Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гордевский, Е. С. Сазонова, Континуальный аналог бимодальных распределений, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:21:28

© 2012 г.

В. Д. Гордевский*, Е. С. Сазонова*

КОНТИНУАЛЬНЫЙ АНАЛОГ БИМОДАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассматривается уравнение Больцмана для модели твердых сфер. Построено явное приближенное решение этого уравнения в виде континуального распределения в случае глобальных максвеллианов. Получены некоторые достаточные условия минимизации равномерно-интегральной невязки между частями уравнения.

Ключевые слова: твердые сферы, уравнение Больцмана, максвеллиан, невязка, континуальное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания взаимодействия между потоками газа из твердых сфер используется интегродифференциальное уравнение Больцмана [1]–[3], которое имеет вид

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| [f(t, v'_1, x) f(t, v', x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \quad (3)$$

где $f(t, v, x)$ – искомая функция распределения молекул, $\partial f / \partial x$ – ее пространственный градиент, $t \in \mathbb{R}^1$ – время, $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ и $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ – координата и скорость молекулы, $d > 0$ – ее диаметр, v и v_1 – скорости молекул до столкновения, v' и v'_1 – после столкновения, $\alpha \in \Sigma$, Σ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Скорости молекул после столкновения выражаются формулами

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \quad v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha). \quad (4)$$

Известными точными решениями уравнения (1)–(3) являются глобальные и локальные максвеллианы [1]–[3]. Другие точные решения получены только для случая максвелловских молекул и некоторых его обобщений [4]–[6].

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина.
E-mail: gordevskyy2006@yandex.ru; sazonovaes@rambler.ru

Заметим, что первые попытки поиска явных приближенных решений уравнения Больцмана были предприняты еще в послевоенные годы в связи с приближенным описанием ударной волны (распределение Тамма–Мотт–Смита [7], [8]). Аппроксимирующая функция распределения [1] при этом ищется в бимодальном виде:

$$f = \varphi_-(t, x)M_-(v) + \varphi_+(t, x)M_+(v), \quad (5)$$

где $M_-(v)$ и $M_+(v)$ представляют собой максвеллианы с гидродинамическими параметрами, удовлетворяющими граничным условиям, а $\varphi_-(t, x)$ и $\varphi_+(t, x)$ – коэффициентные функции, которые находятся из подходящих моментных уравнений.

В связи с этим возник вопрос: нельзя ли подобрать $\varphi_1(t, x)$ и $\varphi_2(t, x)$ таким образом, чтобы бимодальное выражение, представленное формулой (5), являлось решением уравнения Больцмана? При рассмотрении этого вопроса весьма ценными оказались аналитические результаты работы [9]. Ее авторы доказали, что при тех предположениях, которые были наложены, нельзя сделать соответствующую невязку между частями уравнения (1) сколь угодно малой, т. е. распределение Тамма–Мотт–Смита не является приближенным решением с произвольной степенью точности. Окончательно указанный вопрос был решен отрицательно в работе [10].

Все это привело к необходимости построения таких бимодальных распределений с произвольными гидродинамическими параметрами, которые описывали бы процесс взаимодействия между двумя максвелловскими потоками в газе из твердых сфер и в то же время удовлетворяли уравнению Больцмана (1)–(3) с какой угодно степенью точности.

В работе [11] впервые было предложено отказаться от жестких условий, которые налагались ранее на гидродинамические параметры потоков самой постановкой рассматриваемой задачи, и поставить вопрос значительно шире, т. е. искать любые решения вида (5) при произвольных гидродинамических параметрах максвеллианов так, чтобы некоторая невязка могла быть сделана сколь угодно малой.

В последующих работах изучались бимодальные распределения, включающие как глобальные, так и локальные максвеллианы различного частного вида, описывающие винтообразные [12], [13], смерчевые [14], [15] и другие равновесные состояния газа. Также были исследованы и некоторые многомодальные распределения [16].

В настоящей работе предлагается новый подход к поиску явных приближенных решений уравнения Больцмана, основанный на предположении, что массовая скорость глобального максвеллиана принимает не фиксированные дискретные значения, а становится произвольным параметром, принимающим любые значения из $\mathbb{R}^3$. Такие распределения могут быть названы континуальными.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать функцию распределения вида

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u) du, \quad (6)$$

в которую входят глобальные максвеллианы

$$M(v, u) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2}, \quad (7)$$

где плотность ρ и обратная температура β – произвольные неотрицательные постоянные.

