $p_s \geq p/2$, то были бы справедливы равенства $Z_t = Z_2$ и $p_1 = p_2 = p/2$, а для этого случая неравенство (2.2) уже доказано. Поэтому $p_s < p/2$ для некоторого s . Тогда в силу (2.4) для этого s мы имеем $\lambda(p - p_s) - k \geq 0$, следовательно, $\lambda(p-1) - k \geq 0$, что противоречит (1.7). Таким образом, предположение о неотрицательности чисел L_{js} при всех j, s неверно. Лемма доказана.

2.4. Пусть D_j и D_s – устойчивые кластеры, для которых выполняется неравенство (2.2), $D_j \cap D_s = \emptyset$, $D = D_j \cup D_s$. Пусть $H_0[D_j]$, $H_0[D_s]$ и $H_0[D]$ – операторы энергии относительного движения соответствующих кластеров.

ЛЕММА 2.3. *Справедливо неравенство*

$$\inf H_0[D] < \inf H_0[D_s] + \inf H_0[D_j]. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $|D_j| \geq 2, |D_s| \geq 2$. Пусть ξ_j и ξ_s – радиус-векторы центров масс подсистем D_j и D_s , $\xi = \xi_j - \xi_s = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})$. Пусть M_i – масса кластера D_i , $M_{js} = (M_j^{-1} + M_s^{-1})^{-1}$. Легко видеть, что оператор $H_0[D]$ можно записать в виде

$$H_0[D] = H_0[D_j] + H_0[D_s] + B_{js}, \quad (2.6)$$

где

$$B_{js} = -\frac{\hbar^2}{2M_{js}} \Delta_\xi + I_{js},$$

$$\Delta_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{01}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{02}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{03}^2}, \quad I_{js} = \sum_{\substack{l \in D_j, \\ m \in D_s}} V_{lm}(|r_{lm}|).$$

Здесь $r_{lm} = r_l^0 - r_m^0 + \xi$, где $r_l^0 = r_l - \xi_j$ при $l \in D_j$ и $r_m^0 = r_m - \xi_s$ при $m \in D_s$. Так как кластеры D_i устойчивы, числа $\mu_i = \inf H_0[D_i]$ суть собственные значения

операторов $H_0[D_i]$, $i = j, s$. Пусть $\varphi = \varphi(r_0[D_j])$, $\psi = \psi(r_0[D_s])$ – произвольные нормированные соответственно в $\mathcal{L}_2(R_0[D_j])$ и $\mathcal{L}_2(R_0[D_s])$ собственные функции операторов $H_0[D_j]$ и $H_0[D_s]$, отвечающие их (наименьшим) собственным значениям μ_j и μ_s . Пусть $\tilde{f}_1(\xi)$ – произвольная гладкая финитная нормированная в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ функция, $\tilde{f}_1(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leq 1$. Положим $\tilde{f}_a = a^{3/2} \tilde{f}_1(a\xi)$, $a > 0$, и $\tilde{u}_a = \varphi\psi\tilde{f}_a$. Очевидно, $\|\tilde{f}_a\|_{\mathbb{R}^3} = \|\tilde{f}_1\|_{\mathbb{R}^3} = 1$ и $\|\tilde{u}_a\|_{R_0[D]} = \|\tilde{u}_1\|_{R_0[D]} = 1$. Оценим сверху квадратичную форму $(H_0[D]\tilde{u}_a, \tilde{u}_a)$. В силу (2.6)

$$(H_0[D]\tilde{u}_a, \tilde{u}_a) = (H_0[D_j]\varphi, \varphi) + (H_0[D_s]\psi, \psi) + (B_{js}\tilde{u}_a, \tilde{u}_a). \quad (2.7)$$

Поскольку

$$(H_0[D_j]\varphi, \varphi) = \mu_j = \inf H_0[D_j], \quad (H_0[D_s]\psi, \psi) = \mu_s = \inf H_0[D_s], \quad (2.8)$$

неравенство (2.5) будет следовать из (2.7) и (2.8), если

$$(B_{js}\tilde{u}_a, \tilde{u}_a) = -\frac{\hbar^2}{2M_{js}}(\Delta_\xi \tilde{f}_a, \tilde{f}_a) + (I_{js}\tilde{u}_a, \tilde{u}_a) < 0. \quad (2.9)$$

Докажем справедливость соотношения (2.9) при малых a . Прежде всего заметим, что, очевидно,

$$|(-\Delta_\xi \tilde{f}_a, \tilde{f}_a)| \leq a^2 \|\tilde{f}_1(\eta)\| \|\Delta_\eta \tilde{f}_1(\eta)\|, \quad (2.10)$$

где $\eta = a\xi$ – новая переменная интегрирования. Далее мы оценим слагаемые $d_{lm}(a) = (V_{lm}\tilde{u}_a, \tilde{u}_a)$, $l \in D_j$, $m \in D_s$, входящие в сумму $(I_{js}\tilde{u}_a, \tilde{u}_a)$. Очевидно, $d_{lm}(a) = b_{lm}(a) + c_{lm}(a)$, где

$$\begin{aligned} b_{lm}(a) &= \int_{|r_{lm}| \leq A} V_{lm}(|r_{lm}|) \tilde{u}_a^2 dr_0[D], \\ c_{lm}(a) &= \int_{|r_{lm}| > A} V_{lm}(|r_{lm}|) \tilde{u}_a^2 dr_0[D]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу (1.1) имеем

$$|b_{lm}(a)| \leq C_0 \int |\varphi\psi|^2 \int_{|r_{lm}| \leq A} |r_{lm}|^{-b} \tilde{f}_a^2(\xi) d\xi dr_0[D_j] dr_0[D_s]. \quad (2.12)$$

Используя ограниченность функции $\tilde{f}_1(\xi)$ в $\mathbb{R}^3$ и полагая $\eta = r_l^0 - r_m^0 + \xi$ при фиксированных r_l^0, r_m^0 , мы после интегрирования в (2.12) по η получим, что

$$|b_{lm}(a)| \leq ca^3, \quad (2.13)$$

где число c не зависит от a, l, m .

Оценим теперь $c_{lm}(a)$ (см. формулы (2.11)). В силу (1.2), (1.3) мы имеем

$$c_{lm}(a) \leq \int_{|r_{lm}| > A} e_{lm} |r_{lm}|^{-\sigma} \tilde{u}_a^2 dr_0[D], \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma = \beta_0, \quad e_{lm} = C_0 & \quad \text{при} \quad 1 \leq l, m \leq k, \\ \sigma = \gamma_0, \quad e_{lm} = e & \quad \text{при} \quad k+1 \leq l, m \leq n, \\ \sigma = \gamma, \quad e_{lm} = -\delta & \quad \text{при} \quad 1 \leq l \leq k, \quad k+1 \leq m \leq n \\ & \quad \text{или} \quad 1 \leq m \leq k, \quad k+1 \leq l \leq n \end{aligned}$$

и $\epsilon > 0$. Делая в интеграле (2.14) замену переменных $\eta = a\xi$, мы получим

$$c_{lm}(a) \leq a^\sigma g_{lm}(a), \quad (2.15)$$

где

$$g_{lm}(a) = \int e_{lm} |ar_{lm}^0 + \eta|^{-\sigma} \varphi^2 \tilde{f}_1^2(\eta) d\eta dr_0[D_j] dr_0[D_s]$$

и

$$|ar_{lm}^0 + \eta|^\sigma \geq a^\sigma A, \quad r_{lm}^0 = r_l^0[D_j] - r_m^0[D_s].$$

В силу следствия II.1 (см. приложение)

