Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов,
А. В. Смирнов, О трехмерном обобщении соответствия
Алдая–Гайотто–Тачикавы, *ТМФ*, 2012, том 172, но-
мер 1, 73–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 04:03:19

© 2012 г.

Д. В. Галахов^{*†}, А. Д. Миронов^{*‡},
А. Ю. Морозов^{*}, А. В. Смирнов^{*†}

О ТРЕХМЕРНОМ ОБОБЩЕНИИ СООТВЕТСТВИЯ АЛДАЯ–ГАЙОТТО–ТАЧИКАВЫ

Обобщение двумерного соответствия Алдая–Гайотто–Тачикавы на случай трех измерений начинается с установления связи теории на доменной стенке между двумя S -дуальными суперсимметричными моделями Янга–Миллса с трехмерной теорией Черна–Саймонса. Простейший случай такого соотношения, вероятнее всего, должен связывать следы модулярных ядер в двумерной конформной теории поля с инвариантами узлов. На самом деле эти величины крайне похожи, особенно если выбрано представление в виде интегралов от квантовых дилогарифмов. Однако существует некоторая разница, в частности в “законах сохранения” для переменных интегрирования, которые работают для следов монодромий, но не для инвариантов узлов. Рассмотрена также другая возможность – интерпретация инвариантов узлов как решений уравнений Бакстера для релятивистской системы Тоды. Это предполагает иной вид соотношения, подобного соответствию Алдая–Гайотто–Тачикавы, между трехмерной теорией Черна–Саймонса и пределом Некрасова–Шаташвили для пятимерной суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Ключевые слова: соответствие Алдая–Гайотто–Тачикавы, теория Черна–Саймонса, инварианты узлов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] (см. также работы [2]–[12]) было предложено соответствие, которое можно рассматривать как один из вариантов $(3 + 3)$ -переразложения известного $(2 + 4)$ -соотношения Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) [13] между конформными блоками и функциями Некрасова. Это соответствие призвано связать ядра $M(a, a')$ модулярных преобразований конформных блоков и матричные элементы в трехмерной теории Черна–Саймонса (ЧС). В простейшем случае связь возникает между следом модулярного оператора, рассматриваемым как функция внешних размерностей, и интегралами Хиками [14], которые представляют статистические суммы

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: galakhov@itep.ru, mironov@itep.ru, morozov@itep.ru, asmirnov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ru

теории ЧС на $S^3 \setminus K$ (трехмерной сфере с вырезанным узлом K) как функции монодромий вокруг узла K . Основная задача настоящей работы – обсудить возможные формулировки этого соотношения в явной форме, оставляя в стороне общий контекст и доводы, детально представленные в работе [1]. Мы обращаем внимание на некоторые проблемы, возникающие при попытке непосредственного отождествления следа модулярной матрицы и инвариантов узлов. Мы также подчеркиваем важность другого соотношения, между инвариантами узлов и пятимерной теорией Зайберга–Виттена (ЗВ), которое подразумевает иную форму соотношения, подобно-го соотношению АГТ, включающую трехмерную теорию ЧС.

2. МОДУЛЯРНОЕ ЯДРО

Конформный блок $B_\Gamma(a|m|q)$ для графа Γ зависит от трех типов переменных: от параметров a и m (α -параметров) на внутренних линиях и внешних ногах соответственно (соответствующие конформные размерности квадратичны по этим параметрам) и переменной q , параметризующей сам граф. Модулярное преобразование не меняет граф Γ , при этом происходит замена $q \rightarrow q'$ и перестановка α -параметров внешних ног между собой. Модулярное преобразование представляет собой интегральное преобразование по переменным a :

$$B_\Gamma(a|\alpha|q) = \int d\mu(a') M(a, a') B_\Gamma(a'|\alpha'|q').$$

Функция $M(a, a')$ зависит от Γ и α , но не от q и называется модулярным ядром, связанным с конкретным модулярным преобразованием $q \rightarrow q'$. В некотором смысле это преобразование Фурье: $M(a, a') \sim e^{4\pi i a a' / \epsilon_1 \epsilon_2 + \dots}$, где поправки менее сингулярны при малых ϵ_1 и ϵ_2 .

Простейший пример может быть представлен модулярным преобразованием торической одноточечной функции (см. рис. 1), которая на стороне теории Янга–Миллса (ЯМ) описывается теорией с полем материи в присоединенном представлении с массой $m = -i\alpha + \epsilon/2 = -2i\tilde{\alpha}$:

$$\mathcal{B}(a|\alpha| - 1/\tau) = \int d\mu(a') \mathcal{M}(a, a'|\alpha) \mathcal{B}(a'|\alpha|\tau). \quad (1)$$

Здесь (см. работы [15])

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a|\alpha|\tau) &= q^{-(\nu+1)/24} \eta^\nu(q) e^{2\pi i \tau a^2 / \epsilon_1 \epsilon_2} \times \\ &\times \left(1 + 2q \frac{(\epsilon_1 - m)(\epsilon_2 - m)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{(\epsilon^2 - 4a^2 + m(m - \epsilon))}{\epsilon^2 - 4a^2} + O(q^2) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\nu = 1 - \frac{2m(\epsilon - m)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \eta(q) = q^{1/24} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k).$$

Согласно работе [16] в (1) модулярное ядро дается выражением

$$\mathcal{M}(a, a'|\alpha) = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} \int \frac{s(a + r + \tilde{\alpha})s(a - r + \tilde{\alpha})}{s(a + r - \tilde{\alpha})s(a - r - \tilde{\alpha})} e^{4\pi i r a' / \epsilon_1 \epsilon_2} dr, \quad (3)$$

Рис. 1. Диаграмма для торического конформного блока, $\Delta_a = (\epsilon^2/4 + a^2)/\epsilon_1\epsilon_2$, $\Delta_\alpha = (\epsilon^2/4 + \alpha^2)/\epsilon_1\epsilon_2$.

где мера равна $d\mu(a') = 4 \operatorname{sh}(2\pi\epsilon_1 a') \operatorname{sh}(2\pi\epsilon_2 a') da'$. Функция $s(z)$ есть “квантовый дилогарифм” [17], [18] (см. также приложение А к настоящей работе), т. е. отношение двух дигамма-функций,

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \prod_{m, n \geq 0} \frac{(m + 1/2)\epsilon_1 + (n + 1/2)\epsilon_2 - iz}{(m + 1/2)\epsilon_1 + (n + 1/2)\epsilon_2 + iz}. \quad (4)$$

В (3) и всюду далее, кроме п. А.1 приложения А, носящего справочный характер, мы не пишем параметры ϵ_1, ϵ_2 в аргументах дилогарифма: $s(z) \equiv s(z|\epsilon_1, \epsilon_2)$.

Заметим, что ядро $\mathcal{M}(a, a'|\alpha)$ зависит от внешнего момента $\tilde{\alpha}$, внутренней размерности $\Delta(\alpha)$ и центрального заряда $c = 1 + 6\epsilon^2/\epsilon_1\epsilon_2$, но не от модулярного параметра τ .

При $\alpha \rightarrow 0$ конформный блок становится чисто классическим:

$$\mathcal{B}(a|\alpha|\tau) \rightarrow \frac{1}{\eta(q)} e^{2i\pi\tau a^2/\epsilon_1\epsilon_2}$$

(последний множитель в скобках в правой части равенства (2) принимает вид $q^{1/12}\eta^{-2}(q)$ при $m = 0$), и модулярное преобразование превращается в обычное преобразование Фурье:

$$\mathcal{M}(a, a'|0)\mu'(a) \stackrel{\tilde{\alpha}=i\epsilon/2}{=} \sqrt{2} \cos\left(4\pi i \frac{aa'}{\epsilon_1\epsilon_2}\right). \quad (5)$$

Таким образом, на самом деле

$$\frac{e^{-2\pi i\tau^{-1}a^2/\epsilon_1\epsilon_2}}{\eta(-\tau^{-1})} = \int da' e^{4\pi i aa'/\epsilon_1\epsilon_2} \frac{e^{2\pi i\tau(a')^2/\epsilon_1\epsilon_2}}{\eta(\tau)} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}.$$

Заметим, что модулярное ядро удовлетворяет соотношению унитарности

$$\int d\mu(a) M(a, b) M^*(a, b') = \frac{d\mu(b')}{db'} \delta(b - b'),$$

следовательно, естественно определить след как

$$\operatorname{tr} \sim \int da' \frac{d\mu(a)}{d\mu(a')} \delta(a - a').$$

Тогда определенный таким образом след модулярного ядра (3) содержит два интеграла, которые расщепляются:

$$\int da \mathcal{M}(a, a|\alpha) = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} \iint dr da \frac{s(a + r + \tilde{\alpha})s(a - r + \tilde{\alpha})}{s(a + r - \tilde{\alpha})s(a - r - \tilde{\alpha})} e^{4\pi i r a} = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} T_+(\tilde{\alpha}) T_-(\tilde{\alpha}),$$

где

$$T_{\pm}(\tilde{\alpha}) = \int \frac{s(z + \tilde{\alpha})}{s(z - \tilde{\alpha})} e^{\pm i\pi z^2} dz. \quad (6)$$

На самом деле такие выражения, как (6), хорошо известны из теории ЧС, и этот факт открывает возможный путь к трехмерному обобщению гипотезы АГТ.

3. ПРИМЕРЫ ИЗ ТЕОРИИ УЗЛОВ

Полиномиальные инварианты узлов могут быть определены как средние вильсоновских петель вдоль узла в топологической теории ЧС [19]:

$$\langle K \rangle_R = \left\langle \text{tr}_R \text{Pexp} \oint_K A \right\rangle_{\text{CS}}. \quad (7)$$

Этот инвариант зависит от узла K , алгебры Ли G , ее представления R , константы связи теории $\hbar = \ln q = 2\pi i/k$ (иногда вместо k рассматривают $k + C_A$, как в модели ВЗНВ [20]) и, дополнительно, от монодромии u , которая описывает отклонение от периодичности поля A при обходе вокруг узла. Можно полагать, что u есть собственное значение матрицы монодромии обхода вокруг узла K . С другой стороны, можно считать, что u принимает значения в подалгебре Картана калибровочной группы $SU(2)$ и в таком случае описывает представление R , живущее на узле K .

Средние $\langle K \rangle_R$ являются разумным обобщением обычных характеров и, как все точные корреляторы, обладают скрытыми свойствами интегрируемости [21], [22]. Отметим явный пример такой скрытой структуры: средние $\langle K \rangle_R$ удовлетворяют зависящим от K разностным уравнениям по переменной R [23], которые позволяют рассматривать их как представителей семейства обобщенных q -гипергеометрических рядов. Предел $q \rightarrow 1$ для данных уравнений определяет спектральную кривую $\Sigma(K)$, а седловые точки соответствующего интегрального представления определяют дифференциал ЗВ. После этого полная зависимость от $\hbar$ может быть восстановлена с помощью топологической рекурсии [24] из этих данных ЗВ [9].

