Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Желобенко, Об алгебрах Вейля над квантовыми группами, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 190–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:00:19

© 1999 г.

Д. П. Желобенко*

ОБ АЛГЕБРАХ ВЕЙЛЯ НАД КВАНТОВЫМИ ГРУППАМИ

Предложено название “алгебры Вейля” для дифференциальных алгебр, ассоциированных с дуальными парами алгебр Хопфа. Доказан принцип полной приводимости для категории “допустимых” модулей над алгебрами Вейля. Исследованы комодульные структуры, связывающие алгебры Вейля с квантовым дублем Дринфельда.

В теории квантовых групп хорошо известны “дифференциальные алгебры” или алгебры “дифференциальных операторов”, ассоциированные с дуальными парами алгебр Хопфа. Эпизодически такие алгебры встречались еще до появления общей концепции квантовых групп, т. е. до работы Дринфельда 1985 г. [1]. Инвариантные дифференциальные операторы играют существенную роль в дифференциальном исчислении на квантовых группах в смысле работы Вороновича [2] (см. также [3, 4]). Конструкция дифференциальных алгебр содержится как частный случай в определении алгебр Милнора, предложенном Новиковым в 1992 г. [5]. Систематический подход к исследованию этих алгебр намечен в [6] (см. также [7, 8]).

Согласно результатам работ [6–8] имеется тесная аналогия между дифференциальными алгебрами на квантовых группах и классическими алгебрами Вейля, т. е. алгебрами канонических коммутационных соотношений квантовой механики. В этом смысле естественно использовать термин “алгебры Вейля” применительно к общей ситуации, связанной с квантовыми группами. Цель данной статьи – продолжить развитие этой аналогии, и также отметить интересную связь алгебр Вейля с квантовым дублем Дринфельда.

В статье рассматриваются общие вопросы, связанные с исследованием категории “допустимых” модулей над алгебрами Вейля. Показано (теорема п. 1.7, раздел 1), что эта категория полупроста, с единственным простым объектом (аналогом представления Фока для классических алгебр Вейля). Таким образом, теорема из п. 1.7 может рассматриваться как обобщение известного принципа единственности квантовой механики, относящегося к каноническим коммутационным соотношениям (т. е. к операторам координаты и импульса). С другой стороны, теорема п. 1.7 пополняет собой весьма многочисленную коллекцию принципов полной приводимости, все известные экспонаты

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

которой в известном смысле группируются вокруг классической теоремы Вейля о полупростоте конечномерных представлений полупростых комплексных алгебр Ли (см., например, [9]).

В разделе 3 рассматриваются вопросы, связанные с коумножением в алгебрах Вейля. Показано, что эти алгебры естественно включаются в “квантовые тройки”, представляющие собой комодульную структуру над квантовым дублем Дринфеля. Подобная конструкция встречалась ранее в кристаллической теории Кашивары [10], где роль квантового дубля играют алгебры Дринфеля–Джимбо $U_q(g)$, а их дифференциальные “спутники” суть алгебры квантовых бозонов, ассоциированные с сингулярными точками $q = 0, \infty$ (т.е. с южным и северным полюсами соответствующей сферы Римана). Результаты раздела 3 показывают, что эта конструкция имеет универсальный характер в ситуации, связанной с дуальными парами алгебр Хопфа.

В разделе 4 показано, что на квантовые тройки естественно распространяется конструкция универсальных R -матриц Дринфеля. Попутно обсуждаются общие вопросы, связанные с определением топологических тензорных произведений в теории R -матриц.

Основные результаты статьи анонсированы в [11]. Предварительная схема конструкции квантовых троек предложена в [12].

1. АЛГЕБРЫ $D_{\alpha\beta}$

1.1. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа над полем k с невырожденной билинейной формой $(\cdot, \cdot)$ в $A \times B$. Согласно этому определению имеем

$$(x, 1) = \varepsilon(x), \quad (1, y) = \varepsilon(y), \quad (1.1)$$

$$(x, yz) = (\Delta x, y \otimes z), \quad (xy, z) = (x \otimes y, \Delta z), \quad (1.2)$$

$$(\gamma x, y) = (x, \gamma y) \quad (1.3)$$

для всех x, y, z (из A или B). Здесь $\varepsilon, \Delta, \gamma$ означают соответственно коединицу, коумножение и антипод (в алгебрах A, B), а скобка в правой части (1.2) – индуцированную форму в $(A \otimes A) \times (B \otimes B)$.

В дальнейшем мы используем стандартное обозначение $\Delta x = x_1 \otimes x_2$, заменяющее сумму слагаемых (в $A \otimes A$ или $B \otimes B$). Соотношения (1.2) переписываются следующим образом:

$$(x, yz) = (x_1, y)(x_2, z), \quad (xy, z) = (x, z_1)(y, z_2). \quad (1.4)$$

Отсюда ясно, что операторы (левого, правого) умножения в алгебрах A, B обладают сопряженными относительно формы $(\cdot, \cdot)$. Например, отождествляя элементы $y, z \in B$ с соответствующими операторами умножения в алгебре B , получаем следующие сопряженные операторы в алгебре A :

$$y'x = y(x_1)x_2, \quad z'x = x_1z(x_2), \quad (1.5)$$

где $x \in A$ и символ $b(a)$ заменяет (a, b) для элементов $a \in A$, $b \in B$. Операторы (1.5) называются обычно (право-, лево-) *инвариантными векторными полями* в алгебре A .