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_{lm}(a) = g_{lm}(0) = e_{lm} J_0(\sigma), \quad (2.16)$$

где

$$J_0(\sigma) := \int \tilde{f}_1^2(\eta) |\eta|^{-\sigma} d\eta < +\infty.$$

Поэтому из соотношений (2.15), (2.16) при $\sigma = \gamma$ (т.е. при $\gamma_1 = \gamma$ и $k+1 \leq l, m \leq n$, а также при $1 \leq l \leq k$ и $k+1 \leq m \leq n$) следует неравенство

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow 0} c_{lm}(a) a^{-\gamma} \leq e_{lm} J_0(\gamma), \quad (2.17)$$

а при $\sigma = \beta_0 > \gamma$ (т.е. при $1 \leq l, m \leq k$) и при $\sigma = \gamma_0 > \gamma$ (т.е. при $\gamma_1 > \gamma$ и при $k+1 \leq l, m \leq n$) – равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} c_{lm}(a) a^{-\gamma} = 0. \quad (2.18)$$

Пусть p_j и p_s (k_j и k_s) – числа “протонов” (“нейтронов”) в кластерах D_j и D_s . В силу (2.17), (2.18)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \sum_{\substack{l \in D_j, m \in D_s, \\ 1 \leq l, m \leq k}} c_{l,m}(a) a^{-\gamma} &= 0, \\ \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \sum_{\substack{l \in D_j, m \in D_s, \\ k+1 \leq l, m \leq n}} c_{l,m}(a) a^{-\gamma} &\leq p_s p_j e \delta_{\gamma\gamma_0} J_0(\gamma), \\ \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \sum_{\substack{l \in D_j, m \in D_s, \\ 1 \leq l \leq k, \\ k+1 \leq m \leq n}} c_{lm}(a) a^{-\gamma} &\leq -p_s \delta k_j J_0(\gamma), \\ \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \sum_{\substack{l \in D_j, m \in D_s, \\ k+1 \leq l \leq n, \\ 1 \leq m \leq k}} c_{lm}(a) a^{-\gamma} &\leq -k_s \delta p_j J_0(\gamma). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Поскольку

$$(I_{js} \tilde{u}_a, \tilde{u}_a) = \sum_{\substack{l \in D_j, \\ m \in D_s}} (b_{lm}(a) + c_{lm}(a)),$$

в силу соотношений (2.10), (2.11), (2.13), (2.19) мы имеем

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow 0} (B_{js} \tilde{u}_a, \tilde{u}_a) a^{-\gamma} \leq J_0(\gamma) I_{js},$$

где $L_{js} = ep_s p_j \delta_{\gamma\gamma_0} - \delta(p_j k_s + k_j p_s) < 0$ в силу выбора D_j и D_s . Поэтому в силу (2.7)–(2.9) при малых a

$$(H_0[D]u_a, u_a) \leq \mu_j + \mu_s + \frac{J_0(\gamma)L_{js}a^\gamma}{2} < \mu_j + \mu_s.$$

Таким образом, при $|D_j| \geq 2$, $|D_s| \geq 2$ неравенство (2.5) доказано.

Если же, например, $|D_j| = 1$ и $D_j = \{i_0\}$, то $H_0[D_j] = 0$ и $\xi_j = r_{i_0}$, $r_{i_0}^0 = 0$. Тогда в проведенных выкладках надо положить $\varphi \equiv 1$ и убрать интегрирование по $dr_0[D_j]$. Аналогично следует поступать при $|D_s| = 1$. Лемма доказана.

2.5. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Все определяющие разбиения системы Z_1 устойчивы и состоят из двух кластеров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.1 достаточно доказать, что не существует устойчивых определяющих разбиений $Z_t = (D_1, \dots, D_t)$ на три или большее число кластеров. Предположим, что устойчивое определяющее разбиение Z_t при $t \geq 3$ существует и докажем, что это невозможно. В силу леммы 2.2 можно выбрать кластеры $D_j, D_s \in Z_t$ так, что для них выполняется неравенство (2.2). Пусть $D = D_j \cup D_s$ и разбиение $\hat{Z}_{t-1}$ получается из разбиения Z_t в результате объединения кластеров D_j и D_s в один кластер D . Тогда

$$\inf H_0(\hat{Z}_{t-1}) < \inf H_0(Z_t), \quad (2.20)$$

ибо неравенство (2.20) эквивалентно неравенству $\inf H_0[D] < \inf H_0[D_j] + \inf H_0[D_s]$, которое следует из леммы 2.3. Но неравенство (2.20) не может быть верным, поскольку Z_t – определяющее разбиение, следовательно,

$$\inf H_0(Z_t) = \min_{Z'_l, l \geq 2} \inf H_0(Z'_l) \leq \inf H_0(\hat{Z}_{t-1}).$$

Лемма доказана.

2.6. В этом пункте мы завершим доказательство теоремы 1.1.

Вследствие леммы 2.4 все определяющие разбиения устойчивы и состоят из двух кластеров. Пусть $Z_2 = (D_1, D_2)$ – одно из них. В силу леммы 2.3 для кластеров D_1, D_2 выполняется неравенство $L_{12} < 0$. Пусть N – произвольное натуральное число, а функции $\varphi = \varphi(r_0[D_1])$, $\psi = \psi(r_0[D_2])$ те же, что и в доказательстве леммы 2.3. Пусть $\tilde{h}_l(\xi)$, $l = 1, \dots, N$, – произвольные нормированные гладкие финитные функции с неперекрывающимися носителями, причем $\tilde{h}_l(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leq A_1$. Положим $\tilde{h}_{a,l} = a^{3/2}\tilde{h}_l(a\xi)$ и $\tilde{u}_{a,l} = \varphi\psi\tilde{h}_{a,l}$, $a > 0$. Пусть

$$L_N(a) = \left\{ \omega_a \left| \omega_a = \sum_{l=1}^N d_l \tilde{u}_{a,l}, d_l \in \mathbb{C} \right. \right\}.$$

Покажем, что для всех функций $\omega_a \in L_N(a)$ выполняется неравенство

$$(H_0\omega_a, \omega_a) < \mu \|\omega_a\|^2, \quad (2.21)$$

если $a < \varepsilon$, где число ε не зависит от выбора функции ω_a (число a определяется только функциями $\tilde{h}_l(\xi)$, $l = 1, \dots, N$). Из (2.21) вытекает, что число собственных значений оператора H_0 , лежащих слева от μ , с учетом их кратности не меньше, чем $N = \dim L_N(a)$. Так как N произвольно, теорема 1.1 тем самым будет доказана.