Инварианты (7) обладают тем замечательным свойством, что при $u = 0$ они становятся конечными полиномами относительно переменной $q = e^{2\pi i/k}$. В литературе эти полиномы, нормированные с помощью квантовой размерности, имеют различные названия, соответствующие выбору группы и представления. Здесь для удобства мы представим табл. 1, объясняющую это соответствие.

Таблица 1

Группа/ Представление	Фундаментальное представление	Общее представление с весом λ
$N = 0$	полиномы Конвея–Александера	—
$SU(2)$	полиномы Джонса	раскрашенные полиномы Джонса
$SU(N)$	полиномы HOMFLY	раскрашенные полиномы HOMFLY
$SO(N)$	полиномы Кауффмана	раскрашенные полиномы Кауффмана
$\{SU(N)\}_t$	суперполиномы	раскрашенные суперполиномы

Последняя строка табл. 1 описывает обобщение (квантовых) групп на характеристики Макдональда, которые приводят к однопараметрической деформации среднего (7) (t -деформации), к суперполиномам [25], [26], включающим в себя гомологии Хованова [27]. Дальнейшее обобщение функций Макдональда до уровня Аски–Вильсона–Керова остается до сих пор не исследованным.

На данный момент известны шесть типов представлений для вильсоновских средних в теории ЧС, мы кратко опишем их в следующем пункте и приведем некоторые явные примеры в приложении Б.

3.1. Представление через квантовую R -матрицу. Подробнее материал данного пункта изложен в работе [28].

Данное представление появляется, когда вычисления в теории ЧС произведены во временной калибровке $A_0 = 0$ [29]. Тогда пропагатор становится ультралокальным, и только пересечения (с) и экстремальные точки (е) в проекции узла K на плоскость xy дают вклад, так что ответ может быть схематически записан как

$$\langle K \rangle_R = \text{tr}_R \prod_{\substack{\rightarrow \\ \text{е, с}}} \mathcal{U}_e \mathcal{R}_c,$$

где упорядоченное произведение взято вдоль линии K , $\mathcal{R}$ – квантовая R -матрица в представлении R , а $\mathcal{U} = q^\rho$ – “расширение” $\mathcal{R}$ -матрицы в том же представлении. В представлении узла с помощью кос эта формула сводится к хорошо известной формуле для квантово-групповых инвариантов узлов:

$$\langle K \rangle_R = q^{-w(b_K)\Omega_2(R)} \text{qtr}_R(b_K), \quad \Omega_2(R) = \frac{\text{tr}_R(T^a T^a)}{\dim R}, \quad \text{qtr}_R b_K = \text{tr}_R b^K q^{\rho^{\otimes n}}. \quad (8)$$

Здесь $b_K \in B_n$ – элемент группы кос, представляющий узел K , т. е. замыкание этого элемента дает K ; $\Omega_2(R)$ – значение квадратичной функции Казимира в представлении R , а qtr_R – квантовый след по представлению R . Функция $w(b_K)$ есть так называемое число кручений косы b_K , оно равно сумме ориентаций пересечений:

$$b_K = \prod_{\{k\}} g_k^{n_k} \implies w(b_K) = \sum_{\{k\}} n_k.$$

Вычисление величины (8) для некоторого конкретного узла сводится к перемножению и взятию следа сравнительно больших матриц. Представление с помощью группы кос нескольких первых узлов и число соответствующих кручений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Узел	Представление группы кос	Число кручений
3 ₁	$b = g_1^3 \in B_2$	$w(\hat{b}) = 3$
4 ₁	$b = g_2^2 g_1^{-1} g_2 g_1^{-1} \in B_3$	$w(\hat{b}) = 1$
5 ₁	$b = g_1^5 \in B_2$	$w(\hat{b}) = 5$
5 ₂	$b = g_3^2 g_1 g_2^{-1} g_1 \in B_3$	$w(\hat{b}) = 4$
6 ₁	$b = g_1 g_2^{-1} g_3 g_1 g_2^{-1} g_3^{-2} \in B_4$	$w(\hat{b}) = -1$

3.2. Представление через классическую R -матрицу и квантовый ассоциатор. В данном пункте мы опираемся на результаты работы [30].

Подобное представление для $\langle K \rangle_R$ через классические, а не квантовые R -матрицы появляется в вычислении среднего (7) в голоморфной калибровке $A_{\bar{z}} = 0$. Однако вместо простой подстановки множителей q^ρ теперь необходимо добавить ассоциаторы Дринфельда [31]. В голоморфной калибровке теория сводится к интегралу Концевича для узла [32]. В этом случае можно построить представление группы кос B_n в пространстве $R^{\otimes n}$ через ассоциатор Дринфельда следующим образом: для элемента $g_k \in B_n$ справедливо соотношение $g_k \rightarrow \Psi_k R_k \Psi_k^{-1}$, где

$$R_k = \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{k-1} \otimes R \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-k}, \quad R = q^{T^a \otimes T^a}, \quad \Psi_k = \Phi_k \otimes 1^{\otimes (n-k)}$$

и Φ_k – k -й ассоциатор Дринфельда. Тогда, если $b_K \in B_n$ – коса, представляющая некоторый узел K , для квантового инварианта (7) получается выражение

$$\langle K \rangle_R = \text{qtr}_R(1)^n q^{-w(b_K)\Omega_2(R)} \text{qtr}_R(b_K). \quad (9)$$

Классическая R -матрица $R = q^{T^a \otimes T^a}$ вновь появляется только в точках пересечения проекции узла K на плоскость. Однако вместо простых расширенных факторов q^ρ необходимо вставить между ними квантовые ассоциаторы [31], одновременно действующие на k линий. Ассоциаторы Дринфельда суть решения уравнений Книжника–Замолодчикова [33] в конформной теории ВЗВН [20]. В частности, k -й ассоциатор описывает монодромию $(k+2)$ -точечной функции в модели ВЗВН, а интеграл Концевича представляет собой не более чем след монодромии, связанной с косой b_K . Более детальное описание этого представления можно найти в работах [34].

3.3. Представление через инварианты Васильева и интегралы Концевича. В пертурбативном разложении теории ЧС зависимости вильсоновских средних $\langle K \rangle_R$ от узла и групповой структуры G , R удобным образом разделяются:

$$\langle K \rangle_R = \dim_q(R) \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{n=1}^{d_m} \exp\{\hbar^m \alpha_{m,n}(K) r_{m,n}(R)\}, \quad (10)$$

где $\dim_q(R)$ – квантовая размерность представления,

$$\dim_q(R) = \frac{q^{N/2} - q^{-N/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}.$$

Величины $\alpha_{m,n}(K)$ суть примарные инварианты Васильева [35], они являются рациональными (!) числами и естественным образом могут быть представлены либо как модификации гауссова связывающего интеграла в лоренцевой калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ [36], либо как интегралы Концевича в голоморфной калибровке $A_{\bar{z}} = 0$, либо через число кручений [37] во временной калибровке $A_0 = 0$.

Групповые факторы $r_{m,n}(R)$ являются собственными значениями операторов разрезания и склейки [38] на характерах χ_R группы $GL(\infty)$ и образуют базис мультипликативно независимых собственных значений оператора Казимира порядка m .

Рис. 2. Базис независимых функций Казимира вплоть до шестого порядка.

В каждом порядке m существуют d_m независимых операторов Казимира, несколько первых значений d_m таковы:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = 2, \quad d_5 = 3, \quad d_6 = 5.$$

Функции Казимира $r_{m,n}$ суть полиномы от ранга и веса представления; в табл. 3 приведены первые четыре значения операторов Казимира для групп $SU(n)$ и $SO(n)$ в фундаментальном представлении, для группы $SU(2)$ – в представлении спина J .

ТАБЛИЦА 3

Группа	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,1}$	$r_{4,2}$
$SU(n)$	$-\frac{(n^2-1)}{4}$	$-\frac{n(n^2-1)}{8}$	$-\frac{n^2(n^2-1)}{6}$	$-\frac{(n^2+2)(n^2-1)}{16}$
$SO(n)$	$-\frac{(n-2)(n-1)}{16}$	$-\frac{(n-2)^2(n-1)}{64}$	$-\frac{(n-2)^3(n-1)}{256}$	$\frac{(n-1)(n-2)(n^2-5n+10)}{256}$
$SU(2)$	$-J(J+1)$	$-J(J+1)$	$-J(J+1)$	$2J^2(J+1)^2$

Наш выбор базиса для $r_{m,n}$ представлен на рис. 2 в форме хордовых диаграмм: окружность означает след по представлению R , а трехвалентные вершины изображают структурные константы f^{abc} алгебры. Это обозначение становится понятным из двух примеров:

$$r_{2,1} = \frac{1}{\dim_R} f^{abc} \operatorname{tr}_R(T^a T^b T^c), \quad r_{3,1} = \frac{1}{\dim_R} f^{abe} f^{ecd} \operatorname{tr}_R(T^a T^b T^d T^c).$$

В случае $G = SL(2)$ неприводимые представления R нумеруются значением спина J , и $r_{kj}(J)$ – полиномы степени k по переменной J . Ряд в экспоненте (10) может быть

переразложен по новым переменным $\hbar$ и $N = 2J + 1 = u/\hbar$:

$$F(K, \hbar, u) = \ln \langle K \rangle_R - \ln N = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \sum_{j=1}^{d_k} \alpha_{kj}(K) r_{kj}(N/\hbar) = \sum_k \hbar^k F_k(K, u). \quad (11)$$

Здесь $F_k(K, u)$ – комбинации инвариантов Васильева всех порядков. Разделение переменных K и R , очевидное в (10), становится неявным после такого переразложения, а вся информация о калибровочной группе $(r_{m,n})$ и об узле $(\alpha_{m,n})$ смешивается. Вместо этого данное разложение повторяет разложение по родам ($1/N$ -разложение) в матричных моделях, а $u = \hbar N$ играет роль константы связи 'т Хоофта.

Стоит отметить, что для некоторых узлов (называемых *гиперболическими*) функция $F(K)$ ведет себя как $V(K, u)\hbar^{-1}$ при малых $\hbar$ [39], несмотря на то что все члены в разложении отвечают положительным степеням $\hbar$. Это довольно типично для разложения по родам: вклад каждого отдельно взятого рода оказывается сходящимся рядом, тогда как сумма по всем родам расходится. Данную сумму можно проанализировать с помощью методов суммирования Паде (см. работы [40], [41] для современного описания в контексте матричных моделей). Значение коэффициента $V(K, u)$ при $u = 1$ совпадает с объемом области $S^3 \setminus K$ в единственном образом определенной гиперболической метрике [42]; ситуация становится гораздо более интересной в случае негиперболических узлов (торических или сателлитных) (см. графики в приложении B).