С помощью (1.5) легко проверить, что операторы $\partial = b'$ ($b \in B$) удовлетворяют следующим *соотношениям Лейбница* в алгебре A :

$$\partial(xy) = \partial_1(x)\partial_2(y) \quad (1.6)$$

для всех $x, y \in A$, где $\partial_i = b'_i$ ($i = 1, 2$) при $\Delta b = b_1 \otimes b_2$. Соотношение (1.6) можно интерпретировать как правило коммутирования с операторами левого (правого) умножения в алгебре A :

$$\partial x = \partial_1(x)\partial_2, \quad \partial y = \partial_2(y)\partial_1, \quad (1.7)$$

где $x, y \in A$.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем обозначение A_L (соответственно A_R) для алгебры левых (правых) мультипликаторов в алгебре A , и пусть B'_α ($\alpha = L, R$) — соответствующие алгебры векторных полей, определенные в $\text{End } A$ (см. п. 1.1). Положим

$$D_{\alpha\beta} = k\langle A_\alpha, B'_\beta \rangle, \quad (1.8)$$

где $\alpha, \beta = L, R$. Иначе говоря, $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(A, B)$ — это подалгебра в $\text{End } A$, порожденная подалгебрами A_α, B'_β . Подалгебры (1.8) называются иногда (см., например, [5, 6]) *дифференциальными алгебрами*, ассоциированными с парой A, B .

С помощью соотношения Лейбница в форме (1.7) легко проверить, что равенство (1.8) переписывается в более компактной форме следующим образом:

$$D_{\alpha\beta} = A_\alpha B'_\beta \quad (1.9)$$

для всех $\alpha, \beta = L, R$.

Исходя из аналогии с классическими алгебрами Вейля (см. п. 1.3), мы будем говорить, что алгебры $D_{\alpha\beta}$ суть *алгебры Вейля*, ассоциированные с парой A, B . Абстрактная структура этих алгебр определяется соотношениями Лейбница в $\text{End } A$ (см. п. 1.3).

В дальнейшем мы считаем, что антипод γ обратим, т.е. γ — антиавтоморфизм каждой из алгебр A, B .

1.3. ТЕОРЕМА [8]. *Разложение (1.9) свободно, т.е. определяет изоморфизм векторных пространств:*

$$D_{\alpha\beta} \approx A \otimes B. \quad (1.10)$$

Более того, генетика алгебры $D_{\alpha\beta}$ сводится к генетике ее подалгебр A_α, B'_β и к соотношениям Лейбница (1.7), определенным в $D_{\alpha\beta}$.

ПРИМЕР. Пусть $A = B = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ – стандартная дуальная пара с примитивными образующими x_i ($i = 1, \dots, n$). Соотношения Лейбница в этом случае имеют классический вид

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$$

для образующих $\partial_i = x'_i$ ($i = 1, \dots, n$). Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Алгебры $D_{\alpha\beta}$ совпадают между собой (вследствие коммутативности A, B) и изоморфны алгебре Вейля W_n , т.е. алгебре канонических коммутационных соотношений квантовой механики.

1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Используя то, что разложение (1.9) свободно, находим, что соотношения Лейбница в $D_{\alpha\beta}(A, B)$ совпадают с сопряженными соотношениями, индуцированными из $D_{\beta\alpha}(B, A)$.

Например, при $\alpha = \beta = L$ соотношения Лейбница могут быть записаны в одной из следующих форм:

$$b'a = b'_1(a)b'_2 = a_2a'_1(b)', \quad (1.11)$$

для элементов $a \in A, b \in B$.

1.5. Напомним известное описание алгебры A в терминах конечномерных представлений алгебры B (см., например, [13, 14]). A именно, алгебра A при ее естественном вложении в B^* (относительно формы $(\cdot, \cdot)$) совпадает с линейной оболочкой B_σ^* матричных элементов некоторой системы σ конечномерных представлений алгебры B . Система σ должна быть замкнутой относительно тензорных операций в кольце представлений алгебры B .

В частности, $A \subset B_H^*$, где B_H^* – наибольшая дуальная алгебра Хопфа, натянутая на матричные элементы всех конечномерных представлений алгебры B . Алгебра A называется *полной*, если $A = B_H^*$.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A = B_\sigma^*$ (см. п. 1.5) и пусть $D = D_{\alpha\beta}(A, B)$. D -модуль V называется *допустимым*, если каждый его циклический подмодуль $B'_\beta x$ ($x \in V$) есть модуль категории σ (в частности, $\dim B'_\beta x < \infty$).

Заметим, что A – это допустимый D -модуль. Согласно [8] модуль A абсолютно прост.

1.7. ТЕОРЕМА. *Каждый допустимый D -модуль V кратен простому D -модулю A . Иначе говоря, категория допустимых D -модулей полупроста с единственным простым объектом A .*

Доказательство излагается в разделе 2.

1.8. СЛЕДСТВИЕ. *Модуль V порождается своим “вакуумным подпространством” V^B , состоящим из B -инвариантов модуля V , т.е. элементов $x \in V$, удовлетворяющих соотношениям $bx = \varepsilon(b)x$ для всех $b \in B$. Более того, действие алгебры A в пространстве V индуцирует изоморфизм $V \approx A \otimes V^B$.*

Например, при $\alpha = L$ имеем

$$V = AV^B \approx A \otimes V^B, \quad V = A_\varepsilon V^B \oplus V^B, \quad (1.12)$$

где $A_\varepsilon = \ker \varepsilon$ (в алгебре A).

