Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Интегрируемые граничные условия
для $2 + 1$ -мерных моделей математической физики,
ТМФ, 2012, том 171, номер 3, 430–437

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:55:43

© 2012 г.

В. Л. Верещагин*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ $(2 + 1)$ -МЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Вопрос о постановке интегрируемых граничных задач рассматривается на примерах двумерной цепочки Тоды и уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Обсуждаются задачи, интегрируемые с точки зрения двух основных определений интегрируемости. В результате указывается способ построения иерархии интегрируемых граничных задач, причем границами служат цилиндрические поверхности в пространстве трех переменных. Явными формулами описаны широкие классы решений указанных граничных задач для двумерной цепочки Тоды и уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

Ключевые слова: двумерная цепочка Тоды, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, интегрируемая граничная задача.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современной науке известно относительно небольшое число интегрируемых моделей математической физики размерности $2+1$ (обычно подразумевается зависимость неизвестной функции от двух пространственных и одной временной переменных), интересных как для теории дифференциальных уравнений, так и для разнообразных приложений. В числе самых известных из них следует упомянуть уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1]

$$\begin{aligned} u_T + u_{xxx} - 6uu_x &= -3\alpha^2 w_Y, \\ w_x &= u_Y, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $u = u(x, Y, T)$, $w = w(x, Y, T)$, $u_x = \partial u / \partial x$, x, Y, T – непрерывные переменные, параметр α принимает значение 1 или i .

Другим важным примером является представитель дифференциально-разностных моделей – двумерная (2D) цепочка Тоды [2]

$$v_{XY}(X, Y, n) = W(X, Y, n - 1) - W(X, Y, n), \tag{1.2}$$

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: v_vereschagin@mail.ru

где $v(X, Y, n)$ – неизвестная функция непрерывных переменных X, Y и целого индекса $n \in \mathbb{Z}$, $W(X, Y, n) = \exp(v(X, Y, n) - v(X, Y, n + 1))$.

Феномен интегрируемости таких систем основан на существовании так называемых коммутаторных представлений, или представлений Лакса. Рассмотрим это явление на примере системы КП (1.1). Было установлено (см. работы [3]–[5]), что нелинейное уравнение (1.1) является условием совместности двух линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \alpha \Psi_Y &= \Psi_{xx} - u\Psi = L\Psi, \\ \Psi_T &= -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3(u_x + \alpha w)\Psi = A\Psi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

определяющих дифференциальные операторы Лакса L, A , так что само уравнение КП может быть представлено в коммутаторной форме:

$$[\partial_Y - L, \partial_T - A] = 0, \quad (1.4)$$

где $\partial_Y = \partial/\partial Y$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор. Возможность записи уравнения КП (1.1) в виде (1.4) позволяет отнести его к интегрируемым моделям, для которых можно отыскивать широкие классы решений, интересных с теоретической и прикладной точек зрения. Особый интерес со стороны прикладных проблем вызывает возможность решения граничных задач для $(2 + 1)$ -мерных моделей. Нужно отметить, что отнюдь не каждая граничная задача для уравнения КП является интегрируемой с точки зрения наличия достаточно большого множества характерных “красивых” решений типа солитонных или конечнозонных. Дело в том, что наложение произвольного граничного условия делает неприменимой стандартную схему метода обратной задачи, так как исчезает бесконечная цепь законов сохранения. Следовательно, нетривиален вопрос, существуют ли постановки граничной задачи, позволяющие “выжить” достаточно для интегрируемости количеству законов сохранения и, таким образом, сохранить возможность применения метода обратной задачи. Большой прогресс в этом направлении был достигнут в работах [6]–[10]. Следующее определение дает условие, позволяющее конструктивно выделять граничные задачи, совместимые с аппаратом метода обратной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть нелинейное уравнение допускает два разных представления Лакса, не связанных друг с другом калибровочным преобразованием:

$$\{\Psi_X = A\Psi, \Psi_Y = L\Psi\}, \quad \{\hat{\Psi}_X = \hat{A}\hat{\Psi}, \hat{\Psi}_Y = \hat{L}\hat{\Psi}\}.$$

Тогда граничное условие $\Omega(u) = 0$ на границе $X = X_0$ называется интегрируемым, если существует линейный дифференциальный оператор B такой, что на границе $X = X_0$ функция $\hat{\Psi} = B\Psi$ решает уравнение $\hat{\Psi}_Y = \hat{L}\hat{\Psi}$ для любого решения Ψ уравнения $\Psi_Y = L\Psi$ при условии выполнения условия $\Omega(u) = 0$.