3.4. Представление через квантовый дилогарифм. В работе [23] предложена систематическая интерпретация полиномиальных инвариантов (7) калибровочной группы $SU(2)$ со спином J как обобщенных q -гипергеометрических функций; такое представление ранее широко использовалось в конкретных примерах. Это означает, что вильсоновские средние могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\langle K \rangle_J = \dim_q(R) \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{(q, N)_{k_1} \dots (q, N)_{k_{i_1}}}{(q, N)_{k_{i_2}} \dots (q, N)_{k_n}} q^{p_2(k_1, \dots, k_n)}. \quad (12)$$

Здесь $N = 2J + 1$, а $(q, N)_k$ – q -символ Похгаммера,

$$(q, N)_k = \prod_{i=1}^k (q^{(N-i)/2} - q^{-(N-i)/2}),$$

и $p_2(k_1, \dots, k_n)$ – заданная квадратичная функция. Число k_i в сумме (12), квадратичный полином p_2 и распределение символов Похгаммера определяются узлом K , а пределы суммирования – спином J . Существование такого представления для узлов прямо следует из AJ -предположения для раскрашенных полиномов Джонса [43], которое утверждает, что $\langle K \rangle_j$ является решением гипергеометрического разностного уравнения (см. также п. 3.6 ниже). В то же время символы Похгаммера могут быть выражены через отношение квантовых дилогарифмов,

$$(q, N)_k = (-i)^k \frac{s(i\epsilon_2(N-1-k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2(N-1) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)},$$

а формула (12) может схематически быть переписана как

$$\langle K \rangle_J = \dim_q(R) \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{s_{k_1} \dots s_{k_{i_1}}}{s_{k_{i_2}} \dots s_{k_n}} q^{p_2(k_1, \dots, k_n)}.$$

Это выражение задает дискретную версию инвариантов Хиками.

3.5. Формализм Хиками в теории ЧС. Идея формализма Хиками заключается в вычислении статистических сумм ЧС с использованием триангуляции трехмерного многообразия M , т. е. его разложения на простейшие симплексы, тетраэдры. Каждый тетраэдр имеет четыре грани, из которых две можно считать белыми, а две другие – черными, черные грани склеиваются исключительно с белыми. Каждому элементу ставится в соответствие число p для белых граней и число p^* для черных граней. Когда две грани совпадают, совпадают и соответствующие числа, $p_i = p_j^*$. Наконец, каждому тетраэдру ставится в соответствие функция $G(p_1^*, p_2^* | p_1, p_2)$ и вычисляется интеграл по всем p -переменным на отождествленных гранях. В этом случае с каждой триангуляцией сферы S^3 ассоциирован многократный интеграл по всем p -переменным, по одной на каждые 2-грани триангуляции:

$$H(K|u) = \int \prod_{\text{симплексы}} dp_{i_1} dp_{i_2} dp_{i_1} dp_{i_2} G(p_{i_1}^*, p_{i_2}^* | p_{i_1}, p_{i_2}) \times \\ \times \prod_{2\text{-грани}} \delta_{p_{k_m}^* - p_{k_n}} \prod_{1\text{-циклы}} \delta\left(\sum_j p_j - u\right).$$

В то же время геометрически с системой склеенных тетраэдров можно связать узел K , более того, u -переменные, которые связаны с 1-циклами, могут быть интерпретированы как $U(1)$ -монодромии вокруг узла K . Важнее всего, что функции G , как показано в работе [14], имеют вид

$$G(p_{i_1}^*, p_{i_2}^* | p_{i_1}, p_{i_2}) = \delta(p_1 + p_2 - p_1^*) s(p_2^* - p_2 - i\pi + \hbar) e^{p_1(p_2^* - p_2)/2\hbar + \hbar^2/6},$$

и интеграл Хиками $H(K|u)$ для данного K имеет тот же вид, что и вильсоновское среднее $\langle K \rangle_R$ из п. 3.4 в терминах переменных $(\hbar, u)$, только сумма заменена интегралом (см. примеры в приложении Б). Переход от суммы к интегралу связан с переходом от компактных к некомпактным группам.

3.6. Спектральные кривые и топологическая рекурсия. Как минимум в случае $G = SL(2)$ среднее $\langle K \rangle_R$ может обращаться в ноль при действии на него не зависящего от K оператора, т. е. оно удовлетворяет рекуррентному соотношению по спину J ; это утверждение иногда называется AJ -гипотезой [43] (для нескольких первых примеров, кроме $SL(2)$, см. статьи [44], [45]). В переменной $u = N\hbar$, где $N = D_{2J+1} = 2J + 1$, получаем

$$\mathcal{A}(e^{\hbar\partial_u}, e^u) \langle K \rangle_R = 0. \quad (13)$$

В пределе $\hbar = 0$ этот оператор превращается в (полиномиальную) функцию, а разностное уравнение – в алгебраическое уравнение

$$\mathcal{A}(w, \lambda) = 0, \quad (14)$$

задающее спектральную кривую $\Sigma(K)$. Далее можно определить дифференциал ЗВ $dS = \ln w d \ln \lambda$. В типичных случаях узлов 4_1 и $m009$ уравнение (14) является квадратичным по переменной w (заметим, что дополнительный $U(1)$ -фактор $w - 1$ отщепляется, что уменьшает степень уравнения на единицу):

$$\Sigma(K): \mathcal{A}(w, \lambda) = w + \frac{1}{w} - 2f\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 0, \quad w_{\pm}(\lambda) = f \pm \sqrt{f^2 - 1}, \quad (15)$$

и

$$dS = (\ln w_+(\lambda) - \ln w_-(\lambda)) d \ln \lambda = \ln \frac{f + \sqrt{f^2 - 1}}{f - \sqrt{f^2 - 1}} d \ln \lambda. \quad (16)$$

Свободная энергия (11) $F = \ln \langle K \rangle_R$ фактически задает препотенциал ЗВ, который можно восстановить во всех порядках разложения по родам по $\hbar$ из этих данных $(\Sigma(K), dS)$ с помощью метода топологической рекурсии из работ [24] (см. детальные примеры такой реконструкции в работе [9]). Можно поинтересоваться, что описывает соответствующая теория ЗВ. Легко распознать в (15) и (16) формулы из статей [46], в которых рассматривается пятимерная версия классической теории ЗВ в терминах релятивистской интегрируемой системы Тоды. Тогда соотношение (13) должно представлять собой соответствующее уравнение Бакстера, которое, как известно [47], [48], описывает деформацию Некрасова–Шаташвили (НШ) классической теории ЗВ (или, что то же самое, предел НШ в полной теории ЗВ). Это замечание предполагает новый вид дуальности АГТ, которая рассмотрена в разделе 5. Если уравнение $\mathcal{A}(w, \lambda) = 0$ не сводится к квадратному по w , анализ становится более сложным.

4. ТРЕХМЕРНОЕ СООТНОШЕНИЕ АГТ

В статье [1] предлагается отождествить модулярное ядро $M(a, a')$, связанное с модулярным преобразованием $S(q) \rightarrow S(q')$ римановой поверхности с отмеченной точкой, и амплитуду в теории ЧС на трехмерном многообразии, которое является цилиндром гомотопии $S(q)$ в $S(q')$. В частности, след оператора $M(a, a')$ должен совпадать с инвариантом узла K , который образован траекторией отмеченной точки при гомотопии в трехмерном многообразии, а внешние моменты – с монодромией вдоль узла. Следует отметить, что K зависит от выбора модулярного преобразования. В самом деле, существует понятная аналогия между величинами (18) и (19), определенными ниже. Каждая из них является многократным интегралом от произведения квантовых дилогарифмов $s(\cdot)$ с естественным отождествлением параметров [1]

$$2\pi i \hbar = \ln q = \frac{2\pi i}{k + C_G} = 2\pi i b^2 = \frac{2\pi i \epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (17)$$

Однако величины (18) и (19) отличаются числом входящих в них s -функций, числом аргументов и контурами интегрирования. Возможно, наиболее сильное отличие заключается в том, что переменные интегрирования подчиняются “законам сохранения” в выражениях для инвариантов узлов, но этого не происходит со следом матрицы монодромии. Чтобы убедиться в этом, применим следующее свойство s -функции: $s(z) = 1/s(-z)$. С его помощью мы можем привести интеграл к каноническому виду, когда все s -функции находятся в числителе:

$$\prod_i \int_{C_i} dp_i \prod_m s(A_{m,i} p_i + B_m) e^{C_{ij} p_i p_j + D_i p_i + E}.$$

Тогда в (6) $\sum_m A_{m,i} = 0$, но такое соотношение не выполняется для инвариантов узлов, по крайней мере для некоторых i , т. е. для некоторых переменных интегрирования. Простейший пример этого несоответствия возникает между выражением для следа торического преобразования

$$T_{\pm}(\alpha) = \int dz \frac{s(z + \tilde{\alpha})}{s(z - \tilde{\alpha})} e^{\pm i\pi z^2} \quad (18)$$

и выражением для среднего Вильсона–Хиками, связанного с узлом 4_1 :

$$\langle 4 \rangle_1 \sim \int s(z+u)s(z-u)e^{6\pi iuz/\epsilon_1\epsilon_2} dz. \quad (19)$$

Таким образом, мы видим что наряду со схожим видом обеих конструкций существуют серьезные отличия, которые не позволяют явно сформулировать трехмерное соответствие.

5. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ВЕРСИИ СООТВЕТСТВИЯ АГТ

Кажущаяся несостоятельность соответствия АГТ в $(3+3)$ -случае может привлечь дополнительное внимание к возможным альтернативным вариантам данного соответствия: можно надеяться, что существует много различных соответствий типа АГТ. Простейшая возможность заключается в обобщении известного $(2+4)$ -случая на случай $3+5$ измерений, т. е. в отождествлении величин в трехмерной теории ЧС с величинами в пятимерной теории типа ЯМ. Это, несомненно, должно быть более простым упражнением. Уравнения в п. 3.6 описывают инварианты узлов, но в (15) легко узнать спектральную кривую для релятивистской системы Тоды, а в (16) – соответствующий дифференциал ЗВ [46]. Таким образом, эти уравнения задают соответствие между трехмерной теорией ЧС и пятимерной версией теории ЗВ, сформулированной как непосредственная q -деформация обычной четырехмерной теории. В свете данного соответствия разностное уравнение (13) отождествляется с уравнением Бакстера для той же интегрируемой системы. В то же время уравнения Бакстера возникают [47] в пределе НШ [49] препотенциала Лосева–Мура–Некрасова–Шаташвили (ЛМНШ) [50], таким образом получается новое соответствие типа АГТ, дополняющее обычное соответствие АГТ [51]:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{трехмерная теория ЧС} & \overset{\text{новое АГТ}}{\longleftrightarrow} & \\ \text{новое АГТ} & \overset{\text{новое АГТ}}{\longleftrightarrow} & \text{предел НШ препотенциала ЛМНШ} & \overset{\text{обычное АГТ}}{\longleftrightarrow} & \\ & \overset{\text{обычное АГТ}}{\longleftrightarrow} & \text{конформные } q\text{-блоки Вирасоро.} & & \end{array}$$

Более точно, в соответствии с работой [47] нужно ассоциировать с решением уравнения Бакстера, т. е. с $\langle K \rangle_R$, дифференциал ЗВ, монодромии которого вокруг A - и B -циклов на спектральной кривой дают выражения для пятимерных функций Некрасова в пределе НШ с помощью уравнений ЗВ.