1.9. ПРИМЕР. Классические алгебры Вейля W_n (см. п. 1.3) вкладываются в эту схему следующим образом: $A = B_\sigma^*$, где σ — система локально-нильпотентных представлений алгебры B . Локальная нильпотентность в терминах операторов $\partial_i = x'_i$ ($i = 1, \dots, n$) означает, что

$$\partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} x = 0$$

для всех $x \in V$ при $k_1 + \dots + k_n \geq N(x)$.

Теорема п. 1.7 в этом случае совпадает с известным принципом единственности квантовой механики, точнее, с алгебраическим аналогом известной теоремы Вейля—Стоуна—фон Неймана о канонических коммутационных соотношениях.

2. ОСНАЩЕННЫЕ МОДУЛИ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное пространство V над полем k назовем *оснащенным A -модулем типа (α, β)* , где $\alpha, \beta = L, R$, если V наделено структурой левого (правого) A -модуля при $\alpha = L$ (соответственно $\alpha = R$) и согласованной структурой левого (правого) A -комодуля при $\beta = L$ ($\beta = R$).

Наличие комодульной структуры означает, что в пространстве V определено коумножение $\Delta: V \rightarrow A \otimes V$ при $\beta = L$, $V \rightarrow V \otimes A$ при $\beta = R$. Коумножение Δ предполагается коассоциативным, т.е.

$$(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta. \quad (2.1)$$

Здесь один и тот же символ Δ используется в различных контекстах. Например, отображения $\Delta \otimes 1$, $1 \otimes \Delta$ определяются в $A \otimes V$ при $\beta = L$ и в $V \otimes A$ при $\beta = R$. Помимо этого, должны выполняться соотношения инцидентности

$$(\varepsilon \otimes 1)\Delta = 1 \quad \text{при} \quad \beta = L, \quad (1 \otimes \varepsilon)\Delta = 1 \quad \text{при} \quad \beta = R. \quad (2.2)$$

Согласованность умножения и коумножения означает, что Δ есть гомоморфизм A -модулей. Например, при $\alpha = \beta = L$ имеем

$$\Delta(ax) = \Delta a \cdot \Delta x \quad (2.3)$$

для всех $a \in A$, $x \in V$.

Оператор (2.1) обозначается символом Δ^2 , так что $\Delta^2: V \rightarrow A \otimes A \otimes V$ при $\beta = L$, $V \rightarrow V \otimes A \otimes A$ при $\beta = R$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оснащенные A -модули встречаются в литературе под другими названиями (димодули, ковариантные A -модули и т. д.)

2.2. Пусть V – оснащенный A -модуль типа (α, β) . Если $\beta = L$, то для каждого функционала $f \in A^*$ в пространстве V определен линейный оператор $f' = (f \otimes 1)$, т.е.

$$f'x = f(x_1)x_2, \quad (2.4)$$

где $x \in V$, $\Delta x = x_1 \otimes x_2 \in A \otimes V$ (по аналогии с п. 1.1). Аналогично при $\beta = R$ в пространстве V определен линейный оператор

$$f'x = x_1f(x_2), \quad (2.5)$$

где $x \in V$, $\Delta x = x_1 \otimes x_2 \in V \otimes A$. Операторы (2.4), (2.5) интерпретируются как “векторные поля” в пространстве V .

Мы будем рассматривать A^* как алгебру с сопряженным умножением $\mu = \Delta^*$, т.е.

$$(fg)(x) = f(x_1)g(x_2) \quad (2.6)$$

для элементов $f, g \in A^*$. Здесь $x \in A$, $\Delta x = x_1 \otimes x_2 \in A \otimes A$. Легко проверить, что равенство (2.4) (соответственно (2.5)) определяет антипредставление (представление) алгебры A^* в пространстве V . Например, при $\beta = R$ имеем

$$f'g'x = f'[x_1g(x_2)] = x_1f(x_2)g(x_3) = x_1(fg)(x_2) = (fg)'x$$

для всех $f, g \in A^*$, $x \in A$. Здесь мы используем стандартное правило смещения индексов при переходе от $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ к $\Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$.

Иначе говоря, операторы (2.4) (соответственно (2.5)) определяют в пространстве V структуру правого (левого) A^* -модуля.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа и пусть V – оснащенный A -модуль типа (α, β) . Тогда операторы (2.4) при $\beta = L$, (2.5) при $\beta = R$ определяют в пространстве V структуру $D_{\alpha\beta}$ -модуля.