В силу свойств функций $\tilde{h}_{a,l}$ при $l_1 \neq l_2$ выполняется $\supp \tilde{u}_{a,l_1} \cap \supp \tilde{u}_{a,l_2} = \emptyset$, отсюда мы имеем

$$\|\omega_a\|^2 = \sum_{l=1}^N |d_l|^2, \quad (H_0 \omega_a, \omega_a) = \sum_{l=1}^N |d_l|^2 (H_0 \tilde{u}_{a,l}, \tilde{u}_{a,l}). \quad (2.22)$$

Величины $(H_0 \tilde{u}_{a,l}, \tilde{u}_{a,l})$ оцениваем так же, как величину $(H_0[D] \tilde{u}_a, \tilde{u}_a)$ в доказательстве леммы 2.3, заменяя при этом $\tilde{f}_a(\xi)$ на $\tilde{h}_{a,l}(\xi)$. Тогда при достаточно малом a мы получим, что

$$(H_0 \tilde{u}_{a,l}, \tilde{u}_{a,l}) < \mu_1 + \mu_2 = \mu, \quad l = 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

Отсюда и из (2.22) следует (2.21). Теорема 1.1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

3.1. Пусть $D \subseteq Z_1$. Обозначим через $S[D]$ группу перестановок тождественных между собой частиц кластера D и для произвольного разбиения $Z_t = (D_1, \dots, D_t)$ положим

$$\check{S} = \check{S}(Z_t) = \prod_{i=1}^t \otimes S[D_i].$$

Пусть α , а также $\check{\alpha} = \check{\alpha}(Z_t)$ и $\alpha_i = \alpha_i[D_i]$ – произвольные типы неприводимых представлений $D_g^{(\alpha)}$ группы S , а также $D_g^{(\check{\alpha})}$ группы $\check{S}$ и $D_g^{(\alpha_i)}$ группы $S[D_i]$ соответственно. Для любого $\check{\alpha}$ найдутся [5] такие $\alpha_1, \dots, \alpha_t$, что

$$D_g^{(\check{\alpha})} = \prod_{i=1}^t \otimes D_{g_i}^{(\alpha_i)} \quad \text{при} \quad g = g_1 \dots g_t, \quad g_i \in S[D_i]. \quad (3.1)$$

При выполнении равенства (3.1) мы иногда будем писать $\check{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$. Пусть $P_0^{(\alpha_i)}[D_i]$ – проектор в пространстве функций, зависящих от $r_0[D_i]$, на подпространство функций, преобразующихся под действием оператора T_g ,

$$T_g u(r_0[D_i]) = u(g^{-1} r_0[D_i]), \quad g \in S[D_i],$$

по представлению типа α_i . Здесь и всюду далее перестановки g^{-1} действуют на “абсолютные” координаты частиц r_l , в рассматриваемом случае – частиц из D_i . Но так как $r_l^0 = r_l - \sum_{p \in D_i} m_p r_p / M[D_i]$, это эквивалентно применению g^{-1} к относительным координатам r_l^0 . Отметим также, что функция u может зависеть и от других аргументов (кроме $r_0[D_i]$), но g^{-1} действует только на $r_l \in D_i$.

Пусть $H_0^{(\alpha_i)}[D_i] = P_0^{(\alpha_i)} H_0[D_i]$. При выполнении равенства (3.1) положим

$$H_0^{(\check{\alpha})}(Z_t) = \sum_{i=1}^t \oplus H_0^{(\alpha_i)}[D_i]. \quad (3.2)$$

Пусть S' , S'' – произвольные подгруппы группы $S[Z_1]$, $S'' \subseteq S'$, и α' , α'' – типы неприводимых представлений этих групп. Мы будем писать $\alpha'' < \alpha'$, если неприводимое представление типа α'' группы S'' содержится в неприводимом представлении типа α' группы S' после сужения его на S'' . Согласно теореме ХВЖ [1]–[3] нижняя грань $\mu^{(\alpha)}$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_0^{(\alpha)})$ оператора $H_0^{(\alpha)}$ есть

$$\mu^{(\alpha)} = \min_{Z_2} \min_{\check{\alpha} < \alpha} \inf H_0^{(\check{\alpha})}(Z_2),$$

где $\check{\alpha} = \check{\alpha}(Z_2)$.

Разбиение Z_t , $t \geq 2$, назовем $\check{\alpha}$ -определяющим, если найдется $\check{\alpha} = \check{\alpha}(Z_t)$, $\check{\alpha} < \alpha$, такое, что

$$\inf H_0^{(\check{\alpha})}(Z_t) = \mu^{(\alpha)}. \quad (3.3)$$

Разбиение Z_t назовем $\check{\alpha}$ -устойчивым, если дискретный спектр $\sigma_d(H_0^{(\check{\alpha})}(Z_t))$ оператора $H_0^{(\check{\alpha})}(Z_t)$ не пуст, или если $H_0^{(\check{\alpha})}(Z_t) = 0$.

Кластер D_i назовем α_i -устойчивым, если для $\alpha_i = \alpha_i[D_i]$ дискретный спектр $\sigma_d(H_0^{(\alpha_i)}[D_i])$ оператора $H_0^{(\alpha_i)}[D_i]$ не пуст, или если $|D_i| = 1$ (т.е. $H_0[D_i] \equiv 0$). При $\check{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ в силу соотношения (3.2) $\check{\alpha}$ -устойчивость разбиения Z_t равносильна α_i -устойчивости кластеров D_i для всех $i = 1, \dots, t$, т.е. равносильна выполнению условий

$$\sigma_d(H_0^{(\alpha_i)}[D_i]) \neq \emptyset, \quad |D_i| \geq 2, \quad (3.4)$$

для всех $i = 1, \dots, t$.

ЛЕММА 3.1. *Если $\check{\alpha}$ -определяющее разбиение Z_t не является $\check{\alpha}$ -устойчивым, $\check{\alpha} = \check{\alpha}(Z_t) < \alpha$, то найдутся такое разбиение Z'_{t_0} с $t_0 > t$ и такой тип $\check{\alpha}' = \check{\alpha}'(Z'_{t_0}) < \alpha$, что разбиение Z'_{t_0} является $\check{\alpha}'$ -определяющим и $\check{\alpha}'$ -устойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем канве доказательства леммы 2.1, но на каждом шаге учитываем симметрию. Пусть $\check{\alpha}$ -определяющее разбиение Z_t не является $\check{\alpha}$ -устойчивым, $\check{\alpha} = \check{\alpha}(Z_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$. Тогда вследствие условий (3.4) найдется кластер D_i , $|D_i| \geq 2$, такой, что $\sigma_d(H_0^{(\alpha_i)}[D_i]) = \emptyset$. Применяя теорему ХВЖ к оператору $H_0^{(\alpha_i)}[D_i]$, получаем, что найдется такое разбиение $Z_2[D_i] = (D_{i_1}, D_{i_2})$ кластера D_i , $D_{i_1} \cap D_{i_2} = \emptyset$, $D_{i_1} \cup D_{i_2} = D_i$, и такие типы α_{i_1} , α_{i_2} неприводимых представлений групп $S[D_{i_1}]$ и $S[D_{i_2}]$, что

$$\inf H_0^{(\alpha_i)}[D_i] = \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H_0^{(\alpha_i)}[D_i]) \} = \sum_{s=1}^2 \inf H_0^{(\alpha_{i_s})}[D_{i_s}] \quad (3.5)$$

и $\check{\alpha}(Z_2[D_i]) = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) < \alpha_i$. В силу (3.2), (3.3) и (3.5) для разбиения

$$Z_{t+1}^{(1)} = (D_1, \dots, D_{i-1}, D_{i_1}, D_{i_2}, D_{i+1}, \dots, D_t)$$

и типа

$$\check{\alpha}^{(1)} = \alpha(Z_{t+1}^{(1)}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_t)$$

неприводимого представления группы

$$S(Z_{t+1}^{(1)}) = S[D_1] \times \dots \times S[D_{i-1}] \times S[D_{i_1}] \times S[D_{i_2}] \times S[D_{i+1}] \times \dots \times S[D_t]$$