Существует несколько интересных фактов, которые стоит упомянуть уже на этой стадии. Формулы с дилогарифмами для инвариантов узлов из пп. 3.4 и 3.5 дают интегральные представления решений уравнений (13). Они схожи с решениями из работы [52] для открытой квантовой релятивистской цепочки Тоды, при этом для закрытой цепочки таких решений нет, однако решение (15) относится именно к последнему типу! Дело в том, что, во-первых, решение (13) определяет уравнение Бакстера в некоторой специальной точке пространства модулей: для некоторых специальных значений “энергий”. Таким образом, то, что решение в данной форме недоступно в точке общего положения, не означает, что оно не может существовать в специальных точках. Во-вторых, поскольку классическое решение (15) относится к релятивистскому типу, его квантование неоднозначно, а (13) не является

стандартной версией уравнения Бакстера, рассматриваемого в литературе. Важно отметить, что, когда мы имеем дело с разностными (а не дифференциальными) уравнениями, количество решений оказывается бесконечно большим. Чтобы справиться с этой неоднозначностью, рассматривают два разностных уравнения там, где могло бы быть одно дифференциальное. Эта пара уравнений обычно связана симметрией $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, которая явно нарушена в нашей конструкции инвариантов узлов. В частности, она явно нарушена в основном соотношении АГТ (17).

Остается нерешенным интересный вопрос: что должно заменить инварианты узлов, если эту новую дуальность АГТ поднять до полной деформации ЛМНШ пятимерной теории, а не только в пределе НШ?

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После открытия соотношения АГТ [13], с помощью которого двумерные конформные теории вписываются в общий контекст теории ЗВ и интегрируемых теорий [53], немедленно был начат поиск его обобщений, которые сделали бы то же самое с трехмерными теориями ЧС. Цель настоящей работы – перенести рассмотрение трехмерного соотношения АГТ с качественного на количественный уровень. Это стало возможным благодаря прогрессу в теории инвариантов узлов, краткий обзор которой приведен в разделе 3 настоящей работы (на самом деле некоторые следствия самой теории ЧС до сих пор не получены, что, однако, в основном вызвано недостаточным интересом со стороны исследователей, занимающихся квантовой теорией поля). При наличии непосредственных явных формул легко протестировать различные гипотезы. На этом пути мы встретили несколько проблем, возникающих при изучении гипотезы [1], которая связывает на основе соответствия АГТ инварианты узлов с модулярными ядрами. Вместо этого мы продемонстрировали, как эти инварианты при помощи соответствия АГТ связываются с пятимерными суперсимметричными теориями ЯМ. Это более прямолинейная и менее интригующая возможность, тем не менее также заслуживающая внимания.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства квантового дилогарифма

Серьезной проблемой при обсуждении трехмерного соотношения АГТ является отсутствие общих обозначений: специалисты из разных областей для одних и тех же величин используют различные обозначения, которые отличаются разного рода ремасштабированиями. Цель данного приложения – привести список некоторых соотношений между различными определениями квантовых дилогарифмов, используемыми в литературе. Также мы демонстрируем прием, необходимый для взятия безмассового предела $\alpha \rightarrow 0$ модулярного ядра $M(a, a')$, т. е. выводим уравнение (5).

А.1. Различные дилогарифмы. “Квантовый дилогарифм” [18] определяется как отношение двух дигамма-функций [17]:

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \prod_{m, n \geq 0} \frac{(m + 1/2)\epsilon_1 + (n + 1/2)\epsilon_2 - iz}{(m + 1/2)\epsilon_1 + (n + 1/2)\epsilon_2 + iz} = \frac{\Gamma_2(\epsilon/2 + iz|\epsilon_1, \epsilon_2)}{\Gamma_2(\epsilon/2 - iz|\epsilon_1, \epsilon_2)}.$$

Он обладает несколькими свойствами периодичности:

$$\begin{aligned} s\left(z - \frac{i\epsilon_2}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) &= 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{\epsilon_1}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon_2}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right), \\ s\left(z - \frac{i\epsilon_1}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) &= 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{\epsilon_2}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon_1}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right), \\ s\left(z - \frac{i\epsilon}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) &= 4 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi z}{\epsilon_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi z}{\epsilon_2}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Определение квантового дилогарифма позволяет найти его интегральное представление

$$i \ln s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_0^\infty \frac{dw}{w} \left(\frac{\sin(2zw)}{2 \operatorname{sh}(\epsilon_1 w) \operatorname{sh}(\epsilon_2 w)} - \frac{z}{\epsilon_1 \epsilon_2 w} \right),$$

с помощью которого можно получить асимптотическую формулу

$$i \ln s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\pi z^2}{2\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{\pi}{24} \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + i \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n(1/2)}{n!} \left(2\pi i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^{n-1} \operatorname{Li}_{2-n}(-e^{2\pi z/\epsilon_1}). \quad (\text{A.2})$$

Также полезно следующее пересуммированное разложение:

$$\begin{aligned} i \ln s(z_0 + z|\epsilon_1, \epsilon_2) &= \frac{\pi(z_0 + z)^2}{2\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{\pi}{24} \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \\ &+ \sum_{k=-1}^\infty \sum_{j=0}^\infty \frac{i^{k+1} B_{k+1}(1/2)}{(k+1)! j!} (2\pi)^{k+j} \frac{\epsilon_2^k}{\epsilon_1^{k+j}} \operatorname{Li}_{1-j-k}(-e^{2\pi z_0/\epsilon_1}) z^j. \end{aligned}$$

Квантовый дилогарифм симметричен по параметрам ϵ_1 и ϵ_2 , однако в последнем равенстве мы явно выбрали ϵ_2 в качестве малого параметра; такое разложение играет важную роль в пределе НШ.

Приведенное выше определение квантового дилогарифма является обычным в контексте гипотезы АГТ, где явно представлены параметры $\epsilon_{1,2}$, однако в литературе встречается иной вариант

$$S_b(z) = \exp \left\{ \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dw}{w} \left(\frac{\sin(2zw)}{2 \operatorname{sh}(bw) \operatorname{sh}(b^{-1}w)} - \frac{z}{w} \right) \right\}, \quad (\text{A.3})$$

так что

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = S_{\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}} \left(\frac{z}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \right).$$

А.2. Модулярное ядро. В этом пункте мы применяем стандартный прием для вычисления модулярного ядра (3) в простейшем пределе нулевой внешней размерности $\tilde{\alpha} \rightarrow i\epsilon/2$. Рассмотрим модулярное ядро в этом пределе сначала наивным образом, тогда из уравнения (A.1) легко получить, что

$$M(a, a') = 2^{3/2} \int dr \frac{e^{4\pi i a' r}}{16 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_2}\right)}.$$

Знаменатель подынтегрального выражения обладает двойными полюсами, которые склеиваются в пределе $\tilde{\alpha} \rightarrow i\epsilon/2$, и выбранный контур интегрирования проложен

как раз между ними. Следовательно, необходимо рассмотреть данный предел более аккуратно:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a, a'|0) = & \oint_{r=-a} dr \frac{s(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} \frac{e^{4\pi i a' r}}{4 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_2}\right)} + \\ & + \oint_{r=a} dr \frac{s(a-r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a-r-i\epsilon/2-i\lambda)} \frac{e^{4\pi i a' r}}{4 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_2}\right)}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{s(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} &= \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 - i(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 + i(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)} \times \\ &\times \frac{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 + i(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)}{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 - i(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} = \\ &= \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m+1)\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2 - i(a+r+i\lambda)}{m\epsilon_1 + n\epsilon_2 + i(a+r+i\lambda)} \times \\ &\times \frac{(m+1)\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2 + i(a+r-i\lambda)}{m\epsilon_1 + n\epsilon_2 - i(a+r-i\lambda)} \underset{m,n=0}{\sim} \\ &\underset{m,n=0}{\sim} \frac{1}{(a+r)^2 - \lambda^2} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \delta(a+r). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\mathcal{M}(a, a'|0) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cos(4\pi i a a' / \epsilon_1 \epsilon_2)}{\mu'(a)}.$$

А.3. Средние в теории ЧС. Для вычисления стандартных величин в теории ЧС обычно используется иное определение дилогарифма. Например, среднее для узла 4_1 обычно записывается как функция от константы связи и параметра монодромии узла u (заметим, что $\hbar$ в наших формулах отличается от $\hbar$ в [14] на множитель 2):

$$\langle 4_1 \rangle = H(u, \hbar) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar}} \int dp \frac{\Phi_{\hbar}(p + i\pi + \hbar/2)}{\Phi_{\hbar}(-2u - p - i\pi - \hbar/2)} e^{-4u(u+p)/\hbar - u},$$

где

$$\Phi_{\hbar}(z) = \Phi\left(\frac{z}{\pi i \hbar} \middle| \frac{\hbar}{2\pi i}\right), \quad \Phi(z|\tau) = \exp\left(\frac{1}{4} \int \frac{dw}{w} \frac{e^{2xz}}{\operatorname{sh} w \operatorname{sh} \tau w}\right).$$

В ранее рассмотренном контексте конформной теории поля можно встретить похожую функцию, однако с измененными параметрами,

$$e_b(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int \frac{dw}{w} \frac{e^{-2izw}}{\operatorname{sh}(bw) \operatorname{sh}(b^{-1}w)}\right) = \Phi(-ibz|b^2),$$

так что

$$\langle 4_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\pi i b^2)}} \int dp \frac{e_b((p + i\pi + \pi i b^2)/2\pi b)}{e_b((-2u - p - i\pi - \pi i b^2)/2\pi b)} e^{-2\pi i b^2 u(u+p)/2\pi b^2 - u}.$$

Вводя новые переменные $z = p/2\pi b$, $u' = u/2\pi b$, $Q = b + b^{-1}$, получаем

$$\langle 4_1 \rangle = \frac{2\pi b}{\sqrt{2\pi(\pi i b^2)}} \int dz \frac{e_b(z + iQ/2)}{e_b(-2u' - z - iQ/2)} e^{8\pi i u'(u' + z) - 2\pi b u'}.$$

Заметим, что функции e_b и S_b (A.3) схожи, но все-таки слегка отличаются, в частности множителем: $e_b(z) = e^{\pi i z^2/2} e^{-i\pi(2-Q^2)/24} S_b(z)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle &= \sqrt{-2i} \int dz \frac{S_b(z + iQ/2)}{S_b(-2u' - z - iQ/2)} e^{6\pi i u'(z + u') - \pi u'(b - b^{-1})} \underset{z \rightarrow z - u' - iQ/2}{=} \\ &= \underset{z \rightarrow z - u' - iQ/2}{\sqrt{-2i}} \int dz S_b(z - u') S_b(z + u') e^{6\pi i u' z + 2\pi u'/b + 4\pi u' b}. \end{aligned}$$