Действительно, V обладает структурой A_α -модуля согласно определению п. 2.1. С другой стороны, ограничивая конструкцию п. 2.2 на подалгебру $B \subset A^*$ и заменяя алгебру B противоположной (по умножению) алгеброй B' , находим, что V обладает структурой B'_β -модуля. Легко проверить также, что операторы (2.4), (2.5) удовлетворяют соотношениям Лейбница

$$f'(xy) = f'_1(x)f'_2(y) \quad (2.7)$$

для всех $(x, y) \in A \times V$ при $\alpha = L$ и для всех $(x, y) \in V \times A$ при $\alpha = R$. Однако это означает, что операторы (2.4), (2.5) удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры $D_{\alpha\beta}$ (соответственно при $\beta = L, R$). Здесь имеется в виду теорема из п. 1.3. Отсюда заключаем, что совместное действие операторов A_α, B'_β определяет в пространстве V искомую структуру $D_{\alpha\beta}$ -модуля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что $\dim B'_\beta x < \infty$ для всех $x \in V$. В частности, при $A = B_H^*$ пространство V есть допустимый D -модуль, где $D = D_{\alpha\beta}$.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа и пусть $D = D_{\alpha\beta}(A, B)$. Тогда операции (2.4) при $\beta = L$ и (2.5) при $\beta = R$ определяют изоморфизм категории допустимых D -модулей с категорией оснащенных A -модулей типа (α, β) .

Согласно предложению п. 2.3 достаточно проверить, что каждый допустимый D -модуль V порождается (по схеме п. 2.3) структурой оснащенного A -модуля в пространстве V . Фиксируем $x \in V$, и пусть β_i ($i = 1, \dots, n$) – базис векторного пространства $B'_\beta x$. Тогда имеем

$$b'x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(b) \beta_i \quad (2.8)$$

для всех $b \in B$, где α_i – матричные элементы модуля $B'_\beta x$: $\alpha_i(b) = \langle b'x, \gamma_i \rangle$, где γ_i – дуальные элементы в V^* , т.е. $\langle \beta_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Напомним, что $A = B_\sigma^*$ и модуль $B'_\beta x$ – модуль категории σ . Отсюда $\alpha_i \in A$ для всех $i = 1, \dots, n$. Полагая для определенности $\alpha = \beta = L$, введем обозначение

$$\Delta x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \beta_i \quad (2.9)$$

для элементов $x \in V$, так что $\Delta: V \rightarrow A \otimes V$. Соотношение (2.8) есть частный случай (2.4) для коумножения (2.9) с заменой $b(\alpha_i)$ на $\alpha_i(b)$. Соотношение (2.8) в инвариантной форме записывается следующим образом:

$$\langle \Delta x, b \otimes y \rangle = \langle x, by \rangle, \quad (2.10)$$

где скобка в левой части – это каноническая билинейная форма в $(A \otimes V) \times (A \otimes V)^*$ и действие $y \mapsto by$ алгебры B в пространстве V^* сопряжено исходному действию алгебры B в пространстве V , т.е. $\langle x, by \rangle = \langle b'x, y \rangle$ для всех $b \in B$, $x \in V$, $y \in V^*$. Ясно также, что соотношение (2.10) может быть записано в виде $x(by) = x_1(b)x_2(y)$ при $\Delta x = x_1 \otimes x_2$.

С помощью (2.10) легко проверить коассоциативность операции (2.9). А именно, для каждого набора $x \in V^*$, $b, c \in B$ имеем

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \otimes 1)\Delta x, b \otimes c \otimes y \rangle &= \langle \Delta x_1, b \otimes c \rangle \langle x_2, y \rangle = \langle x_1, bc \rangle \langle x_2, y \rangle = \langle x, bcy \rangle = \\ &= \langle x_1, b \rangle \langle x_2, cy \rangle = \langle x_1, b \rangle \langle \Delta x_2, c \otimes y \rangle = \langle (1 \otimes \Delta)\Delta x, b \otimes c \otimes y \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие невырожденности канонической билинейной формы в $(A \otimes A) \times (B \otimes B)$ получаем (2.1). Соотношения инцидентности (2.2) также легко проверяются.

Для проверки равенства (2.3) воспользуемся сопряженными соотношениями Лейбница в форме (1.11). Имеем

$$b'ax = cd'x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(d)c\beta_i = \sum_{i=1}^n a_1\alpha_i(b)a_2\beta_i$$

для всех $a \in A$, $b \in B$, $x \in V$, где $c = a_2$, $d = a'_1b$ (см. (1.11)). Отсюда по аналогии с (2.9) получаем

$$\Delta(ax) = \sum_{i=1}^n a_1\alpha_i \otimes a_2\beta_i = \Delta a \cdot \Delta x.$$

Остальные варианты $\alpha, \beta = L, R$ рассматриваются аналогично.

2.5. СЛЕДСТВИЕ. *Каждый допустимый D -модуль V допускает продолжение до структуры допустимого $\tilde{D}$ -модуля V , где $\tilde{D} = \tilde{A}_\alpha B_\beta$ – “пополнение” алгебры D , с компонентой $\tilde{A} = B_H^*$.*

2.6. ЛЕММА. *Пусть V – оснащенный A -модуль типа (α, β) и пусть V_0 – подпространство элементов $x \in V$, удовлетворяющих соотношению*

$$\Delta x = 1 \otimes x, \quad \Delta x = x \otimes 1$$

при $\beta = L, R$, соответственно. Тогда пространство V есть свободный A -модуль с базой V_0 , т.е.

$$V = AV_0 \approx A \otimes V_0, \quad V = V_0 A \approx V_0 \otimes A$$

при $\alpha = L, R$, соответственно.