выполняется равенство $\inf H_0^{(\check{\alpha}^{(1)})}(Z_{t+1}^{(1)}) = \mu^{(\alpha)}$, т.е. $Z_{t+1}^{(1)}$ есть $\check{\alpha}^{(1)}$ -определяющее разбиение. Если разбиение $Z_{t+1}^{(1)}$ не является $\check{\alpha}^{(1)}$ -устойчивым, то мы для этого разбиения и типа $\check{\alpha}^{(1)} = \check{\alpha}(Z_{t+1}^{(1)})$ проведем те же рассуждения, что были применены к разбиению Z_t и типу $\check{\alpha}(Z_t)$. Тогда мы получим некоторое разбиение $Z_{t+2}^{(2)}$ и тип симметрии $\check{\alpha}^{(2)} = \check{\alpha}(Z_{t+2}^{(2)})$, $\check{\alpha}^{(2)} < \alpha$, такие, что $\inf H_0^{(\check{\alpha}^{(2)})}(Z_{t+2}^{(2)}) = \mu^{(\alpha)}$. Если $\check{\alpha}^{(2)}$ -определяющее разбиение $Z_{t+2}^{(2)}$ не является $\check{\alpha}^{(2)}$ -устойчивым, то, продолжая действовать так же, как и ранее, мы в итоге придем к такому разбиению Z'_{t_0} , которое будет $\check{\alpha}'$ -определяющим и $\check{\alpha}'$ -устойчивым для некоторого типа симметрии $\check{\alpha}' = \check{\alpha}'(Z'_{t_0}) < \alpha$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *При наличии $\check{\alpha}$ -определяющего разбиения Z_t , не являющегося $\check{\alpha}$ -устойчивым, $\check{\alpha} < \alpha$, найдется $\check{\alpha}'$ -определяющее $\check{\alpha}'$ -устойчивое разбиение Z'_{t_0} не менее чем на три кластера, $\check{\alpha}'(Z'_{t_0}) < \alpha$.*

3.2. Пусть $D_j, D_s \subset Z_1$, где $D_j \cap D_s = \emptyset$, $D = D_j \cup D_s$; пусть $\alpha_j = \alpha_j[D_j]$ и $\alpha_s = \alpha_s[D_s]$ – типы неприводимых представлений групп $S[D_j]$ и $S[D_s]$, а $\alpha_{js} = (\alpha_j, \alpha_s)$ – тип неприводимого представления группы $S_{js} = S[D_j] \times S[D_s]$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть кластеры D_j и D_s соответственно α_j - и α_s -устойчивы, пусть α_D – любой тип неприводимого представления группы $S_D = S[D]$, для которого $\alpha_{js} < \alpha_D$. Тогда если для кластеров D_j и D_s выполняется неравенство (2.2), то*

$$\inf H_0^{(\alpha_D)}[D] < \inf H_0^{(\alpha_j)}[D_j] + \inf H_0^{(\alpha_s)}[D_s]. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_i = \varphi_i(r_0[D_j])$, $i = 1, \dots, l_1$, и $\psi_m = \psi_m(r_0[D_s])$, $m = 1, \dots, l_2$, – соответственно канонические ортонормированные базисы представлений типов α_j и α_s в собственных подпространствах операторов $H_0^{(\alpha_j)}[D_j]$ и $H_0^{(\alpha_s)}[D_s]$, отвечающих их наименьшим собственным значениям $\nu_j = \inf H_0^{(\alpha_j)}[D_j]$ и $\nu_s = \inf H_0^{(\alpha_s)}[D_s]$. Как известно [5], функции $\varphi_i \psi_m$, $i = 1, \dots, l_1$, $m = 1, \dots, l_2$, образуют канонический базис представления типа α_{js} группы S_{js} . Пусть α_D – тип неприводимого представления группы S_D , для которого $\alpha_{js} < \alpha_D$. Обозначим через $\widehat{S}_{js}$ подгруппу группы S_D , порожденную перестановками группы S_{js} и перестановкой кластеров $D_j \leftrightarrow D_s$, если они тождественны (если кластеры не тождественны, то $\widehat{S}_{js} = S_{js}$). Положим $u_a = \varphi_1 \psi_1 \tilde{f}_a(\xi)$, где функция $\tilde{f}_a(\xi)$ та же, что в п. 2.4. Согласно работам [1], [2] можно выбрать четность функции $\tilde{f}_a(\xi)$ относительно инверсии $\xi \rightarrow -\xi$ так, что будет выполнено равенство

$$P_0^{(\alpha_D)} u_a = d_0 u_a + \omega_a(r_0[D]), \quad (3.7)$$

где

$$\omega_a(r_0[D]) = d_1 \sum_{g \in S_D \setminus \widehat{S}_{js}} \bar{\chi}_g^{(\alpha_D)} T_g u_a,$$

$\chi_g^{(\alpha_D)}$ – характер перестановки $g \in S_D$ в представлении типа α_D и $d_0 > 0$, $d_1 > 0$ – некоторые константы, не зависящие от a .

В силу следствия [П.2](#) (см. приложение) выполняется равенство $\lim_{a \rightarrow 0} (u_a, \omega_a) = 0$, поэтому для функции $\Phi_a := P_0^{(\alpha_D)}[D]u_a$ при $a \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$\|\Phi_a\|^2 = (\Phi_a, \Phi_a) = (u_a, P_0^{(\alpha_D)}u_a) = d_0\|u_a\|^2 + d_0(u_a, \omega_a) \rightarrow d_0.$$

Используя равенство [\(2.6\)](#) и свойства проектора $P_0^{(\alpha_D)}$, запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (H_0[D]\Phi_a, \Phi_a) &= (H_0[D]u_a, \Phi_a) = \nu_j(u_a, \Phi_a) + \nu_s(u_a, \Phi_a) + (B_{js}u_a, \Phi_a) = \\ &= \nu_j\|\Phi_a\|^2 + \nu_s\|\Phi_a\|^2 + (B_{js}u_a, d_0u_a) + (B_{js}u_a, \omega_a). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценка формы $(B_{js}u_a, u_a)$ проводится так же, как в лемме [2.3](#). В результате получим, что

$$d_0(B_{js}u_a, u_a) \leq \frac{d_0 J_0(\gamma) L_{js} a^\gamma}{2}, \quad (3.9)$$

где $L_{js} < 0$ вследствие неравенства [\(2.2\)](#), примененного по условию леммы [3.2](#). Оценка величины $(B_{js}u_a, \omega_a)$ дана в приложении (см. лемму [П.3](#)), из нее следует, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} (B_{js}u_a, \omega_a) a^{-\gamma} = 0. \quad (3.10)$$

В силу соотношений [\(3.8\)](#)–[\(3.10\)](#) при малых a выполняется неравенство

$$\frac{(H_0[D]\Phi_a, \Phi_a)}{\|\Phi_a\|^2} \leq (\nu_j + \nu_s) + \frac{J_0(\gamma) L_{js} a^\gamma}{3}$$

и, следовательно, $(H_0[D]\Phi_a, \Phi_a) < (\nu_j + \nu_s)\|\Phi_a\|^2$ при малых a . Отсюда вытекает утверждение леммы.

3.3. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. Пусть тип представления α произволен. Любое разбиение Z_t системы Z_1 , являющееся $\check{\alpha}$ -определяющим для какого-либо $\check{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) < \alpha$, есть $\check{\alpha}$ -устойчивое разбиение на два кластера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы [3.1](#) достаточно доказать, что если выполнено условие $\check{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) < \alpha$, то не существует $\check{\alpha}$ -определяющего $\check{\alpha}$ -устойчивого разбиения Z_t при $t \geq 3$. Предположим, что такое разбиение существует, и рассмотрим разбиение Z_{t-1}^+ , полученное из Z_t объединением тех кластеров D_j и D_s , для которых выполняется неравенство [\(2.2\)](#) (существование таких кластеров в разбиении Z_t обеспечивается леммой [2.2](#)). Переобозначая номера кластеров, считаем, что $j = t-1$, $s = t$. Тогда, очевидно, $Z_{t-1}^+ = \{D_1, \dots, D_{t-2}, D_{t-1}^+\}$, где $D_{t-1}^+ = D_{t-1} \cup D_t$. Так как $t \geq 3$, можно утверждать, что Z_{t-1}^+ есть разбиение не меньше чем на два кластера. Поскольку $\check{\alpha} < \alpha$, найдется такой тип α_{t-1}^+ неприводимого представления группы $S[D_{t-1}^+]$, что $\alpha_{t-1,t} := (\alpha_{t-1}, \alpha_t) < \alpha_{t-1}^+$ и $\check{\alpha} < \check{\alpha}^+ = (\alpha_1, \dots, \alpha_{t-2}, \alpha_{t-1}^+) < \alpha$.