Предполагается, что коэффициентная функция $\varphi(t, x, u)$ является неотрицательной и принадлежащей $C^1(\mathbb{R}^7)$. Требуется найти такие функции $\varphi(t, x, u)$ и такое поведение всех имеющихся параметров, чтобы равномерно-интегральная невязка [11]

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv \quad (8)$$

стремилась к нулю.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (6) и (7). Предположим, что функции φ , $|\partial\varphi/\partial t|$, $|\partial\varphi/\partial x|$ ограничены по t, x на $\mathbb{R}^7$, а величины

$$\varphi, |u|\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, u \frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3) \quad (9)$$

по переменной u равномерно относительно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тогда определенная в соответствии с формулой (8) величина Δ имеет смысл (т.е. существуют указанные в (8) конечный интеграл и конечный супремум) и существует такое Δ' , что

$$\Delta \leq \Delta', \quad (10)$$

причем

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Delta' = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \rho \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| du + \right. \\ \left. + 2\pi d^2 \rho \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) |u_1 - u_2| du_1 du_2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма [12], дающая достаточное условие непрерывности супремума специального вида функции многих переменных, взятого по части переменных.

ЛЕММА 1. Пусть функция $g(y, z): Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^1$; $Y \in \mathbb{R}^p$; $Z \in \mathbb{R}^q$, и выполнены следующие условия:

- 1) $g(y, z)$ для всех $z \in Z$ ограничена на Y ;
- 2) $g(y, z)$ непрерывна по z равномерно относительно y , т.е. для всех $z_0 \in Z$, $\varepsilon > 0$, $y \in Y$, $z \in Z$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(y, z) - g(y, z_0)| < \varepsilon.$$

Тогда функция

$$l(z) = \sup_{y \in Y} |g(y, z)|$$

непрерывна на множестве Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Подставив выражение (6) в уравнение Больцмана (1)–(3), получим

$$D(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) M(v, u) du, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q(f, f) = & \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \\ & \times \left[\int_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t, x, u_1) M(v'_1, u_1) \int_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t, x, u_2) M(v', u_2) - \right. \\ & \left. - \int_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t, x, u_1) M(v_1, u_1) \int_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t, x, u_2) M(v, u_2) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом формул (12) и (13) перепишем выражение (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta = & \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) M(v, u) du - \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \right. \\ & \times \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) [M(v'_1, u_1) M(v', u_2) - \\ & \left. - M(v_1, u_1) M(v, u_2)] du_1 du_2 \right| dv \leq \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) du + \right. \\ & + \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \times \\ & \times |M(v'_1, u_1) M(v', u_2) - M(v_1, u_1) M(v, u_2)| du_1 du_2 \Big] dv \leq \\ \leq & \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) du + \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \right. \\ & \times \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) [M(v'_1, u_1) M(v', u_2) + \\ & \left. + M(v_1, u_1) M(v, u_2)] du_1 du_2 \right] dv. \end{aligned} \quad (14)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) du dv + \right. \\ & + \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \times \\ & \times [M(v'_1, u_1) M(v', u_2) + M(v_1, u_1) M(v, u_2)] du_1 du_2 \Big] = \\ = & \sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) dv du + \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \times \right. \\ & \times \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \int_{\mathbb{R}^6} dv dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \\ & \left. \times [M(v'_1, u_1) M(v', u_2) + M(v_1, u_1) M(v, u_2)] \right] = \end{aligned}$$

$$= \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) dv du + \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \int_{\mathbb{R}^3} [G(M_1, M_2) + M_2 L(M_1)] dv \right], \quad (15)$$

где, как обычно, введены понятия “прибыточной” G и “затратной” L частей интеграла столкновений [1], [2]:

$$G(f, g) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| f(t, v'_1, x) g(t, v_1, x), \quad (16)$$

$$L(g) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| g(t, v_1, x), \quad (17)$$

и введено обозначение $M_i = M(v, u_i)$, $i = 1, 2$. В формуле (15) была также выполнена перестановка порядка интегрирований, законность которой можно обосновать следующим образом.

В первом слагаемом подынтегральная функция непрерывна, и

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) dv$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}^3$ (по теореме Вейерштрасса):

$$\left| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2} \right| \leq \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + |v| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \right),$$

и интегрируемо, так как выполнено условие (9).