Положим, например, $\alpha = \beta = L$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Определим оператор $p \in \text{End } V$, полагая $px = \tilde{x}_1 x_2$ для элементов $x \in V$, где $\Delta x = x_1 \otimes x_2 \in A \otimes V$, $\tilde{x} = \gamma x$. Положим также $\Delta^3 x = (\Delta \otimes \Delta)\Delta = (\Delta^2 \otimes 1)\Delta$. Используя символику $\Delta^3 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4$ в пространстве $A \otimes A \otimes A \otimes V$, находим

$$\Delta px = \Delta \tilde{x}_1 \cdot \Delta x_2 = (\tilde{x}_2 \otimes \tilde{x}_1)(x_3 \otimes x_4) = \varepsilon(x_2) \otimes \tilde{x}_1 x_3 = 1 \otimes px$$

для всех $x \in V$, т.е. $px \in V_0$. Здесь мы воспользовались правилами смещения индексов и соотношением инцидентности $\tilde{a}_1 a_2 = \varepsilon(a)$ для элементов $a \in A$. Имеем также

$$p(ax) = \tilde{x}_1 \tilde{a}_1 a_2 x_2 = \varepsilon(a) \tilde{x}_1 x_2 = \varepsilon(a) px$$

для элементов $a \in A$, $x \in V$.

С помощью правила инцидентности (2.2) для элементов $x \in V$ находим

$$x = (\varepsilon \otimes 1)\Delta x = \varepsilon(x_1)x_2 = x_1 \tilde{x}_2 x_3 = x_1 \cdot px_2, \quad (2.11)$$

отсюда следует, что A -модуль V порождается подпространством V_0 , т.е.

$$V = AV_0 = A_\varepsilon V_0 + V_0,$$

где $A_\varepsilon = \ker \varepsilon$ (в алгебре A). Используя (2.11) и равенство $px = x$ при $x \in V_0$, находим, что эта сумма прямая, причем оператор p проецирует V на V_0 параллельно $A_\varepsilon V_0 = A_\varepsilon V$.

Фиксируем базис ω_i ($i \in I$) пространства V_0 . Согласно (2.11) имеем

$$x = \sum_i a_i \omega_i \quad (2.12)$$

для каждого $x \in V$ с коэффициентами $a_i \in A$. Применяя к (2.12) оператор $\Theta = (1 \otimes p)\Delta$, находим

$$\Theta x = (1 \otimes p) \sum_i b_i \otimes c_i \omega_i = \sum_i b_i \otimes \varepsilon(c_i) \omega_i = \sum_i a_i \otimes \omega_i,$$

где $\Delta a_i = b_i \otimes c_i$ (символическая запись в $A \otimes A$). Отсюда следует единственность разложений (2.12), т.е. изоморфизм $V \approx A \otimes V_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная лемма по существу доказана в [2], где рассматривается частный случай ковариантных A -бимодулей, в терминах работы [2].

2.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ п. 1.7. Согласно теореме п. 2.4 пространство V — оснащенный A -модуль типа (α, β) . Полагая для определенности $\alpha = \beta = L$, заметим, что равенство $b'x = \varepsilon(b)x$ ($b \in B$) равносильно $\Delta x = 1 \otimes x$ в обозначениях (2.9). Поэтому $V^B = V_0$. Остается применить лемму из п. 2.6 и заметить, что из равенства $\Delta x = 1 \otimes x$ следует равенство

$$b'(ax) = b'_1(a)b'_2(x) = b'_1(a)\varepsilon(b_2)x = b'(a)x$$

для элементов $a \in A$, $x \in V$. Поэтому отображение $a \mapsto a\omega_i$ определяет изоморфизм A -модулей $A, A\omega_i$ для всех $i \in I$.

2.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Частный случай оснащенного A -модуля есть дифференциальное исчисление первого порядка в смысле работы [2] с дифференциалом $d: A \rightarrow V$.

3. КВАНТОВЫЕ ТРОЙКИ

3.1. Начиная с этого момента, нам будет удобно заменить условие дуальности алгебр A, B условием их косой дуальности, т.е. дуальности между $A, B_{\text{орр}}$, где $B_{\text{орр}} = B$ с противоположным коумножением $\Delta'x = x_2 \otimes x_1$ (и с антиподом γ^{-1}).

Иногда мы будем также рассматривать A', B' (см. п. 1.1) как алгебры A, B с противоположным умножением (и с антиподом γ^{-1}).

Алгебра C называется *скрещенным произведением алгебр* A, B , если ее генетика сводится к генетике алгебр A, B и к некоторой дополнительной системе соотношений $\nabla(C)$ между образующими из $A \cup B$.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть S, Q, T – скрещенные произведения алгебр A, B , определяемые (соответственно) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\nabla(S) : \quad ab &= (a_1, b_1)b_2a_2, \\ \nabla(Q) : \quad (a_1, b_1)b_2a_2 &= (a_2, b_2)a_1b_1, \\ \nabla(T) : \quad ba &= (a_2, b_2)a_1b_1,\end{aligned}$$

для всех $a \in A, b \in B$, где $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ ($x \in A \cup B$).

3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждая из алгебр A, B ассоциативна и обладает свободным разложением

$$X = AB \approx A \otimes B, \quad Y = BA \approx B \otimes A \quad (3.1)$$

для алгебр $X = S, Q, Y = Q, T$. Более того, алгебра S (соответственно T) изоморфна $D_{LR}(B, A')$ (соответственно $D_{LR}(A, B')$). Алгебра Q – квантовый дубль Дринфелда, ассоциированный с парой A, B [13, 14].