Наконец, то же самое выражение в терминах дилогарифмов $s(z)$ имеет вид

$$H\left(\frac{2\pi u}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}, \pi i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) = \sqrt{\frac{-2i}{\epsilon_1 \epsilon_2}} \int dz s(z - u) s(z + u) \exp\left\{\frac{6\pi i u z}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{2\pi u}{\epsilon_2} + \frac{4\pi u}{\epsilon_1}\right\}.$$

A.4. Символы Похгаммера как отношения дилогарифмов. Рассмотрим символ Похгаммера

$$\begin{aligned} (q, N)_k &= \prod_{j=1}^k (q^{(N-j)/2} - q^{-(N-j)/2}) = 2^k \prod_{j=1}^k \text{sh}(\pi i \hbar (N - j)), \\ (q, N)_k^* &= \prod_{j=1}^k (q^{(N+j)/2} - q^{-(N+j)/2}) = 2^k \prod_{j=1}^k \text{sh}(\pi i \hbar (N + j)). \end{aligned}$$

Используя условия периодичности (A.1), можно переписать произведение гиперболических синусов как

$$\text{sh}\left(\frac{\pi i \epsilon_2 z}{\epsilon_1}\right) = -\frac{i}{2} \frac{s(i\epsilon_2 z + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2 z + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)},$$

т. е. символы Похгаммера задаются также формулами

$$(q, N)_k = (-i)^k \prod_{j=1}^k \frac{s(i\epsilon_2(N - 1 - j) + i\epsilon/2)}{s(i\epsilon_2(N - j) + i\epsilon/2)} = (-i)^k \frac{s(i\epsilon_2(N - 1 - k) + i\epsilon/2)}{s(i\epsilon_2(N - 1) + i\epsilon/2)} \quad (\text{A.4})$$

и, аналогично,

$$(q, N)_k^* = (-i)^k \frac{s(i\epsilon_2(N) + i\epsilon/2)}{s(i\epsilon_2(N + k) + i\epsilon/2)}.$$

Заметим, что среднее $\langle 4_1 \rangle$ может быть выражено через символ $(q, N/\sqrt{\hbar})_{k/\sqrt{\hbar}}$, который обладает симметрией относительно замены $\hbar \rightarrow \hbar^{-1}$:

$$\langle 4_1 \rangle = \frac{i}{\text{ch}(i\epsilon_2(N - 1/2) + i\epsilon/2)} \sum_{k \in \mathbb{Z} + 1/2} (-1)^k \frac{s(i\epsilon_2(N - 1/2 - k) + i\epsilon/2)}{s(i\epsilon_2(N - 1/2 + k) + i\epsilon/2)}.$$

В пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $i\epsilon_2(N - 1/2) + i\epsilon/2 = \tilde{u}$ сумма заменяется интегралом, в результате мы приходим к выражению

$$\langle 4_1 \rangle = -\frac{1}{\epsilon_2 \text{ch } \tilde{u}} \int dz e^{\pi z/\epsilon_2} s(z - \tilde{u}) s(z + \tilde{u}),$$

которое крайне похоже на формулы Хиками, где, однако, в подынтегральном выражении не появляется экспоненциальный множитель.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Примеры инвариантов узлов

В данном приложении мы описываем несколько простейших примеров узлов, а также вычисляем некоторые инварианты из раздела 3: для каждого узла K мы находим соответствующий аннулирующий оператор $\mathcal{A}$, спектральную кривую, соответствующий элемент группы кос, комбинацию классической R -матрицы и ассоциатора Дринфельда, а также разложение $F = \ln \langle K \rangle_R$ по примитивным инвариантам Васильева и интегральное представление Хиками $H(K|u)$ через подходящую комбинацию s -функций.

Б.1. Тривиальный узел (окружность без узлов).

Б.1.1. Представление через квантовую R -матрицу. Простейшая коса, представляющая тривиальный узел U_0 , – это коса из одной струны, т. е. U_0 дается замыканием единственного элемента группы B_1 : $b_{U_0} = 1 \in B_1$. Таким образом, значение полиномиального инварианта определяется следующим характером:

$$\langle U_0 \rangle = \text{qtr}_R(1) = \text{tr}_R(q^\rho) = \chi_R(z_i) \Big|_{z_i = q^{N-2i+1}},$$

где χ_R – характер представления R (т. е. соответствующий полином Шура).

Б.1.2. Представление через ассоциатор Дринфельда. Формула (9) для тривиального узла дает среднее в виде следа первого ассоциатора Дринфельда Φ_3 (так называемый “hump”). Связь с инвариантом из предыдущего пункта не является вполне тривиальной: $\langle \text{hump} \rangle$ задается как обратное значение $\langle U_0 \rangle$. Ассоциатор является тензором с шестью индексами, и соответствующий след получается как следующая свертка:

$$\langle \text{hump} \rangle = \sum_{i,k,m=1}^{\dim_R} (\Phi_3)_{k,m,m}^{i,i,k}. \quad (\text{Б.1})$$

Для случая фундаментального представления группы $SU(N)$ данная сумма рассчитывается явно, и результат определяется некоторым значением гипергеометрической функции (см. работу [34]):

$$\langle \text{hump} \rangle = \frac{N}{F([(N-1)\hbar, (N+1)\hbar], [1+N\hbar], 1)} = \frac{N(q^{1/2} - q^{-1/2})}{q^{N/2} - q^{-N/2}} = \frac{N}{[N]_q}.$$

Б.1.3. Представление через инварианты Васильева. Несколько первых инвариантов Васильева таковы:

$$\alpha_{2,1} = -\frac{2}{3}, \quad \alpha_{3,1} = 0, \quad \alpha_{4,1} = \frac{2}{45}, \quad \alpha_{4,2} = -\frac{2}{45}, \quad \alpha_{5,1} = \alpha_{5,2} = \alpha_{5,3} = 0.$$

Например, используя табл. 3 и данные инварианты для представления группы $SU(2)$ спина J , мы получаем¹⁾:

$$\begin{aligned} \langle U_0 \rangle_J &= N \exp \left\{ h^2 \frac{2}{3} J(J+1) - h^4 \frac{2}{45} (J+1)(2J^2 + 2J + 1)J + \dots \right\} = \\ &= \frac{q^{N/2} - q^{-N/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = [N]_q, \quad N = 2J + 1. \end{aligned}$$

¹⁾Здесь и далее по тексту мы используем разложение по параметру $h := 2\pi i\hbar$, так что $q = e^h$.

Б.1.4. *А-полином*. Раскрашенный полином Джонса в случае отсутствия узла,

$$K_N(U_0|q) = \langle U_0 \rangle_J = \frac{q^{J+1/2} - q^{-(J+1/2)}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \frac{q^{N/2} - q^{-N/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

задается характером (Б.1) и, таким образом, удовлетворяет квантовому уравнению Лапласа на решетке Картана:

$$K_{N+1} - [2]_q K_N + K_{N-1} = 0.$$

В результате *А-полином* тривиального узла может быть определен формулой $\mathcal{A}(l, m) = (l - 1)^2/2$, так что квантовый *А-полином* совпадает с *q-лапласианом*:

$$\hat{\mathcal{A}} = \Delta_q = \hat{l} - [2]_q + \hat{l}^{-1}, \quad \Delta_q K_N = 0,$$

где $\hat{l}$ и $\hat{m}$ действуют на полином Джонса как $\hat{l}K_N = K_{N+1}$ и $\hat{m}K_N = q^N K_N$.

Б.1.5. *Полиномиальные инварианты*. Раскрашенные полиномы HOMFLY задаются формулой [54]

$$\langle U_0 \rangle_Y = \dim_q(Y) = \prod_{i,j \in Y} \frac{q^{(N+j-i)/2} - q^{-(N+j-i)/2}}{q^{h(i,j)/2} - q^{-h(i,j)/2}}.$$

Здесь Y – диаграмма Юнга соответствующего представления группы $SU(N)$ и $h(i, j)$ – длина “крюка” клетки Y .

Суперполином равен

$$P_0(a, q, t) = \frac{a^{1/2} - a^{-1/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}.$$

Раскрашенный суперполином можно найти в работе [26] (см. формулы (67), (68) в указанной работе).

Б.2. Узел 3_1 .

Б.2.1. *Представление через квантовую R-матрицу и ассоциатор Дринфельда*. Полиномиальный инвариант для узла 3_1 может быть построен с использованием формул (8) и (9). В данном случае 3_1 является замыканием следующего элемента: $b_{3_1} = g_1^3 \in B_2$. В этом представлении узел имеет три положительных самопересечения ($w(b) = 3$) и две струны (в (9) $n = 2$).

Б.2.2. *Представление через инварианты Васильева*. Несколько первых инвариантов Васильева для узла 3_1 таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1} &= 4, & \alpha_{3,1} &= -8, & \alpha_{4,1} &= \frac{62}{3}, & \alpha_{4,2} &= \frac{10}{3}, \\ \alpha_{5,1} &= -\frac{176}{3}, & \alpha_{5,2} &= -\frac{31}{3}, & \alpha_{5,3} &= -8. \end{aligned}$$

Например, использование табл. 3 для группы $SU(2)$ дает

$$\begin{aligned} \langle 3_1 \rangle &= [2J + 1]_q \exp \left\{ -4J(1 + J)h^2 + 8J(1 + J)h^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}J(1 + J)(-31 + 10J + 10J^2)h^4 + \dots \right\}, \quad h = 2\pi i\hbar. \end{aligned}$$

Б.2.3. *Представление через квантовый дилогарифм.* Раскрашенный полином Джонса для узла 3_1 при $N = 2J + 1$ может быть представлен в гипергеометрической форме:

$$K_N(3_1|q) = [N]_q \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i q^{i(i+3)/2} (q, N)_i (q, N)_i^* \equiv [N]_q J_N(3_1|q). \quad (\text{Б.2})$$

Используя (А.4), мы получаем

$$J_N \sim \sum_{k=0}^{N-1} q^{k(k+3)/2} \frac{s(i\epsilon_2(N-1-k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2(N-1) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)} \times \\ \times \frac{s(i\epsilon_2 N + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2(N+k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}.$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ при $|q| > 1$ имеем

$$J_N \sim q^{3N^2/2 - 3N/4}. \quad (\text{Б.3})$$

Б.2.4. *А-полином и спектральная кривая для узла 3_1 имеют следующий вид:*

$$\mathcal{A}_{3_1}(l, m) = m^3 + l, \quad \Sigma_{3_1} = \{(m, l) \in \mathbb{C}^2: m^3 + l = 0\}.$$