В работах [8], [9] при помощи определения 1 был, в частности, дан ответ на вопрос о корректной формулировке граничных задач для уравнения КП на прямом контуре ($X = X_0$), в статье [11] были рассмотрены подобные вопросы для 2D-цепочки Тоды с граничным контуром в виде окружности. Работы [12], [13] указали способ описания множества интегрируемых с точки зрения определения 1 граничных задач для $(2 + 1)$ -мерных моделей, причем в общем случае это задачи с движущейся границей,

представленной цилиндрической поверхностью в трехмерном пространстве. Там же с помощью метода одевания был выписан ряд явных решений этих задач.

Вместе с тем можно поставить естественный вопрос о конструктивности следующего внешне весьма формального и неконкретного определения интегрируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граничную задачу назовем интегрируемой, если она обладает достаточно богатым множеством явно описываемых решений.

Настоящая работа преследует цель при некоторых условиях положительно ответить на вопрос о практической осмысленности определения 2, причем в качестве примеров выступают 2D-цепочка Тоды и уравнение КП. В этих условиях множество граничных задач, удовлетворяющих определению 2, является обобщением класса задач, получаемых в рамках определения 1, а требования определения 2 можно назвать ослаблением условий определения 1. В результате работа представляет способ построения иерархии интегрируемых граничных задач вместе с широким классом явно описываемых решений. При этом полученные ранее с помощью определения 1 задачи являются первой ступенью упомянутой иерархии.

В разделе 2 мы применяем указанные выше соображения к 2D-цепочке Тоды. С помощью явных формул предъявляется множество решений, связанных автомодельной симметрией с произвольными решениями $(1+1)$ -мерной цепочки Тоды. Большой запас решений $(1+1)$ -мерной цепочки (рациональные, солитонные, квазипериодические (см., например, [3])) обеспечивает таким образом богатый класс решений $(2+1)$ -мерной цепочки Тоды. Затем построены обобщения граничных задач, решаемых тем же множеством решений. В разделе 3 подобные действия выполнены для уравнения КП.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ 2D-ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

В качестве модельного уравнения и первого примера выбираем 2D-цепочку Тоды

$$\begin{aligned} u_{XY}(X, Y, n) &= W(X, Y, n-1) - W(X, Y, n), \\ W(X, Y, n) &= \exp(u(X, Y, n) - u(X, Y, n+1)), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

так как основные формулы и вычисления выглядят проще, чем соответствующие формулы для уравнения КП (1.1).

В работе [12] было доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $x(X, Y)$ – произвольная гладкая функция. Граничное условие для цепочки (2.1)

$$n \left(\frac{x_X}{x_Y} x_{YY} + \frac{x_Y}{x_X} x_{XX} - 2x_{XY} \right) + x_X u_Y + x_Y u_X = 0, \quad (2.2)$$

где x_X – частная производная $\partial x(X, Y)/\partial X$, выполняющееся на границе, задаваемой кривой линией $x(X, Y) = x_0 = \text{const}$ на плоскости (X, Y) , представляет граничную задачу, интегрируемую в смысле определения 1.

Граничные задачи для уравнений математической физики не часто обладают набором нетривиальных решений, записываемых в виде явных формул. Однако интегрируемая задача (2.2) имеет богатый класс таких решений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть задающая границу функция $x(X, Y)$ такова, что условие $x = x(X, Y)$ может быть переписано в следующем виде:

$$F(X, x) + G(Y, x) = 0, \quad (2.3)$$

где F, G – некоторые гладкие функции. Тогда формула

$$u_n = n[c - \ln(H'(F(X, x_0))F_X(X, x_0)H'(-G(Y, x_0))G_Y(Y, x_0))] + v_n(\phi) \quad (2.4)$$

дает решение граничной задачи (2.1), (2.2). Здесь c – постоянный параметр, H – произвольная дифференцируемая функция, $v_n(\phi)$ – произвольное решение $(1 + 1)$ -мерной цепочки. Тогда

$$\frac{d^2 v_n}{d\phi^2} = e^{v_{n-1} - v_n} - e^{v_n - v_{n+1}}, \quad (2.5)$$

$$\phi = H(F(X, x_0)) + H(-G(Y, x_0)) \quad (2.6)$$

– автомодельная переменная, граничный контур задается уравнением

$$F(X, x_0) + G(Y, x_0) = 0. \quad (2.7)$$

Доказательство проводится путем прямой подстановки функции (2.4) в формулы (2.1) и (2.2).