Имеем

$$H_0^{(\check{\alpha}^+)}(Z_{t-1}^+) = \sum_{i=1}^{t-2} H_0^{(\alpha_i)}[D_i] + H_0^{(\alpha_{t-1}^+)}[D_{t-1}^+]$$

и

$$\inf H_0^{(\check{\alpha}^+)}(Z_{t-1}^+) = \sum_{i=1}^{t-2} \inf H_0^{(\alpha_i)}[D_i] + \inf H_0^{(\alpha_{t-1}^+)}[D_{t-1}^+]. \quad (3.11)$$

Но в силу леммы 3.2

$$\inf H_0^{(\alpha_{t-1}^+)}[D_t^+] < \inf H_0^{(\alpha_{t-1})}[D_{t-1}] + \inf H_0^{(\alpha_t)}[D_t],$$

поэтому из (3.11) следует неравенство

$$\inf H_0^{(\check{\alpha}^+)}(Z_{t-1}^+) < \inf H^{(\check{\alpha})}[Z_t],$$

которое не может быть верным, ибо разбиение Z_t является $\check{\alpha}$ -определяющим. Таким образом, наше предположение $t \geq 3$ ошибочно, и лемма доказана.

3.4. Приведем доказательство теоремы 1.2. В силу леммы 3.3 найдутся разбиение $Z_2 = (D_1, D_2)$ и тип неприводимого представления $\alpha_{12} = (\alpha_1, \alpha_2)$ группы $S_{12} = S[D_1] \times S[D_2]$, $\alpha_{12} < \alpha$, такие, что Z_2 есть α_{12} -определяющее α_{12} -устойчивое разбиение. Тогда вследствие леммы 3.2 при $D_j = D_1$, $D_s = D_2$ и $D_{12}^+ = D_1 \cup D_2 = Z_1$ мы получаем, что

$$\inf H_0^{(\alpha)} < \mu^{(\alpha)} = \inf H_0^{(\alpha_1)}[D_1] + \inf H_0^{(\alpha_2)}[D_2],$$

следовательно, $\sigma_d(H_0^{(\alpha)}) \neq \emptyset$.

Докажем, что спектр $\sigma_d(H_0^{(\alpha)})$ бесконечен. Для этого достаточно построить для произвольного N такое N -мерное линейное пространство Φ_N , на каждой функции Φ из которого выполняется неравенство $(H_0^{(\alpha)}\Phi, \Phi) < \mu^{(\alpha)}\|\Phi\|^2$.

Положим $\tilde{u}_{a,l} = \varphi_1\psi_1\tilde{h}_{a,l}(\xi)$, где $\tilde{h}_{a,l}(\xi) = a^{3/2}\tilde{h}_l(\xi)$ и функции $\tilde{h}_l(\xi)$, $l = 1, \dots, N$, те же, что в п. 2.6, но с “подходящей” четностью относительно инверсии $\xi \rightarrow -\xi$ (см. п. 3.2). Пусть $v_{a,l} = P_0^{(\alpha)}\tilde{u}_{a,l}$ и

$$L_N(a) = \mathcal{L}\{v_{a,1}, \dots, v_{a,N}\} = \left\{ \Phi_a \mid \Phi_a = \sum_{l=1}^N c_l v_{a,l}, c_l \in \mathbb{C} \right\}.$$

Покажем, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $a < \varepsilon$ функции $v_{a,l}$, $l = 1, \dots, N$, линейно независимы и для любой $\Phi_a \in L_N(a)$ выполняется неравенство

$$(H_0\Phi_a, \Phi_a) < \mu^{(\alpha)}\|\Phi_a\|^2, \quad (3.12)$$

причем при фиксированном N число ε не зависит от выбора $\Phi_a \in L_N(a)$ (т.е. от чисел $c_1, \dots, c_N$). Отсюда и будет следовать утверждение теоремы 1.2.

К сожалению, мы не можем утверждать, что $\text{supp } v_{a,l} \cap \text{supp } v_{a,l'} = \emptyset$ при $l \neq l'$, хотя соотношение $\text{supp } u_{a,l} \cap \text{supp } u_{a,l'} = \emptyset$ при $l \neq l'$ верно в силу выбора функции $\tilde{h}_l(\xi)$, поэтому техническая часть доказательства теоремы 1.2 существенно сложнее, чем соответствующая часть доказательства теоремы 1.1.

Пусть $F_a = \sum_{l=1}^N c_l \tilde{u}_{a,l}$. Очевидно, $\Phi_a = P_0^{(\alpha)}F_a$ и

$$(H_0\Phi_a, \Phi_a) = (H_0F_a, P_0^{(\alpha)}F_a). \quad (3.13)$$

Вследствие соотношения (3.7) с $\alpha_D = \alpha$

$$P_0^{(\alpha)}F_a = d_0F_a + \sum_{l=1}^N c_l \omega_{a,l}, \quad (3.14)$$

где

$$\omega_{a,l} = d_1 \sum_{g \in D \setminus \widehat{S}_{12}} \bar{\chi}_g^{(\alpha)} T_g \tilde{u}_{a,l}.$$

В силу (2.6)

$$H_0 F_a = \sum_{l=1}^N (\nu_1 + \nu_2) c_l \tilde{u}_{a,l} + \sum_{l=1}^N B_{12} c_l \tilde{u}_{a,l},$$

поэтому

$$\begin{aligned} (H_0 F_a, P_0^{(\alpha)} F_a) &= \mu^{(\alpha)} \left(\sum_{l=1}^N c_l \tilde{u}_{a,l}, P_0^{(\alpha)} F_a \right) + \sum_{l=1}^N (B_{12} c_l \tilde{u}_{a,l}, d_0 F_a) + \\ &+ \left(\sum_{l=1}^N B_{12} c_l \tilde{u}_{a,l}, \sum_{l'=1}^N c_{l'} \omega_{a,l'} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Очевидно,

$$\left(\sum_{l=1}^N c_l \tilde{u}_{a,l}, P_0^{(\alpha)} F_a \right) = (P_0^{(\alpha)} F_a, P_0^{(\alpha)} F_a) = \|\Phi_a\|^2. \quad (3.16)$$

Поскольку $\text{supp } \tilde{u}_{a,l} \cap \text{supp } \tilde{u}_{a,l'} = \emptyset$ при $l \neq l'$, при малых a независимо от выбора чисел c_l в силу неравенства (3.9)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=1}^N B_{12} c_l \tilde{u}_{a,l}, d_0 F_a \right) &= d_0 \sum_{l=1}^N |c_l|^2 (B_{12} \tilde{u}_{a,l}, \tilde{u}_{a,l}) \leq \\ &\leq d_0 L_{12} \frac{a^\gamma}{2} \|F\|^2 \leq d_0 L_{12} \frac{a^\gamma}{2} \|\Phi_0\|^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$L_{12} < 0, \quad \|F_a\|^2 = \sum_{l=1}^N |c_l|^2 \geq \|\Phi_a\|^2, \quad \Phi_a = P_0^{(\alpha)} F_a.$$