Заметим, что данная спектральная кривая соответствует сфере и открытой релятивистской цепочке Тоды. Чтобы найти квантовый $\mathcal{A}$ -полином, заметим, что полином Джонса для узла 3_1 ,

$$J_{N+1} + q^{3N+2} \frac{1 - q^N}{1 - q^{N+1}} J_N = q^N \frac{q^{2N+1} - 1}{q^{N+1} - 1}, \quad (\text{Б.4})$$

является решением дифференциального уравнения (Б.2), которое может быть переписано как

$$\frac{1}{\widehat{B}(\widehat{m})} \hat{A}(\hat{l}, m) J_N(q) = 1, \quad (\text{Б.5})$$

где $\hat{A} = q\widehat{m}^3(\widehat{m} - 1) + (q\widehat{m} - 1)\hat{l}$, $\widehat{B} = (q\widehat{m}^2 - 1)\widehat{m}$. Уравнение (Б.5) может быть также записано в форме

$$\sqrt{\frac{q}{\widehat{m}^3}} \frac{1 - \widehat{m}}{1 - q\widehat{m}^2} (\hat{l} + q^{3/2}\widehat{m}^3) K_N(q) = 1. \quad (\text{Б.6})$$

В пределе больших N данное уравнение принимает вид

$$(\hat{l} + q^{3/2}\widehat{m}^3) K_N(q) = 0, \quad (\text{Б.7})$$

т. е. квантовый $\mathcal{A}$ -полином дается выражением²⁾

$$\hat{\mathcal{A}}_{3_1}(\hat{l}, \widehat{m}|q) = \hat{l} + q^{3/2}\widehat{m}^3.$$

Заметим, что полином (Б.3) является решением уравнения (Б.7). Отметим, что для конечных N уравнение (Б.6) может быть переписано в виде [55]

$$\hat{\mathcal{A}}_G J_N(q) \equiv (\hat{l} - 1) \frac{1}{\widehat{B}(\widehat{m})} \hat{A}(\hat{l}, \widehat{m}) J_N(q) = 0,$$

²⁾В литературе часто используется другой выбор переменных: $q \rightarrow q^2$ и $\widehat{m} \rightarrow \widehat{m}^2$.

где

$$\hat{A}_G = -\frac{1}{q\hat{m}} \frac{1-q^2\hat{m}}{1-q^2\hat{m}^2} \hat{l}^2 - \left[\frac{1}{\hat{m}} \frac{1-q\hat{m}}{1-q\hat{m}^2} - q^2\hat{m}^2 \frac{1-q\hat{m}}{1-q^3\hat{m}} \right] \hat{l} - q^2\hat{m}^2 \frac{1-\hat{m}}{1-q^2\hat{m}}.$$

Б.2.5. Полиномиальные инварианты. Раскрашенные полиномы HOMFLY известны только для случая группы $SU(3)$ (см. статью [45], теорема 1).

Суперполиномы (не раскрашенные) имеют вид

$$P_{3_1}(a, q, t) = P_0(a, q, t)(aq^{-1} + aqt^2 + a^2t^3).$$

Подставляя $t = -1$, мы получаем из суперполинома обычный полином HOMFLY. Если в нем положить $a = q^N$, то это соответствует $SU(N)$ -теории ЧС, случай $a = q^2$ дает обычный полином Джонса, а случай $a = q^0 = 1$ – полином Александера.

Б.3. Узел 4_1 .

Б.3.1. Представление через квантовую R -матрицу и ассоциатор Дринфельда. Полиномиальный инвариант для узла 4_1 может быть построен с использованием формул (8) и (9). В данном случае узел 4_1 может быть получен как замыкание следующего элемента: $b_{4_1} = g_2^2 g_1^{-1} g_2 g_1^{-1} \in B_3$. В этом представлении узел имеет три положительно ориентированных и два отрицательно ориентированных пересечения ($w(b) = 1$) и три струны (в (9) $n = 3$).

Б.3.2. Представление через инварианты Васильева. Несколько первых инвариантов Васильева для узла 4_1 таковы:

$$\alpha_{2,1} = -4, \quad \alpha_{3,1} = 0, \quad \alpha_{4,1} = \frac{33}{3}, \quad \alpha_{4,2} = \frac{14}{3}, \quad \alpha_{5,1} = \alpha_{5,2} = \alpha_{5,3} = 0.$$

Например, использование табл. 3 для $SU(2)$ дает

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle = [N]_q \exp \Big\{ & J(J+1)h^2 \left[4 + \frac{2}{3}(14J^2 + 14J - 17)h^2 + \right. \\ & + \frac{1}{90}(2416J^4 + 4832J^3 - 9212J^2 - 11628J + 8013)h^4 + \\ & + \frac{1}{1260}(109552J^6 + 328656J^5 - 973888J^4 - 2495536J^3 + \\ & \left. + 1783146J^2 + 3085690J - 1645097)h^6 + \dots \right] \Big\}. \end{aligned}$$

В пределе, когда $u = hN$ конечно, а $N \rightarrow \infty$ ($N = 2J + 1$), выживают только члены нулевой степени по N , и разложение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \langle 4_1 \rangle &= 1 + u^2 + \frac{7}{12}u^4 + \frac{151}{360}u^6 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2u^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2n-1}}{((1+\sqrt{5})/2)^2} = -\ln \left(\left(1 - \frac{m}{\gamma} \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma m} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\gamma = (3 + \sqrt{5})/2$ и $m = e^u$. Заметим, что член $1/h$ соответствовал бы роду $1/2$ в разложении 'т Хоффа.

Б.3.3. *Представление через квантовый дилогарифм.* Раскрашенный полином Джонса для узла 4_1 с $N = 2J + 1$ может быть представлен в гипергеометрическом виде

$$K_N(4_1|q) = [N]_q \sum_{i=0}^{N-1} (q, N)_i (q, N)_i^* \equiv [N]_q J_N(4_1|q).$$

Тогда формула (A.4) дает

$$K_N \sim \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{s(i\epsilon_2(N-1-k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2(N-1) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)} \times \\ \times \frac{s(i\epsilon_2 N + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2(N+k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}. \quad (\text{Б.8})$$

Б.3.4. *Представление Хиками.* Чтобы получить из формулы (Б.8) интегральное представление Хиками, необходимо взять двойной предел $\epsilon_2 \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ так, что $i\epsilon_2(N-1/2) + i\epsilon/2 = \tilde{u}$. В этом пределе сумма в (Б.8) должна быть заменена интегралом, и окончательно мы получаем

$$K_N = -\frac{1}{\epsilon_2 \operatorname{ch} \tilde{u}} \int dz e^{\pi z/\epsilon_2} s(z - \tilde{u}) s(z + \tilde{u}). \quad (\text{Б.9})$$

В терминах Хиками два дилогарифма в данном интеграле означают, что гиперболическое пространство $S^3 \setminus 4_1$ может быть получено склейкой двух идеальных тетраэдров. Такое представление для $S^3 \setminus 4_1$ хорошо изучено в литературе (см., например, работу [56]).

Б.3.5. *A-полином и спектральная кривая для узла 4_1 имеют следующий вид:*

$$\mathcal{A}_{4_1}(l, m) = m^2 + l(-1 + m + 2m^2 + m^3 - m^4) + l^2 m^2, \\ \Sigma_{4_1} = \{(m, l) \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{A}_{4_1}(l, m) = 0\}.$$

Чтобы найти квантовый A-полином, мы замечаем, что полином Джонса для узла 4_1 обращается в ноль при действии на него разностного оператора

$$\hat{A} = q^2 \hat{m}^2 (1 - \hat{m})(1 - q^3 \hat{m}^2) - (q\hat{m} + 1)(1 - q\hat{m} - q\hat{m}^2 - \\ - q^3 \hat{m}^2 - q^3 \hat{m}^3 + q^4 \hat{m}^4)(1 - q\hat{m})^2 \hat{l} + q^2 \hat{m}^2 (1 - q\hat{m}^2)(1 - q^2 \hat{m}) \hat{l}^2;$$

кроме того, в данном случае

$$\hat{B} = q\hat{m}(1 - q^3 \hat{m}^2)(1 - q\hat{m}^2)(1 + q\hat{m})$$

(см. формулу (Б.5)). В пределе больших N разностное уравнение сводится к

$$[q^{3/2} \hat{m}^2 (1 - q^3 \hat{m}^2) - (1 - q^2 \hat{m}^2)(1 - q\hat{m} - q\hat{m}^2 - q^3 \hat{m}^2 - q^3 \hat{m}^3 + q^4 \hat{m}^4) \hat{l} + \\ + q^{5/2} \hat{m}^2 (1 - q\hat{m}^2) \hat{l}^2] K_N(q) = 0.$$

Таким образом, квантовый A-полином имеет вид

$$\hat{\mathcal{A}}_{4_1}(\hat{l}, \hat{m}|q) = q^{3/2} \hat{m}^2 (1 - q^3 \hat{m}^2) - (1 - q^2 \hat{m}^2)(1 - q\hat{m} - q\hat{m}^2 - \\ - q^3 \hat{m}^2 - q^3 \hat{m}^3 + q^4 \hat{m}^4) \hat{l} + q^{5/2} \hat{m}^2 (1 - q\hat{m}^2).$$

Для конечных N полином Джонса удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathcal{A}}_G J_N(q) \equiv (\hat{l} - 1) \frac{1}{\hat{B}(\hat{m})} \hat{A}(\hat{l}, \hat{m}) J_N(q) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_G = & -\frac{q^2 \hat{m}(1 - q^3 \hat{m})}{(1 + q^2 \hat{m})(1 - q^5 \hat{m}^2)} \hat{l}^3 + \\ & + \frac{1}{q} \frac{(1 - q^2 \hat{m})(1 + q\hat{m} - 2q^2 \hat{m} - q^3 \hat{m}^2 + q^4 \hat{m}^2 - q^5 \hat{m}^2 - 2q^6 \hat{m}^3 + q^7 \hat{m}^3 + q^8 \hat{m}^4)}{\hat{m}(1 + q\hat{m})(1 - q^5 \hat{m}^2)} \hat{l}^2 - \\ & - \frac{1}{q} \frac{(1 - q\hat{m})(1 - 2q\hat{m} + q^2 \hat{m} - q\hat{m}^2 + q^2 \hat{m}^2 - q^3 \hat{m}^2 + q^2 \hat{m}^3 - 2q^3 \hat{m}^3 + q^4 \hat{m}^4)}{\hat{m}(1 + q^2 \hat{m})(1 - q\hat{m}^2)} \hat{l} + \\ & + \frac{q\hat{m}(1 - \hat{m})}{(1 + q\hat{m})(1 - q\hat{m}^2)}. \end{aligned}$$

Б.3.6. Полиномиальные инварианты. Суперполином задается формулой

$$P_{4_1}(a, q, t) = P_0(a, q, t)(a^{-1}t^{-2} + q^{-1}t^{-1} + 1 + qt + at^2). \quad (\text{Б.10})$$

Б.4. Узел 5_2 .