Наличие столь богатого множества записываемых явно решений ставит задачу (2.1), (2.2) в особое положение. Возникает естественный вопрос: возможно ли отыскать более общий набор граничных задач, чьими решениями является, в частности, класс функций (2.4)? Положительный ответ вытекает из следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Предположим, что граничное условие для уравнения (2.1) представлено в виде равенства

$$R(n, x, x_X, x_Y, x_{XX}, x_{XY}, x_{YY}, \dots; u(n), u(n)_X, u(n)_Y) = 0 \quad (2.8)$$

на границе $x(X, Y) = x_0$, причем соответствующая граничная задача решается, в частности, любой из функций вида (2.4). Тогда условие (2.8) совпадает с условием (2.2).

Доказательство состоит в уничтожении произвольных элементов, входящих в формулу (2.4) (функция H и решение $v_n(\phi)$ цепочки (2.5)), после подстановки в формулу (2.8). Так как функции $v_n(\phi)$ и $v'_n(\phi)$ следует считать независимыми (решений у цепочки (2.5) много) и на граничном контуре выполняется тождество $R \equiv 0$, то R не зависит от переменной $u(n)$. С другой стороны, имеем следующее:

$$u_X(n) = \nu F_X - n(\ln F_X)_X, \quad u_Y(n) = -\nu G_Y - n(\ln G_Y)_Y, \quad (2.9)$$

где

$$\nu = v'_n(\phi)H'(F) - n\frac{H''(F)}{H'(F)}, \quad (2.10)$$

так что весь произвол заключен в параметре ν . Следовательно, нужно потребовать выполнения тождества

$$\frac{dR}{d\nu} \equiv 0, \quad (2.11)$$

т. е.

$$\frac{dR}{d\nu} = R_{u_X}(u_X)_\nu + R_{u_Y}(u_Y)_\nu = R_{u_X}F_X - R_{u_Y}G_Y = 0.$$

Так как $G_Y/F_X = x_Y/x_X$, то имеем (тождественно по аргументам u_X, u_Y функции R) следующее:

$$R_{u_X}x_X - R_{u_Y}x_Y \equiv 0. \quad (2.12)$$

Отсюда вытекает, что зависимость функции R от u_X и u_Y выглядит следующим образом:

$$R = R(n, x, x_X, x_Y, \dots; x_X u_Y + x_Y u_X). \quad (2.13)$$

Считая R обратимой по последнему аргументу, представляем граничное условие (2.8) в виде

$$x_X u_Y + x_Y u_X + P(n, x, x_X, x_Y, \dots) = 0. \quad (2.14)$$

Осталось обосновать тождественность равенства (2.14) по дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$. Для этого подставим в (2.14) формулу (2.4) и получим

$$\begin{aligned} P(n, x, x_X, x_Y, \dots) &= n[x_Y(\ln F_X)_X + x_X(\ln G_Y)_Y] = \\ &= n\left(\frac{x_X}{x_Y}x_{Y_Y} + \frac{x_Y}{x_X}x_{X_X} - 2x_{X_Y}\right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

что и доказывает утверждение.

Таким образом, в случае простейшего нетривиального граничного условия (2.8), не зависящего от старших производных $u(n)$ по X и Y , граничную задачу (2.1), (2.2) можно считать интегрируемой в смысле обоих определений (1 и 2). Естественно предположить, что, ослабив условие (2.8) (допустив зависимость R от старших производных $u(n)$ и от значений $u(n)$ в нескольких точках решетки по переменной n), можно снова потребовать наличия целого класса решений (2.4) и, таким образом, получить обобщение граничной задачи (2.1), (2.2), интегрируемое уже в смысле определения 2.