Теперь нам остается оценить в правой части (3.15) только величину

$$W(a) := \sum_{l,l'=1}^N c_l \bar{c}_{l'} (B_{12} \tilde{u}_{a,l}, \omega_{a,l'}) = \sum_{l,l'=1}^N c_l \bar{c}_{l'} d_1 \sum_{g \in S \setminus \widehat{S}_{12}} \bar{\chi}_g^{(\alpha)} (B_{12} \tilde{u}_{a,l}, T_g \tilde{u}_{a,l'}). \quad (3.18)$$

В силу леммы П.3 (см. приложение) выполняются равенства

$$\lim_{a \rightarrow 0} (B_{12} \tilde{u}_{a,l}, T_g \tilde{u}_{a,l'}) a^{-\gamma} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0} (\tilde{u}_{a,l}, T_g \tilde{u}_{a,l'}) = 0. \quad (3.19)$$

С учетом (3.14), (3.16), (3.18) (3.19) получаем, что при малых a

$$\|\Phi_a\|^2 = d_0 \|F_a\|^2 + d_1 \sum_{l,l'=1}^N c_l \bar{c}_{l'} \sum_{g \in S \setminus \widehat{S}_{12}} \bar{\chi}_g^{(\alpha)} (\tilde{u}_{a,l}, T_g \tilde{u}_{a,l'}) \geq \frac{d_0}{2} \|F_a\|^2 \quad (3.20)$$

и

$$\frac{|W(a)|}{\|\Phi_a\|^2} \leq c a^\gamma \varepsilon(a), \quad (3.21)$$

где c – константа, не зависящая от g , a , l , и $\varepsilon(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$ равномерно относительно g , c_l . Выберем a столь малым, чтобы было выполнено неравенство

$$|W(a)| \leq \frac{1}{4} \|\Phi_a\|^2 a^\gamma d_0 |L_{12}|. \quad (3.22)$$

Из формул (3.13)–(3.22) следует, что если a достаточно мало, то при любом Φ_a

$$(H_0^{(\alpha)} \Phi_a, \Phi_a) = (H_0 \Phi_a, \Phi_a) \leq \left(\mu^{(\alpha)} + d_0 L_{12} \frac{a^\gamma}{4} \right) \|\Phi_a\|^2 < \mu^{(\alpha)} \|\Phi_a\|^2,$$

и оценка (3.12) доказана. Линейная независимость функций $v_{a,l}$, $l = 1, \dots, N$, следует из неравенства (3.20). Теорема 1.2 доказана полностью.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем некоторые оценки, использованные в разделах 2, 3. Всюду далее

$$\begin{aligned} D_j, D_s \in Z_1, \quad D_j \cap D_s = \emptyset, \quad D = D_j \cup D_s, \\ \varphi = \varphi(r_0[D_j]) \in \mathcal{L}_2(R_0[D_j]), \quad \psi = \psi(r_0[D_s]) \in \mathcal{L}_2(R_0[D_s]) \end{aligned}$$

и $f_1(\eta)$ – гладкая финитная вещественная функция, $\eta \in \mathbb{R}^3$, причем существует $A_1 > 1$ такое, что $f_1(\eta) \equiv 0$ при $|\eta| \leq A_1$. Для $l \in D_j$, $m \in D_s$ и $a > 0$ положим $r_{l,m}^0 = r_l^0[D_j] - r_m^0[D_s]$ и $p(a) = |ar_{l,m}^0 + \eta|$.

П.1. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА П.1. Пусть

$$\begin{aligned} J(w) &= \int \frac{f_1^2(\eta)}{|\eta + w|^{\sigma_1}} d\eta, \quad w \in \mathbb{R}^3, \\ J_1(a) &= \int \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D], \quad 0 < \sigma_1 < 3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sup_w J(w) < +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow 0} J(a) = J_1(0) = J(0). \quad (\text{П.1})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_- = \{\eta \mid |\eta + w| \leq 1\}$ и $B_+ = \{\eta \mid |\eta + w| > 1\}$. Тогда

$$J_+(w) := \int_{B_+} \frac{f_1^2(\eta)}{|\eta + w|^{\sigma_1}} d\eta \leq \int f_1^2(\eta) d\eta. \quad (\text{П.2})$$

Далее, полагая $\eta_0 = \eta + w$, имеем

$$J_-(w) := \int_{B_-} \frac{f_1^2(\eta)}{|\eta + w|^{\sigma_1}} d\eta \leq c_f \int_{|\eta_0| \leq 1} |\eta_0|^{-\sigma_1} d\eta_0, \quad (\text{П.3})$$

где $c_f = \max_\eta |f_1(\eta)|$. Из (П.2) и (П.3) следует первое соотношение в (П.1).

При каждом $R > 0$ положим

$$G(R) = \{r_0[D] \mid |r_{lm}^0| \geq R\}, \quad G_i(R) = \{r_0[D] \mid |r_i^0| \geq R/2\}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{G(R)} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D] &\leq \int_{G_l(R)} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D] + \\ &+ \int_{G_m(R)} |\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2 p(a)^{-\sigma_1} dr_0[D]. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Используем первое соотношение в (П.1) при $w = ar_{lm}^0$, тогда при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется $R > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{G_l(R)} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D] &\leq \int_{|r_l^0| \geq R/2} |\varphi|^2 |\psi|^2 J(w) dr_0[D_s] dr_0[D_j] \leq \varepsilon_1, \\ \int_{G_m(R)} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D] &\leq \int_{|r_m^0| \geq R/2} |\varphi|^2 |\psi|^2 J(w) dr_0[D_s] dr_0[D_j] \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Пусть $G_-(R) = R_0[D] \setminus G(R)$. Тогда, очевидно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{G_-(R)} |p(a)^{-\sigma} - p(0)^{-\sigma}| |\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2 dr_0[D] = 0, \quad (\text{П.6})$$

ибо $p(a)^{-\sigma} - p(0)^{-\sigma} \rightarrow 0$ равномерно по $\eta \in \text{supp } f_1(\eta)$ и r_{lm}^0 , $|r_{lm}^0| \leq R$. Из оценок (П.4), (П.5) и равенства (П.6) вытекает второе соотношение в (П.1).

СЛЕДСТВИЕ П.1. *Поскольку для любого $A > 0$*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{p(a) \leq aA} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 f_1^2}{p(a)^{\sigma_1}} dr_0[D] = 0,$$

наряду со вторым соотношением в (П.1) выполняется равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{p(a) \geq aA} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2}{p(a)^{\sigma}} f_1^2 du = J(0).$$

Рассмотрим разбиение $Z_2[D] = (D_j, D_s)$ системы $D = D_j \cup D_s$ на кластеры D_j и D_s . Для определенности считаем, что $|D_j| \geq |D_s|$. Пусть g – произвольная фиксированная перестановка из $S[D] \setminus \hat{S}_{js}$ (см. п. 3.2). Положим $Z'_2[D] = gZ_2[D] = (D'_j, D'_s)$. Пусть ξ_i и ξ'_i – радиус-векторы центров масс подсистем D_i и D'_i , $i = j, s$, и $\xi = \xi_j - \xi_s$, $\xi' = \xi'_j - \xi'_s$. Пусть $\varphi = \varphi(r_0[D_j])$, $\psi = \psi(r_0[D_s])$ и $\varphi' = \varphi'(r_0[D'_j])$, $\psi' = \psi'(r_0[D'_s])$ – произвольные функции соответственно из $\mathcal{L}_2(R_0[D_j])$, $\mathcal{L}_2(R_0[D_s])$ и $\mathcal{L}_2(R_0[D'_j])$, $\mathcal{L}_2(R_0[D'_s])$. Введем обозначения $u = \varphi\psi$, $v = \varphi'\psi'$.