Б.4.1. Представление через квантовую R -матрицу и ассоциатор Дринфельда. Полиномиальные инварианты для узла 5_2 могут быть построены с использованием формул (8) и (9). В данном случае узел может быть представлен как замыкание следующего элемента: $b_{5_2} = g_2^3 g_1 g_2^{-1} g_1 \in B_3$. В данном представлении узел имеет пять положительных самопересечений и одно отрицательное ($w(b) = 4$), а также две струны (в (9) $n = 3$).

Б.4.2. Представление через инварианты Васильева. Инварианты Васильева узла 5_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1} = 8, \quad \alpha_{3,1} = -24, \quad \alpha_{4,1} = \frac{268}{3}, \quad \alpha_{4,2} = \frac{43}{3}, \\ \alpha_{5,1} = -368, \quad \alpha_{5,2} = -64, \quad \alpha_{5,3} = -56. \end{aligned}$$

Использование табл. 3 для группы $SU(2)$ дает

$$\begin{aligned} \langle 5_2 \rangle = [N]_q \exp \left\{ -8J(1+J)h^2 + 24J(1+J)h^3 + \right. \\ \left. + \frac{4}{3}J(1+J)(-67 + 22J + 22J^2)h^4 + \dots \right\}, \quad h = 2\pi i\hbar. \end{aligned}$$

Б.4.3. Представление через квантовый дилогарифм. Раскрашенный полином Джонса для узла 5_2 с $N = 2J + 1$ может быть представлен в гипергеометрической форме

$$K_N(5_2|q) = [N]_q \sum_{0 \leq k \leq l \leq N-1} \frac{(q, N)_l (q, N)_l}{(q, N)_k^*} q^{-k(l+1)} \equiv [N]_q J_N(5_2|q).$$

Таким образом, формула (A.4) дает

$$J_N \sim \sum_{0 \leq k \leq l \leq N-1} (-i)^{k+2l} q^{-k(l+1)} \frac{s^2(i\epsilon_2(N-1-l) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s^2(i\epsilon_2(N-1) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)} \times \\ \times \frac{s(i\epsilon_2(N+k) + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}{s(i\epsilon_2 N + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)}, \\ J_N = \frac{i}{s^3(u)} \int dz_1 \int dz_2 s^2(u-z)s(u+z) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2\pi z_1 z_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{\pi i(z_1 - z_2)}{\epsilon_1} + \frac{2\pi i(2z_1 + z_2)}{\epsilon_2} \right\}.$$

Снова присутствие трех дилогарифмов под знаком интеграла в правой части последнего равенства означает, что пространство $S^3 \setminus 5_2$ может быть получено склейкой трех идеальных тетраэдров в модели Хиками.

Б.4.4. $\mathcal{A}$ -полином. В данном случае мы имеем

$$\mathcal{A}(l, m) = 1 + l(-1 + 2m + 2m^2 - m^4 + m^5) + l^2(m^2 - m^3 + 2m^5 + 2m^6 - m^7) + l^3 m^7.$$

Квантовый $\mathcal{A}$ -полином рассчитывается так же, как для предыдущих узлов, и мы получаем следующий результат:

$$\hat{\mathcal{A}}(l, m) = q^{1/2}(1 - q^4 \hat{m}^2)(1 - q^5 \hat{m}^2) - (1 - q^2 \hat{m}^2)(1 - q^5 \hat{m}^2)(1 - 2q\hat{m} - q(q + q^3)\hat{m}^2 + \\ + q^2(1 - q)(1 - q^2)\hat{m}^3 + q^5 \hat{m}^4 - q^6 \hat{m}^5)\hat{l} + q^{5/2}(1 - q\hat{m}^2)(1 - q^4 \hat{m}^2)\hat{m}^2 \times \\ \times (1 - q^2 \hat{m} - q^2(1 - q)(1 - q^2)\hat{m}^2 + q^4(1 + q^3)\hat{m}^3 + 2q^7 \hat{m}^4 - q^9 \hat{m}^5)\hat{l}^2 + \\ + q^{14}(1 - q\hat{m}^2)(1 - q^2 \hat{m}^2)\hat{m}^7 \hat{l}^3.$$

Заметим, что это простейший пример, когда полином $\hat{\mathcal{A}}(l, m)$ является не квадратичным, а кубическим по l . В данном случае спектральная кривая не является гиперэллиптической.

Б.4.5. Полиномиальные инварианты. Суперполином имеет вид

$$P_{5_2}(a, q, t) = P_0(a, q, t)(aq^{-1} + at + aqt^2 + a^2 q^{-1} t^2 + a^2 t^3 a^2 qt^4 + a^3 t^5).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Примеры гипотезы объема

Гипотеза объема утверждает, что в пределе больших N логарифм раскрашенного полинома Джонса для гиперболического узла K пропорционален объему дополнения узла в трехмерной сфере S^3 :

$$\ln |J_N(K)| \sim \frac{N}{2\pi} \text{Vol}(S^3 \setminus K)$$

для $q = e^{2\pi i/N}$ и $J_N(K) = \langle K \rangle / \dim_q(R)$.

В случае гиперболического узла 4_1 формула (Б.9) при $q = e^{2\pi i/N}$ дает

$$J_N(4_1) = \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{j=1}^k 4 \sin^2 \frac{\pi j}{N}.$$

Рис. 3. График $\ln J_N(4_1)$, рассчитанный для $N = 3, \dots, 100$. При больших N график становится линейным.

Рис. 4. График $\ln |J_N(3_1)|$, рассчитанный для $N = 3, \dots, 100$, как функция $\ln N$. При больших N график ведет себя линейно, тангенс угла наклона равен $3/2$.

Заметим, что все члены в данной формуле являются положительными. График этой функции при $N = 3, \dots, 100$ изображен на рис. 3. Используя представление (Б.8) и разложение для квантового дилогарифма (А.2) при больших N , мы можем аппроксимировать сумму следующим интегралом:

$$J_N(4_1) \sim \int dz \exp \left\{ \frac{N}{2\pi i} (\text{Li}_2(-e^{-iz}) - \text{Li}_2(-e^{iz})) \right\}.$$

Вычисляя интеграл методом перевала, мы получаем

$$\frac{d}{dz} (\text{Li}_2(-e^{-iz}) - \text{Li}_2(-e^{iz})) = 0,$$

следовательно, $\ln((1 + e^{-iz})(1 + e^{iz})) = 0$, откуда $e^{iz} = e^{2\pi i/3}$. В результате для объема мы имеем

$$\text{Vol}(4_1) = -i(\text{Li}_2(-e^{-2\pi i/3}) - \text{Li}_2(-e^{2\pi i/3})) \approx 2.02688. \quad (\text{Б.1})$$

Также можно численно измерить объем как тангенс угла наклона графика на рис. 3.

Для торического узла 3_1 величина $J_N(3_1)$ может принимать комплексные значения, и приближенное вычисление нельзя проводить методом перевала. На рис. 4 мы приводим график $\ln|J_N(3_1)|$ как функции $\ln N$ для $N = 3, \dots, 100$; видна асимптотика $|J_N(3_1)|$, которая предполагается в работе [57] и которая совпадает с гипотезой объема для торических узлов: $|J_N(3_1)| \sim N^{3/2}$. В то же время фаза величины $J_N(3_1)$ ведет себя сложнее (см. работу [58]).

Благодарности. Мы выражаем благодарность П. Дунину-Барковскому, А. Слепцову и С. Харчеву за полезные консультации. Наша работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ (контракт 02.740.11.5194), РФФИ (грант № 10-01-00536 и совместные гранты № 11-02-90453-Ukr, 09-02-93105-CNRS, 09-02-91005-ANF, 10-02-92109-Yaf_a, 11-01-92612-Royal Society).

Список литературы

- [1] Yu. Terashima, M. Yamazaki, *JHEP*, **08** (2011), 135, arXiv:1103.5748.
- [2] D. Gaiotto, $N = 2$ dualities, arXiv:0904.2715.
- [3] D. Gaiotto, G. Moore, A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation*, arXiv:0907.3987; T. Dimofte, S. Gukov, Y. Soibelman, *Lett. Math. Phys.*, **95:1** (2011), 1–25, arXiv:0912.1346; M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson–Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv:0811.2435; V. Fock, A. Goncharov, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **103** (2006), 1–211, arXiv:math/0311149.
- [4] V. Pestun, *Localization of the four-dimensional $N = 4$ SYM to a two-sphere and $1/8$ BPS Wilson loops*, arXiv:0906.0638.
- [5] N. Nekrasov, E. Witten, *JHEP*, **09** (2010), 092, 82 pp., arXiv:1002.0888.
- [6] H. Awata, H. Kanno, *J. Phys. A*, **44:37** (2011), 375201, 21 pp., arXiv:0910.0083.
- [7] E. Gorsky, q, t -Catalan numbers and knot homology, arXiv:1003.0916.
- [8] T. Dimofte, S. Gukov, L. Hollands, *Vortex counting and Lagrangian 3-manifolds*, arXiv:1006.0977.
- [9] R. Dijkgraaf, H. Fuji, M. Manabe, *Nucl. Phys. B*, **849:1** (2011), 166–211, arXiv:1010.4542.