Рассмотрим следующий по сложности случай зависимости граничного условия от вторых производных величины $u(n)$:

$$R(n, x, x_X, x_Y, x_{XX}, x_{XY}, x_{YY}, \dots; u(n), u(n)_X, u(n)_Y, u(n)_{XX}, u(n)_{XY}, u(n)_{YY}) = 0, \quad (2.16)$$

который, вероятно, имеет наибольшие шансы на актуальность с точки зрения приложений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть задающая границу функция $x(X, Y)$ удовлетворяет условию (2.3), а соответствующее граничное условие представлено формулой (2.16). Тогда граничная задача (2.1), (2.16) обладает классом решений (2.4),

если граничное условие (2.16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_Y F_X + u_X G_Y + n \left(\frac{F_X}{G_Y} G_{YY} + \frac{G_Y}{F_X} F_{XX} \right) + \\ + h \left((G_Y^2 F_{XX} + F_X^2 G_{YY})(u_X + u_Y) + (G_Y^2 u_{XX} - F_X^2 u_{YY})(G_Y - F_X) + \right. \\ \left. + n \left\{ (G_Y^2 F_{XX} + F_X^2 G_{YY}) \left(\frac{F_{XX}}{F_X} + \frac{G_{YY}}{G_Y} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (G_Y - F_X) [G_Y^2 (\ln F_X)_{XX} - F_X^2 (\ln G_Y)_{YY}] \right\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где h – произвольная дифференцируемая функция такая, что $h(0) = 0$. В случае $h \equiv 0$ условие (2.17) эквивалентно (2.2).

Доказательство аналогично доказательству утверждения 3. Имеем следующее:

$$\begin{aligned} u_{XX} &= \nu_1 F_{XX} + (\nu_2 + \nu_3) F_X^2 - n (\ln F_X)_{XX}, \\ u_{XY} &= -\nu_3 F_X G_Y, \\ u_{YY} &= -\nu_1 G_{YY} + (\nu_2 + \nu_3) G_Y^2 - n (\ln G_Y)_{YY}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_1 &= v'_n H'(F) - n \frac{H''(F)}{H'(F)}, \quad \nu_2 = v'_n H''(F) - n (\ln H'(F))'', \\ \nu_3 &= v''_n (H'(F))^2, \end{aligned}$$

так что весь произвол сосредоточен в параметрах $\nu_{1,2,3}$. Далее, подобно доказательству утверждения 3, уравнения

$$\frac{dR}{d\nu_1} = \frac{dR}{d\nu_2} = \frac{dR}{d\nu_3} = 0$$

и условие тождественного равенства $R \equiv 0$ по дискретной переменной n дают окончательный вид граничного условия (2.17).

Формула (2.17) свидетельствует, что граничная задача (2.1), (2.17), интегрируемая в смысле определения 2, является прямым обобщением задачи (2.1), (2.2), интегрируемой в смысле определения 1.

Описанный метод позволяет строить граничные задачи, обладающие большим запасом явных решений, причем граничное условие может зависеть от старших производных величины $u(n)$ и ее значений в нескольких узлах дискретной решетки по переменной n .

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КП

Рассмотрим уравнение КП (1.1) на предмет применения к нему методов, подобных описанным выше для 2D-цепочки Тоды. С идейной точки зрения все соображения аналогичны приведенным в предыдущем разделе, поэтому кратко укажем здесь лишь основные формулы и утверждения.

В работе [13] было доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $y(Y, T)$ – произвольная гладкая функция. Граничное условие для уравнения КП (1.1)

$$y_T u + 6\alpha^2 y_Y w + \frac{x}{6} \left(y_{TT} + \frac{y_T^2}{y_Y^2} y_{YY} - 2 \frac{y_T}{y_Y} y_{TY} \right) = F(T), \quad (3.1)$$

где $F(T)$ – произвольная функция, выполняющаяся на границе, задаваемой кривой линией $y(Y, T) = y_0 = \text{const}$ на плоскости (Y, T) , представляет граничную задачу, интегрируемую в смысле определения 1.