П.2. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА П.2. *Пусть $\tilde{f}_m(\xi)$, $\tilde{h}_m(\xi')$ – произвольные последовательности нормированных функций и*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_m(\xi)\|_{|\xi| \leq R} = 0 \quad (\text{П.7})$$

при всех $R > 0$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (u\tilde{f}_m, v\tilde{h}_m) = 0. \quad (\text{П.8})$$

Заметим, что ранее в работе [1] было приведено доказательство равенства, совершенно аналогичного нашему равенству (П.8) (см. равенство (П.6) в [1]). Однако и авторы работы [1] (один из которых, А. Г. Сигалов, был смертельно болен), и я, прочитавший по просьбе авторов статью [1] в рукописи, не заметили существенную ошибку в доказательстве равенства (П.6) в работе [1]¹⁾, вследствие чего ссылка на работу [1] невозможна, а само равенство (П.6) в работе [1] надо доказывать заново. В приводимых ниже рассуждениях мы используем несколько иной по сравнению с работой [1] подход, который, пожалуй, ближе к подходу работы [2]. Однако ссылка на статью [2] также не может нам помочь, ибо в [2] использовалась неинвариантная по отношению к перестановкам тождественных частиц форма записи гамильтониана, что крайне неудобно при учете перестановочной симметрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M_j \xi_j + M_s \xi_s = 0$ и $M_j \xi'_j + M_s \xi'_s = 0$, мы имеем²⁾

$$\xi = \xi_j - \xi_s = \xi_j + \frac{M_j}{M_s} \xi_j = \frac{M[D]}{M_s} \xi_j, \quad \xi' = \frac{M[D]}{M_s} \xi'_j. \quad (\text{П.9})$$

Полагая

$$f_m(\xi_j) = \tilde{f}_m\left(\frac{M[D]}{M_s} \xi_j\right), \quad h_m(\xi'_j) = \tilde{h}_m\left(\frac{M[D]}{M_s} \xi'_j\right),$$

мы можем переписать доказываемое равенство (П.8) в виде

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (u f_m, v h_m) = 0.$$

Пусть $R \gg 1$ и

$$\Omega_-(R) = \{r \mid r \in R_0[D], |\xi_j| \leq R\}, \quad \Omega_+(R) = \{r \mid r \in R_0[D], |\xi_j| > R\}. \quad (\text{П.10})$$

В силу (П.7) при $m \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{\Omega_-(R)} u f_m v h_m dr_0[D] \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega_-(R)} |u|^2 |f_m(\xi_j)|^2 dr_0[D]} \sqrt{\int_{R_0[D]} |v|^2 h_m^2 dr'_0[D]} \rightarrow 0. \quad (\text{П.11})$$

Положим $D_{kj} = D_k \cap D'_j$, $k = j, s$. Легко видеть, что $D_{jj} \neq \emptyset$. Действительно, поскольку по предположению $|D_j| \geq |D_s|$, поэтому множество D_{jj} может быть пустым лишь в случае $D'_j = D_s$, а это, в свою очередь, возможно только в случае, когда кластеры D_j и D_s тождественны и g есть какая-либо перестановка $D_j \leftrightarrow D_s$.

¹⁾В работе [1] (см. с. 92, 5-я и 6-я строки сверху) использовано следующее утверждение: если для некоторого разбиения $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ минимальный из модулей радиус-векторов центров масс подсистем C_1, C_2 больше A , а максимальный из модулей относительных координат частиц из C_1, C_2 меньше B , то тем же свойством обладает разбиение $gZ_2 = \{C'_1, C'_2\}$ для любого $g \in S[Z_1] \setminus \hat{S}(Z_2)$. Но это неверно. Действительно, пусть, например, $Z_1 = (1, 2, 3, 4)$ – система тождественных частиц, $C_1 = (1, 2)$, $C_2 = (3, 4)$. Рассмотрим в пространстве $R_0[Z_1]$ область, где $|r_1 - r_2| \leq \varepsilon$, $|r_3 - r_4| \leq \varepsilon$, $|r_i| > A \gg 1$. Тогда для Z_2 модули относительных координат частиц из C_1 и C_2 малы, а модули радиус-векторов центров масс подсистем C_1, C_2 велики. После перестановки $r_2 \leftrightarrow r_3$ мы получим $gZ_2 = \{C'_1, C'_2\}$, $C'_1 = (1, 3)$, $C'_2 = (2, 4)$, и ситуация меняется на противоположную по сравнению с Z_2 : модули радиус-векторов центров масс подсистем C'_1, C'_2 будут малы, а модули относительных координат частиц из C'_1 и C'_2 – велики.

²⁾Здесь мы используем тот факт, что $M_j = M[D_j] = M[D'_j]$ и $M_s = M[D_s] = M[D'_s]$, ибо перестановки тождественных частиц не меняют массы кластеров.

Но такая перестановка не принадлежит множеству $S[D] \setminus \widehat{S}(Z_2[D])$, следовательно, $D_{jj} \neq \emptyset$.

Пусть $i \in D_{jj}$. Так как $i \in D'_j$, справедливо равенство

$$r_i^{0'} = r_i - \xi'_j = r_i^0[D_j] + \xi_j - \xi'_j. \quad (\text{П.12})$$

Поскольку $D'_j = D_{jj} \cup D_{sj}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \xi'_j &= \sum_{t \in D'_j} \frac{m_t r_t}{M_j} = \sum_{t \in D_{jj}} \frac{m_t r_t}{M_j} + \sum_{t \in D_{sj}} \frac{m_t r_t}{M_j} = \\ &= \sum_{t \in D_{jj}} \frac{r_t - \xi_j}{M_j} + \frac{\widehat{M}_{jj} \xi_j}{M_j} + \sum_{t \in D_{sj}} \frac{r_t - \xi_s}{M_j} + \frac{\widehat{M}_{sj} \xi_s}{M_j} = \\ &= \rho_j + \rho_s + \left(\frac{\widehat{M}_{jj} M_s - \widehat{M}_{sj} M_j}{M_j M_s} \right) \xi_j, \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

где

$$\rho_j = \frac{1}{M_j} \sum_{t \in D_{jj}} m_t r_t^0[D_j], \quad \rho_s = \frac{1}{M_s} \sum_{t \in D_{sj}} m_t r_t^0[D_s]$$

и $\widehat{M}_{i_1 s}$ — масса кластера $D_{i_1 s}$, $i_1 = j, s$.

Используя соотношения (П.12), (П.13), получаем

$$r_i^{0'} = r_i^0[D_j] - \rho_j - \rho_s + M_0 \xi_j, \quad (\text{П.14})$$

где $M_0 = \widehat{M}_{sj} M[D] / M_j M_s > 0$.

Введем множества

$$\begin{aligned} E_t(R) &= \{r \mid r \in R_0[D], \quad |r_t^0| \geq M_0 R/8, \quad |\xi_j| \geq R\}, \\ E'_i(R) &= \{r \mid r \in R_0[D], \quad |r_i^0| \geq M_0 R/2, \quad |\xi_j| \geq R\}. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Пусть $r \in \Omega_+(R)$. Если $|r_i^0[D_j] - \rho_j - \rho_s| \leq RM_0/2$, то в силу (П.14) $r \in E'_i(R)$. Если же $|r_i^0[D_j] - \rho_j - \rho_s| \geq RM_0/2$, то найдется $t \in D_j$, зависящее от r , такое, что $r \in E_t(R)$.