- [10] K. Hosomichi, S. Lee, J. Park, *JHEP*, **12** (2010), 079, arXiv:1009.0340; **03** (2011), 127, arXiv:1012.3512; *SUSY gauge theories on squashed three-spheres*, arXiv:1102.4716.
- [11] E. Witten, *Analytic continuation of Chern–Simons theory*, arXiv:1001.2933; *Fivebranes and knots*, arXiv:1101.3216.
- [12] F. A. H. Dolan, V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, *Phys. Lett. B*, **704** (2011), 234–241, arXiv:1104.1787.
- [13] L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv:0906.3219; N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv:0907.2189; A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv:0908.2190; *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2009), 1–37, arXiv:0908.2569.
- [14] K. Hikami, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:19 (2001), 3309–3333, arXiv:math-ph/0105039; *Internat. J. Modern Phys. B*, **16**:14–15 (2002), 1963–1970; *J. Geom. Phys.*, **57**:9 (2007), 1895–1940, arXiv:math/0604094; T. Dimofte, S. Gukov, J. Lenells, D. Zagier, *Commun. Num. Theor. Phys.*, **3**:2 (2009), 363–443, arXiv:0903.2472.
- [15] R. Poghossian, *JHEP*, **12** (2009), 038, 14 pp., arXiv:0909.3412; V. Alba, A. A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **90**:11 (2009), 803–807, arXiv:0911.0363.
- [16] J. Teschner, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:suppl.2 (2004), 436–458, arXiv:hep-th/0303150; “From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces”, *Prospects in Mathematical Physics*, Young Researchers Symposium of the 14th International Congress on Mathematical Physics (Lisbon, Portugal, July 28–August 2, 2003), Contemporary Mathematics, **437**, eds. J. C. Mourão, J. P. Nunes, AMS, Providence, RI, 2007, 231–246, arXiv:hep-th/0308031.
- [17] E. W. Barnes, *Proc. London Math. Soc.*, **31**:1 (1899), 358–381; *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **196** (1901), 265–387; *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **19** (1904), 374–425.
- [18] T. Shintani, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.*, **24**:1 (1977), 167–199; N. Kurokawa, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **67**:3 (1991), 61–64; **68**:9 (1992), 256–260; N. Kurokawa (ed.) et al., “Multiple zeta functions: an example”, *Zeta Functions in Geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics, **21**, Kinokuniya Company, Tokyo, 1992, 219–226; L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434, arXiv:hep-th/9310070; L. Faddeev, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 249–254, arXiv:hep-th/9504111; “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato “Quantization, Deformations, and Symmetries”* (Dijon, France, September 5–8, 1999), Mathematical Physics Studies, **21**, eds. G. Dito, D. Sternheimer, Kluwer, Dordrecht, 2000, 149–156, arXiv:math.qa/9912078; S. Sergeev, V. Bazhanov, H. Boos, V. Mangazeev, Yu. Stroganov, *Quantum dilogarithm and tetrahedron equation*, Preprint IHEP-95-129, 1995; M. Jimbo, T. Miwa, *J. Phys. A*, **29**:12 (1996), 2923–2958, arXiv:hep-th/9601135; S. N. M. Ruijsenaars, *J. Math. Phys.*, **38**:2 (1997), 1069–1146; R. M. Kashaev, *Lett. Math. Phys.*, **43**:2 (1998), 105–115.
- [19] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [20] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett. B*, **37**:1 (1971), 95–07; С. П. Новиков, *УМН*, **37**:5(227) (1982), 3–49; E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **92**:4 (1984), 455–472; A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5** (1990), 2495–2589.
- [21] А. Ю. Морозов, *УФН*, **162**:8 (1992), 83–175; **164**:1 (1994), 3–62, arXiv:hep-th/9303139; *Matrix models as integrable systems*, arXiv:hep-th/9502091; *Challenges of matrix models*, arXiv:hep-th/0502010; A. Mironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:25 (1994), 4355–4405, arXiv:hep-th/9312212; А. Д. Миронов, *ЭЧАЯ*, **33**:5 (2002), 1051–1145; A. Mironov, *Quantum deformations of τ -functions, bilinear identities and representation theory*, arXiv:hep-th/9409190; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **114**:2 (1998), 163–232; *τ -Function within group theory approach and its quantization*, arXiv:q-alg/9711006.
- [22] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Mariño, C. Vafa, *Commun. Math. Phys.*, **261**:2 (2006), 451–516, arXiv:hep-th/0312085; M. Mariño, *Rev. Modern Phys.*, **77**:2 (2005), 675–720, arXiv:hep-th/0406005; V. Bouchard, B. Florea, M. Mariño, *Counting higher genus curves with crosscaps in Calabi–Yau orientifolds*, arXiv:hep-th/0405083.

- [23] S. Garoufalidis, T. T. Q. Lê, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 1253–1293, arXiv:math/0309214.
- [24] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv:hep-th/0310113; *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv:hep-th/0608228; *JHEP*, **12** (2009), 053, 51 pp., arXiv:0906.3305; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192; A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv:0811.2825; B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv:hep-th/0407261; L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv:hep-th/0504116; **12** (2006), 026, 29 pp., arXiv:math-ph/0604014; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv:0808.0635.
- [25] N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, *Exp. Math.*, **15**:2 (2006), 129–159, arXiv:math/0505662.
- [26] S. Gukov, A. Iqbal, C. Kozcaz, C. Vafa, *Link homologies and the refined topological vertex*, arXiv:0705.1368.
- [27] M. Khovanov, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426.
- [28] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Proceedings of the Workshop on Quantum Groups* (Clausthal, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, Springer, Berlin, 1990, 307–317; *Phys. Lett. B*, **235**:3–4 (1990), 275–281.
- [29] A. Morozov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **835**:3 (2010), 284–313, arXiv:1001.2003; A. Smirnov, *Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge*, arXiv:0910.5011.
- [30] V. Drinfel’d, “Quasi Hopf algebras and Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Problems of Modern Quantum Field Theory* (Alushta, 1989), Research Reports in Physics, eds. A. A. Belavin, A. U. Klimyk, A. B. Zamolodchikov, Springer, Berlin, 1989, 1–13.
- [31] T. T. Q. Le, J. Murakami, *Nagoya Math. J.*, **142** (1996), 39–65.
- [32] S. Chmutov, S. Duzhin, *Acta Appl. Math.*, **66**:2 (2001), 155–190, arXiv:math/0501040.
- [33] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103.
- [34] P. Dunin-Barkovsky, A. Sleptsov, A. Smirnov, *Kontsevich integral for knots and Vassiliev invariants*, arXiv:1112.5406; *Explicit computation of Drinfeld associator in the case of the fundamental representation*, arXiv:1201.0025.
- [35] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev knot invariants*, arXiv:1103.5628; J. M. F. Labastida, E. Perez, *J. Math. Phys.*, **41**:5 (2000), 2658–2699, arXiv:hep-th/9807155; *J. Math. Phys.*, **39**:10 (1998), 5183–5198, arXiv:hep-th/9710176; M. Alvarez, J. M. F. Labastida, E. Pérez, *Nucl. Phys. B*, **488**:3 (1997), 677–718, arXiv:hep-th/9607030; M. Alvarez, J. M. F. Labastida, *Commun. Math. Phys.*, **189**:3 (1997), 641–654, arXiv:q-alg/9604010; *Nucl. Phys. B*, **433**:3 (1995), 555–596, arXiv:hep-th/9407076.
- [36] D. Bar-Natan, E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **141**:2 (1991), 423–440; D. Bar-Natan, *Perturbative aspects of the Chern–Simons topological quantum field theory*, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1991; *J. Knot Theor. Ramifications*, **4**:4 (1995), 503–547; *Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot*, arXiv:q-alg/9703025; R. Kashaev, N. Reshetikhin, *Invariants of tangles with flat connections in their complements. I. Invariants and holonomy R-matrices*, arXiv:math/0202211; *II. Holonomy R-matrices related to quantized universal enveloping algebras at roots of 1*, arXiv:math/0202212; V. G. Turaev, O. Y. Viro, *Topology*, **31**:4 (1992), 865–902; Т. +. Тăăăхт, *ЛЭ=*, **41**:1(247) (1986), 97–147; S. Axelrod, I. Singer, “Chern–Simons Perturbation Theory”, *Proceedings of the 20th International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics* (New York, USA, June 3–7, 1991), **1**, **2**, eds. S. Catto, A. Rocha, World Scientific, River Edge, NJ, 1992, 3–45, arXiv:hep-th/9110056.
- [37] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, *Topology*, **39**:5 (2000), 1045–1068.
- [38] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, С. М. Натанзон, *ТМФ*, **166**:1 (2011), 3–27, arXiv:0904.4227; *J. Geom. Phys.*, **62** (2012), 148–155, arXiv:1012.0433.

- [39] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, arXiv: q-alg/9601025.
- [40] M. Mariño, *JHEP*, **12** (2008), 114, 56 pp., arXiv: 0805.3033.
- [41] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **12** (2009), 003, 33 pp., arXiv: 0906.003; *From Brezin–Hikami to Harer–Zagier formulas for Gaussian correlators*, arXiv: 1007.4100.
- [42] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Lecture Notes at Princeton University, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [43] R. Gelca, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133**:2 (2002), 311–323; R. Gelca, J. Sain, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:2 (2003), 187–201.
- [44] S. Garoufalidis, C. Koutschan, *Adv. Appl. Math.*, **47**:4 (2011), 829–839, arXiv: 1011.6329.
- [45] S. Garoufalidis, H. Morton, T. Vuong, *The $\mathfrak{sl}_3$ colored Jones polynomial of the trefoil*, arXiv: 1010.3147.
- [46] N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **531**:1–3 (1998), 323–344, arXiv: hep-th/9609219; A. Gorsky, S. Gukov, A. Mironov, *Nucl. Phys. B*, **518**:3 (1998), 689–713, arXiv: hep-th/9710239; A. Marshakov, A. Mironov, *Nucl. Phys. B*, **518**:1–2 (1998), 59–91, arXiv: hep-th/9711156; H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **448**:3–4 (1999), 195–202, arXiv: hep-th/9812078; *Nucl. Phys. B*, **558**:1–2 (1999), 371–390, arXiv: hep-th/9902205.
- [47] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **04** (2010), 040, 15 pp., arXiv: 0910.5670; *J. Phys. A*, **43**:19 (2010), 195401, 11 pp., arXiv: 0911.2396.
- [48] A. Popolitov, *On relation between Nekrasov functions and BS periods in pure $SU(N)$ case*, arXiv: 1001.1407; W. He, Y.-G. Miao, *Phys. Rev. D*, **82**:2 (2010), 025020, arXiv: 1006.1214; K. Maruyoshi, M. Taki, *Nucl. Phys. B*, **841**:3 (2010), 388–425, arXiv: 1006.4505; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *J. Geom. Phys.*, **61**:7 (2011), 1203–1222, arXiv: 1011.4491; F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, D. R. Pacifici, *JHEP*, **05** (2011), 098, arXiv: 1103.4495; Y. Zenkevich, *Phys. Lett. B*, **701**:5 (2011), 630–639, arXiv: 1103.4843; N. Dorey, T. J. Hollowood, S. Lee, *Quantization of integrable systems and a 2d/4d duality*, arXiv: 1103.5726.
- [49] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Quantization of integrable systems and four dimensional Gauge theories*, arXiv: 0908.4052.
- [50] A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611, arXiv: hep-th/9711108; G. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 97–121, arXiv: hep-th/9712241.
- [51] A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **855**:1 (2012), 128–151, arXiv: 1105.0948.
- [52] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **225**:3 (2002), 573–609, arXiv: hep-th/0102180; S. Kharchev, D. Lebedev, *J. Phys. A*, **34**:11 (2001), 2247–2258, arXiv: hep-th/0007040.
- [53] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv: hep-th/9408099; **431**:3 (1994), 484–550, arXiv: hep-th/9407087; A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–477, arXiv: hep-th/9505035; R. Donagi, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334 arXiv: hep-th/9510101.
- [54] H. Ooguri, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **577**:3 (2000), 419–438, arXiv: hep-th/9912123.
- [55] T. Dimofte, *Quantum Riemann surfaces in Chern–Simons theory*, arXiv: 1102.4847.
- [56] R. Dijkgraaf, H. Fuji, *Fortsch. Phys.*, **57**:9 (2009), 825–856, arXiv: 0903.2084.
- [57] R. M. Kashaev, O. Tirkkonen, *Proof of the volume conjecture for torus knots*, arXiv: math/9912210.
- [58] H. Murakami, *Internat. J. Math.*, **15**:6 (2004), 547–555, arXiv: math/0405126.