Действительно, замена B на B_{opp} в определении п. 1.2 сводится к замене Δ на Δ' в соотношениях Лейбница (1.7). Например, для алгебры $D_{LR}(A, B)$ эти соотношения принимают вид

$$b'a = b'_2(a)b'_1 = (a_2, b_2)a_1b'_1,$$

где $a \in A, b \in B$. Заменяя B на B' , получаем $\nabla(T)$. Аналогично рассматривается $\nabla(S)$. Наконец, соотношения $\nabla(Q)$ эквивалентны (см., например, [14]) известным определяющим соотношениям Дринфелда

$$ba = (a_1, \tilde{b}_1)(a_3, b_3)a_2b_2$$

для квантового дубля $Q = Q(A, B)$. Здесь используются следующие обозначения: $\Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ ($x \in A \cup B$), $\tilde{x} = \gamma^{-1}x$. Соотношения (3.1) следуют из теоремы п. 1.3 для алгебр S, T и соответствующего результата для алгебры Q (см. [14]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно, квантовый дубль $Q = Q(A, B)$ – единственное скрещенное произведение вида $A \otimes B$, в котором операция $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ ($x \in A \cup B$) индуцирует структуру алгебры Хопфа (см. [13, 14]).

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Операция $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ ($x \in A \cup B$) однозначно продолжается до морфизма следующих ассоциативных алгебр с единицей:

$$S \rightarrow Q \otimes S, \quad Q \rightarrow S \otimes T, \quad T \rightarrow T \otimes Q. \quad (3.2)$$

Более того, во всех этих случаях морфизм Δ коассоциативен, т.е. порождает индуцированный морфизм $\Delta^2 = (\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$.

Достаточно проверить, что Δ сохраняет структурные соотношения в алгебре (3.2). Например, для случая $\Delta: S \rightarrow Q \otimes S$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta(ab) &= a_1b_1 \otimes a_2b_2 = a_1b_1 \otimes (a_2, b_2)b_3a_3 = \\ &= (a_2, b_2)a_1b_1 \otimes b_3a_3 = (a_1, b_1)b_2a_2 \otimes b_3a_3 = (a_1, b_1)\Delta(ba)\end{aligned}$$

для всех $a \in A$, $b \in B$. Отсюда следует, что морфизм Δ согласован с $\nabla(S)$. Соотношения коассоциативности проверяются индуктивно по длине одночленов от образующих из $A \cup B$.

3.5. СЛЕДСТВИЕ. *Сопряженное пространство S^* (соответственно T^*) есть левый (правый) модуль над алгеброй Q^* относительно умножения $\mu = \Delta^*$.*

Здесь имеется в виду следующее стандартное правило умножения:

$$(fg)(x) = f(x_1)g(x_2), \quad (3.3)$$

где $f, g \in Q^*$ (умножение в Q^*) либо $f \in Q^*$, $g \in S^*$ (действие в S^*), либо $f \in T^*$, $g \in Q^*$ (действие в T^*).

Заметим также, что Q^* является Q -бимодулем относительно стандартных операций

$$(af)(x) = f(xa), \quad (fa)(x) = f(ax), \quad (3.4)$$

где $a, x \in Q$, $f \in Q^*$. Аналогично для S, T .

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство $X = S, Q, T$ называется *квантовой тройкой*, ассоциированной с парой A, B [12]. Алгебра S (соответственно T) называется левым (правым) *спутником* квантового дубля Дринфельда $Q = Q(A, B)$.

3.7. Пусть X — множество, Y — векторное пространство и пусть $F(X, Y)$ — векторное пространство всех отображений $\varphi: X \rightarrow Y$. Для каждого подмножества $F \subset F(X, Y)$ его *локальное расширение (пополнение)* $\text{Lext } F$ определяется как множество локально конечных рядов следующего вида:

$$\varphi = \sum_{i \in I} \varphi_i \in F(X, Y), \quad (3.5)$$

где $\varphi_i \in F$ ($i \in I$). Локальная конечность ряда (3.5) означает, что для каждого $x \in X$ не более конечного числа значений $\varphi_i(x)$ отлично от нуля, так что оператор (3.5) определен для всех $x \in X$.

ПРИМЕР 1. Для каждого векторного пространства V имеем $\text{End } V = \text{Lext } F$, где F – подалгебра конечномерных операторов, порожденная одномерными операторами $(e \otimes f)(x) = f(x)e$ при $e \in V$, $f \in V^*$. Действительно, каждый оператор $a \in \text{End } V$ записывается в виде локально конечного ряда

$$a = \sum_i a e_i \otimes f_i, \quad (3.6)$$

где e_i ($i \in I$) – фиксированный базис пространства V , f_i ($i \in I$) – дуальная координатная система в V^* .

ПРИМЕР 2. Пусть $E = E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, $F = F_1 \otimes \cdots \otimes F_n$, где E_i, F_i ($i = 1, \dots, n$) – дуальные пары векторных пространств, так что $E_i \subset F_i^*$, $E \subset F^*$. Векторное пространство

$$E_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} E_n = \text{Lext}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) \subset F^* \quad (3.7)$$

называется локальным пополнением пространства E (в F^*).