Из полученных соотношений следует, что

$$\Omega_+(R) \subseteq E'_i(R) \cup \left(\bigcup_{t \in D_j} E_t(R) \right). \quad (\text{П.16})$$

С помощью (П.16) мы легко можем оценить величину $(uf_m, vh_m)_{\Omega_+(R)}$. Так как $u \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$, $v \in \mathcal{L}_2(R_0(Z'_2))$, для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти $R > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |(uf_m, vh_m)_{E_t(R)}| &\leq \|uf_m\|_{E_t(R)} \|vh_m\| \leq \varepsilon_1, \\ |(uf_m, vh_m)_{E'_i(R)}| &\leq \|uf_m\| \|vh_m\|_{E'_i(R)} \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

В силу (П.16) получаем, что $|(uf_m, vh_m)_{\Omega_+(R)}| \leq n\varepsilon_1$. Из формул (П.11), (П.17) следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ П.2. Пусть $a > 0$, $\tilde{f}_1(\xi)$ и $\tilde{h}_1(\xi')$ – гладкие функции, равные нулю при $|\xi|, |\xi'| \notin [A_1, A_2]$ для некоторых $A_2 > A_1 > 0$. Тогда для последовательностей $\tilde{f}_a(\xi) := a^{3/2}\tilde{f}_1(a\xi)$ и $\tilde{h}_a(\xi') := a^{3/2}\tilde{h}_1(a\xi')$ при $a \rightarrow 0$ выполняется равенство (П.8).

Данное утверждение вытекает из условия (П.7), поскольку $\tilde{f}_a(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leq R$ и $aR < A_1$.

П.3. Пусть кластеры D_j , D_s и функции B_{js} , φ , ψ , φ' , ψ' , $\tilde{f}_a$, $\tilde{h}_a$ те же и с теми же аргументами, что в лемме П.2 и в следствии из нее. Пусть $\tilde{u}_a = \varphi\psi\tilde{f}_a$ и $\tilde{v}_a = \varphi'\psi'\tilde{h}_a$.

ЛЕММА П.3. Имеет место равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} (B_{js}\tilde{u}_a, \tilde{v}_a)a^{-\gamma} = 0. \quad (\text{П.18})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (П.9) $\tilde{u}_a = u_a := \varphi\psi f_a$ и $\tilde{v}_a = v_a := \varphi'\psi' h_a$, где

$$\begin{aligned} f_a &= f_a(\xi_j) = a^{3/2}f_1(a\xi_j) = \tilde{f}_a = a^{3/2}\tilde{f}_1\left(\frac{aM_D}{M_s}\xi_j\right), \\ h_a &= h_a(\xi'_j) = a^{3/2}h_1(a\xi'_j) = \tilde{h}_a = a^{3/2}\tilde{h}_1\left(\frac{aM_D}{M_s}\xi'_j\right). \end{aligned}$$

Поэтому (П.18) эквивалентно равенству

$$\lim_{a \rightarrow 0} (B_{js}u_a, v_a)a^{-\gamma} = 0,$$

которое, в свою очередь, вытекает из соотношений

$$\lim_{a \rightarrow 0} (-\Delta_\xi u_a, v_a)_{R_0[D]} a^{-\gamma} = 0, \quad (\text{П.19})$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (u_a, V_{lm}v_a)_{R_0[D]} a^{-\gamma} = 0. \quad (\text{П.20})$$

Чтобы вывести равенство (П.19), мы после вычисления $\Delta_\xi u_a$ применим неравенство Буняковского и в полученных интегралах сделаем замену $\eta = a\xi_j$, $\eta' = a\xi'_j$. Имеем

$$|(\Delta_\xi u_a, v_a)| \leq \|\Delta_\eta f_1(\eta)\| \|h_1(\eta')\| a^2 c,$$

откуда и следует (П.19), ибо $\gamma < 2$. Положим $d_{lm} = (u_a, V_{lm}v_a)$. Пусть $R > 0$, области $\Omega_+(R)$ и $E'_i(R)$, $E_t(R)$ те же, что в формулах (П.10) и (П.15). Поскольку $f_1(a\xi_j) = h_1(a\xi'_j) = 0$ при $|\xi_j|, |\xi'_j| \leq R$ для $aRM[D] < A_1M_s$, при малых a мы получаем

$$d_{lm}(a) = (u_a, V_{lm}v_a)_{\Omega_+(R)}. \quad (\text{П.21})$$

В силу включения (П.16) для оценки величины $d_{lm}(a)$ достаточно оценить величины $(u_a, V_{lm}v_a)_{E'_i(R)}$ и $(u_a, V_{lm}v_a)_{E_t(R)}$:

$$\int_{E_t(R)} |u_a V_{lm}v_a| dr_0[D] \leq \sqrt{\int_{E_t(R)} |u_a|^2 |V_{lm}|^2 dr_0[D]}, \quad (\text{П.22})$$

$$\int_{E'_i(R)} |u_a V_{lm}v_a| dr_0[D] \leq \sqrt{\int |u_a|^2 V_{lm}^2 dr_0[D]} \sqrt{\int_{E'_i(R)} |v_a|^2 dr_0[D]}. \quad (\text{П.23})$$

По условию $|V_{lm}(r_{lm})| \leq c|r_{lm}|^{-\sigma}$ при любых l, m , где $3/2 > \sigma \geq \gamma$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{E_t(R)} |u_a|^2 V_{lm}^2 dr_0[D] &\leq \int_{E_t(R)} \frac{|\varphi|^2 |\psi|^2 a^3 f_1(a\xi_1)}{|r_{lm}|^{2\sigma}} dr_0[D] \leq \\ &\leq ca^{2\sigma} \int_{E_t(R)} |\varphi|^2 |\psi|^2 \int \frac{f_1^2(\eta) d\eta}{|(r_l^0 - r_m^0)a + \eta|^{2\sigma}} dr_0[D_j] dr_0[D_s] \leq \varepsilon^2 a^{2\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

если число $R = R(\varepsilon)$ достаточно велико. Это следует из того, что $\varphi \in \mathcal{L}_2(R_0[D_j])$, а внутренний интеграл в правой части (П.24) равномерно по a, r_l^0, r_m^0 ограничен в силу первого соотношения в (П.1). Аналогично (П.24) получаем, что

$$\int |u_a V_{lm}|^2 dr_0[D] \leq a^{2\sigma} c. \quad (\text{П.25})$$

Наконец, поскольку $v_1 \in \mathcal{L}^2(R_0[D])$, при $R \geq R(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\int_{E'_i(R)} |v_a|^2 dr_0[D] \leq \varepsilon^2. \quad (\text{П.26})$$

В силу формул (П.22), (П.24)

$$\int_{E_t(R)} |u_a V_{lm} v_a| dr_0[D] \leq a^\sigma \varepsilon c,$$

и в силу соотношений (П.23), (П.25), (П.26) мы получаем

$$\int_{E'_i(R)} |u_a V_{lm} v_a| dr_0[D] \leq a^\sigma \varepsilon c.$$

Отсюда с учетом (П.16), (П.21) следует, что $|d_{lm}(a)| \leq a^\sigma \varepsilon$, и равенство (П.20) доказано.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00458_а).

Список литературы

- [1] А. Г. Сигалов, И. М. Сигал, *ТМФ*, **5:1** (1970), 73–93.
- [2] Г. М. Жислин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33:3** (1969), 590–649.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [4] Г. М. Жислин, *Докл. АН СССР*, **128:2** (1959), 231–234.
- [5] Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров*, ИЛ, М., 1961.

Поступила в редакцию 30.06.2011,
после доработки 12.10.2011