Граничные задачи (1.1), (3.1) обладают богатым запасом решений, записываемых в явном виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Формула

$$u = u^0 + v(T, \phi), \quad w = w^0 + \omega(T, \phi), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{6} [Y \Phi_1'(T) + \Phi_2'(T) + 3\alpha^2 \Phi_1^2(T)], \\ w^0 &= \frac{x \Phi_1'(T)}{6} - \frac{\alpha^2 Y^2 \Phi_1''(T)}{36} - \frac{\alpha^2 Y}{18} \frac{d}{dT} (\Phi_2'(T) + 3\alpha^2 \Phi_1^2(T)) + \hat{w}(T), \\ \Phi_1(T) &= -\frac{\alpha^2}{6} \frac{y_T(Y, T)}{y_Y(Y, T)} \Big|_{Y=Y(T, y_0)}, \\ \omega(T, \phi) &= \Phi_1(T) v(T, \phi), \end{aligned}$$

$\Phi_2(T)$, $\hat{w}(T)$ – произвольные дифференцируемые функции, ϕ – автомодельная переменная:

$$\phi = x + Y \Phi_1(T) + \Phi_2(T),$$

$v(T, \phi)$ – произвольное решение уравнения Кортевега–де Фриза:

$$v_T + v_{\phi\phi\phi} - 6vv_{\phi} = 0, \quad (3.3)$$

дает решение граничной задачи (1.1), (3.1).

Доказательство проводится путем прямой подстановки.

Теперь предъявим простое обобщение граничного условия (3.1), интегрируемое в смысле определения 2. Рассмотрим случай зависимости этого условия от первых производных решений u_T , u_Y , w_T , w_Y :

$$R(x, y, y_Y, y_T, \dots; u, w, u_T, u_Y, w_T, w_Y) = 0. \quad (3.4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Граничная задача для уравнения КП (1.1) с условием

$$w - \Phi_1 u - c(\Phi_1' u - w_T + \Phi_1 u_T) - \frac{x}{6}(\Phi_1' + c\Phi_1'') + h(w_Y - \Phi_1 u_Y) = 0 \quad (3.5)$$

на границе $y(Y, T) = y_0$, где c – произвольный параметр, h – произвольная дифференцируемая функция,

$$\Phi_1(T) = -\frac{\alpha^2}{6} \frac{y_T}{y_Y} \Big|_{y=y_0},$$

обладает классом решений (3.2). В частном случае $c = 0$, $h \equiv 0$ условие (3.5) переходит в условие (3.1).

Доказательство аналогично доказательству утверждений 3, 4.

Подобным образом, полагая левую часть граничного условия вида (3.4) зависящей от старших производных функций u , w , можно построить иерархию интегрируемых граничных задач для уравнения КП (1.1).

4. ВЫВОДЫ

Основным положением является факт существования достаточно обширного множества решений 2D-цепочки Тоды и уравнения КП, которые преобразованием автомодельного типа связаны с произвольными решениями пространственно одномерной цепочки Тоды и уравнения Кортевега–де Фриза соответственно. С одной стороны, это обеспечивает возможность явного описания таких решений в терминах рациональных, солитонных, тета-функциональных формул (см. примеры в работе [13]). С другой стороны, указанное множество решений делает осмысленным отыскание отвечающих им нетривиальных граничных задач. Таким образом, указаны достаточно широкие классы явно описываемых решений интегрируемых граничных задач для 2D-цепочки Тоды и уравнения КП, а также представлен метод построения серии граничных задач, отвечающих упомянутым классам решений, и приведены примеры таких задач.

Благодарности. Автор выражает благодарность И. Т. Хабибуллину за ценные советы и консультации. Работа была частично поддержана Программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (грант № 10-01-00088_а).

Список литературы

- [1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 753–756.
- [2] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [4] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [6] Е. К. Склянин, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 86–87.
- [7] И. Т. Хабибуллин, *ТМФ*, **91**:3 (1992), 363–376.
- [8] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 71–83.
- [9] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 230–240.
- [10] V. Adler, B. Gürel, M. Gürses, I. T. Habibullin, *J. Phys. A.*, **30**:10 (1997), 3505–3513.
- [11] M. Gürses, I. T. Habibullin, K. Zheltukhin, *J. Math. Phys.*, **48**:10 (2007), 102702, 16 pp.
- [12] V. L. Vereschagin, *Phys. Lett. A*, **374**:46 (2010), 4653–4657.
- [13] V. L. Vereschagin, *Explicit solutions to boundary problems for $(2+1)$ -dimensional integrable systems*, arXiv: 1012.3521.

Поступила в редакцию 17.07.2011