3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Условимся рассматривать естественное вложение $B^* \otimes A^* \subset (A \otimes B)^*$, при котором каноническая билинейная форма в $(A \otimes B) \otimes (A \otimes B)^*$ записывается в виде

$$\langle a \otimes b, f \otimes g \rangle = \langle a, g \rangle \langle b, f \rangle \quad (3.8)$$

для элементов $a \in A$, $b \in B$, $f \in B^*$, $g \in A^*$. В частности, введем обозначение $A \hat{\otimes} A^* = \text{Lext}(A \otimes A^*)$ для локального пополнения $A \otimes A^*$ в пространстве $(A \otimes B)^*$.

Аналогично определяются локальные пополнения $A \hat{\otimes} A^* \hat{\otimes} A^*$, $A \hat{\otimes} A^* \hat{\otimes} A^*$ (соответственно) в пространствах $(A \otimes B \otimes B)^*$, $(A \otimes A \otimes B)^*$ и т.д.

3.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует единственный элемент $R \in A \hat{\otimes} A^*$, определяемый по правилу

$$\langle a \otimes b, R \rangle = (a, b) \quad (3.9)$$

для элементов $a \in A$, $b \in B$.

Действительно, для каждого базиса e_i ($i \in I$) векторного пространства A имеем

$$R = \sum_i e_i \otimes f_i, \quad (3.10)$$

где f_i ($i \in I$) – дуальная координатная система в A^* . Единственность элемента R следует из невырожденности формы (3.8).

3.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Координатное разложение

$$a = \sum_i f_i(a) e_i$$

элемента $a \in A$ равносильно тождеству

$$(1 \otimes a)R = a, \quad (3.11)$$

где символ $1 \otimes a$ рассматривается как отображение $A \hat{\otimes} A^* \rightarrow A$. Аналогично тождество

$$(b \otimes 1)R = b \quad (3.12)$$

определяет правило действия функционала $b \in B$ в пространстве A .

4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ R -МАТРИЦЫ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $X = A \otimes B$ — одна из алгебр S, Q, T (см. п. 3.2). По аналогии с п. 3.8 определим локальное пополнение $V_X = A \hat{\otimes} A^*$ как подпространство в одном из следующих векторных пространств: $(Q \otimes S)^*$ при $X = S$, $(Q \otimes Q)^*$ при $X = Q$ и $(T \otimes Q)^*$ при $X = T$. Соответствующий элемент $R = R^X$ (см. п. 3.9) назовем *универсальной R -матрицей*, ассоциированной с алгеброй X .

Аналогично определяются локальные пополнения $W_X = A \hat{\otimes} A^* \hat{\otimes} A^*$, $W'_X = A \hat{\otimes} A^* \hat{\otimes} A^*$ в пространствах $(Q \otimes Q \otimes S)^*$ при $X = S$, $(Q \otimes Q \otimes Q)^*$ при $X = Q$, $(T \otimes Q \otimes Q)^*$ при $X = T$. Условимся также использовать стандартный символ $R_{ij} = R_{ij}^X$ для естественного вложения элемента $R = R^X$ в одно из пространств W_X, W'_X с нетривиальными компонентами в позициях $i, j = 1, 2, 3$.

Например, записывая равенство (3.10) сокращенно в виде $R = e \otimes f$, имеем $R_{12} = e \otimes f \otimes 1$ в пространстве W_X .

Согласно следствию из п. 3.5 мы можем рассматривать V_X как $Q^* \otimes Q^*$ -бимодуль. В частности, V_X обладает структурой $Q \otimes Q$ -бимодуля.

4.2. ТЕОРЕМА. *Универсальная R -матрица $R = R^X$ удовлетворяет следующим соотношениям в пространстве V_X :*

$$\begin{aligned} (X = Q) : \quad & R \cdot \Delta x = \Delta' x \cdot R \quad (x \in A \cup B), \\ (X = S) : \quad & R \cdot \Delta x = (1 \otimes x) \cdot R \quad (x \in A), \quad R \cdot \Delta x = \Delta' x \cdot R \quad (x \in B), \\ (X = T) : \quad & R \cdot \Delta x = \Delta' x \cdot R \quad (x \in A), \quad R \cdot \Delta x = (x \otimes 1) \cdot R \quad (x \in B). \end{aligned}$$

Помимо этого, $R = R^X$ удовлетворяет (соответственно) следующим соотношениям в W_X, W'_X :

$$(\Delta \otimes 1)R = R_{13}R_{23}, \quad (1 \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}, \quad (4.1)$$

где $R_{ij} = R_{ij}^X$.

Например, пусть $X = Q$ и пусть $x = a \in A$. Полагая $F = R \cdot \Delta a$, $G = \Delta' a \cdot R$ и используя (3.12), находим

$$\begin{aligned} (b \otimes 1)F &= (ea_1, b)fa_2 = (a_1, b_1)(e, b_2)fa_2 = (a_1, b_1)(b_2 \otimes 1)Ra_2 = (a_1, b_1)b_2a_2, \\ (b \otimes 1)G &= (a_2e_1, b)a_1f = (a_2, b_2)(e, b_1)a_1f = (a_2, b_2)a_1(b_1 \otimes 1)R = (a_2, b_2)a_1b_1, \end{aligned}$$

где $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ ($x = a, b$). Согласно определению $\nabla(Q)$ эти элементы совпадают, т.е. $(b \otimes 1)(F - G) = 0$. Отсюда также

$$\langle a \otimes b, F - G \rangle = (b \otimes a)(F - G) = 0$$

для всех $a \in A, b \in B$. В результате имеем $F = G$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Например, пусть $X = S$, $x = a \in A$. Полагая $F = R \cdot \Delta a$, $G = (1 \otimes a)R$, получаем прежнее выражение для $(b \otimes 1)F$ и также

$$(b \otimes 1)G = (e, b)af = ab.$$

Отсюда согласно $\nabla(S)$ имеем $F = G$.

Аналогично проверяется (4.1). Например, пусть $F = (\Delta \otimes 1)R$, $G = R_{13}R_{23}$. Имеем

$$F = e_1 \otimes e_2 \otimes f, \quad G = e^1 \otimes e^2 \otimes f^1 f^2$$

(символическая запись), где $\Delta e = e_1 \otimes e_2$ и символы e^α, f^α ($\alpha = 1, 2$) определяют соответствующее вложение элемента $R = R^X$. Применяя к этим элементам преобразование $b \otimes c \otimes 1$ ($b, c \in B$), находим

$$\begin{aligned} (b \otimes c \otimes 1)F &= (e_1, b)(e_2, c)f = (e, bc)f = bc, \\ (b \otimes c \otimes 1)G &= (e^1, b)(e^2, c)f^1 f^2 = bc, \end{aligned}$$

т.е. эти элементы равны. Отсюда, как и выше, находим $F = G$. Аналогично проверяется второе соотношение (4.1).

4.3. СЛЕДСТВИЕ. Универсальная R -матрица $R = R^X$ удовлетворяет следующему (модифицированному) уравнению Янга–Бакстера:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad (4.2)$$

в пространстве W_X при $X = S, Q$, в пространстве W'_X при $X = Q, T$. Здесь $R_{ij} = R_{ij}^X$, за исключением $R_{12} = R_{12}^Q$ при $X = S$, $R_{23} = R_{23}^Q$ при $X = T$.

Действительно, применяя теорему из п. 4.2 к элементам формального ряда $R = e \otimes f$, находим $R \cdot (\Delta \otimes 1)R = (\Delta \otimes 1)R \cdot R$. Заметим также, что $\Delta'x = \tau \cdot \Delta x$, где τ – транспозиция в $A \otimes A$. Отсюда имеем

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R \cdot (\Delta \otimes 1)R = \tau(R_{13}R_{23})R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

где $R = R_{12}$ (равно R^Q при $X = S, Q$ и равно R^T при $X = T$).

4.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты этого раздела хрестоматийны для случая $X = Q$, однако при известных ограничениях на пару A, B (см., например, [14]). Универсальность нашего подхода связана с использованием локальных пополнений, определенных в п. 4.1.

4.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Наряду с R -матрицей $R = R^X$ в пространстве V_X определен сопряженный элемент

$$\tilde{R} = \tilde{e} \otimes f = e \otimes \tilde{f}, \quad (4.3)$$

где $\tilde{x} = \gamma x$ ($x \in A$), $\tilde{x} = \gamma^{-1}x$ ($x \in B$). Легко проверить, что при $X = T$ элемент

$$P = e\tilde{f} = f\tilde{e} \quad (4.4)$$

совпадает с оператором проецирования V на V^B (см. п. 1.8) в категории допустимых D -модулей.

Доказательство сводится к элементарным вычислениям с использованием (3.11), (3.12).

4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкция квантовых троек легко переносится на алгебры Дринфельда–Джимбо $U_q(\mathfrak{g})$, каждая из которых, как известно, есть факторизованный квантовый дубль вида Q/H , где H – картановская подалгебра в $U_q(\mathfrak{g})$ (см., например, [13, 14]). Теорема из п.1.7 в этом случае допускает H -градуированную версию как принцип полной приводимости в некоторой категории градуированных H -модулей.

Данный случай рассматривался ранее в [12] в связи с теорией вертекс-операторов над аффинными алгебрами Каца–Мули.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ 95-01-00233 и Научной школы 96-15-96249.

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 18–49.
- [2] S. L. Woronowicz. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125–170.
- [3] S. L. Woronowicz. Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 381–431.
- [4] P. Ashieri, P. Schupp. Vector fields on quantum groups. q-alg/9505023, 1995.
- [5] С. П. Новиков. УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 189–190.
- [6] D. P. Zhelobenko. Differential operators on quantum groups and graded algebras. In: Proc. XXI Intern. Coll. “Group Theor. Methods in Physics”. Goslar, 1996. Singapore–N. Y.–London: World Sci., 1998. P. 7–12.
- [7] Д. П. Желобенко. Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 25–50.
- [8] D. P. Zhelobenko. New aspects of differential calculus on quantum groups. In: Proc. V Wigner Symp. Wien, 1997. Sofia: Heron-Press, 1997. P. 254–259.
- [9] Д. П. Желобенко. Представления редуктивных алгебр Ли. М.: Наука, 1994.
- [10] Д. П. Желобенко. Вестн. РУДН. 1997/1998. Т. 4, 5. № 1. С. 51–59.
- [11] M. Kashiwara. Commun. Math. Phys. 1990. V. 122. P. 249–260.
- [12] T. Nakashima. Commun. Math. Phys. 1994. V. 164. P. 171–192.
- [13] V. Chari, A. Pressley. A Guide to Quantum Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [14] A. Joseph. Quantum Groups and Their Primitive Ideals. N.Y.: Springer, 1995.

Поступила в редакцию 24.VI.1998 г.