Во втором интеграле подынтегральная функция непрерывна благодаря выполнению условий теоремы, а внутренний интеграл равномерно относительно u_1, u_2 сходится по теореме Вейерштрасса, так как существует интегрируемая мажоранта. Следовательно, мы можем и здесь поменять местами порядок интегрирования.

Поскольку, как известно [1],

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g) dv = 0,$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(M_1, M_2) dv = \int_{\mathbb{R}^3} M_1 L(M_2) dv. \quad (18)$$

В силу равенства (18) выражение (15) упрощается и, используя свойство супремума, можно записать

$$\Delta' = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2} dv du \right] + \\ + \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \int_{\mathbb{R}^3} [M_1 L(M_2) + M_2 L(M_1)] dv du_1 du_2 \right].$$

Проведем замену $\sqrt{\beta}(v - u) = w$, $v = w/\sqrt{\beta} + u$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\rho \pi^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| e^{-w^2} dw du \right] + \\ & + \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \int_{\mathbb{R}^3} [M_1 L(M_2) + M_2 L(M_1)] dw du_1 du_2 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Применим лемму 1 к каждому из супремумов, входящих в уравнение (19) (проверка условий леммы приведена в приложении). Поскольку для каждого из упомянутых супремумов условия леммы выполнены, вся величина Δ' непрерывна по γ на $\mathbb{R}_+^1$. Значит можно перейти к пределу при $\beta \rightarrow +\infty$, что равносильно устремлению γ к нулю. Для удобства осуществления предельного перехода рассмотрим выражение для Δ' до замены переменных, а именно

$$\begin{aligned} \Delta' = & \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) dv du \right] + \\ & + \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1) \varphi(t, x, u_2) \int_{\mathbb{R}^3} [M_1 L(M_2) + M_2 L(M_1)] dv du_1 du_2 \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что в смысле обобщенных функций, очевидно,

$$M(v, u) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \rho \delta(v - u). \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v, u) dv & \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \rho \delta(v - u) dv \\ & \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \rho \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|, \\ \int_{\mathbb{R}^3} M_1 L(M_2) dv & \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} M(v, u_1) d^2 \pi \rho |v - u_2| dv \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} d^2 \rho^2 \pi |u_1 - u_2|, \\ \int_{\mathbb{R}^3} M_2 L(M_1) dv & \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} M(v, u_2) d^2 \pi \rho |v - u_1| dv \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} d^2 \rho^2 \pi |u_1 - u_2|, \end{aligned} \quad (21)$$

в силу чего получим уравнение (11). Теорема доказана.

Далее, опираясь на полученное выражение для предела при $\beta \rightarrow +\infty$, найдем достаточное условие стремления невязки Δ к нулю, которое оформим в виде следствия из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены все предположения теоремы. Тогда соотношение

$$\Delta \rightarrow 0 \quad (22)$$

справедливо, если коэффициентная функция φ имеет следующий вид:

$$\varphi = C(x - ut) \left(\frac{P}{\pi} \right)^{3/2} e^{-P(u - u_0)^2}, \quad (23)$$

где C – любая гладкая, положительная и ограниченная вместе со своими производными функция, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ – произвольный фиксированный вектор, а $P \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предельным выражением (11) и подставим в него выражение (23). Подынтегральное выражение первого слагаемого становится равным нулю:

$$C'(x - ut)(-u) + uC'(x - ut) = 0.$$

Рассмотрим интеграл, входящий во второе слагаемое (пусть существует $M > 0: |C| \leq M$):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} C(x - u_1 t) \left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_1 - u_0)^2} C(x - u_2 t) \left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_2 - u_0)^2} |u_1 - u_2| du_1 du_2 \leq \\ & \leq M^2 \left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^6} e^{-P(u_1 - u_0)^2} e^{-P(u_2 - u_0)^2} |u_1 - u_2| du_1 du_2 = \\ & = \left[\begin{array}{l} \sqrt{P}(u_1 - u_0) = w_1; \quad u_1 = w_1/\sqrt{P} + u_0 \\ \sqrt{P}(u_2 - u_0) = w_2; \quad u_2 = w_2/\sqrt{P} + u_0 \end{array} \right] = \\ & = M^2 \left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \frac{1}{P^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_1^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_2^2} \left| \frac{w_1}{\sqrt{P}} + u_0 - \frac{w_2}{\sqrt{P}} - u_0 \right| dw_1 dw_2 \leq \\ & \leq \frac{M^2}{\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_1^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_2^2} \frac{|w_1|}{\sqrt{P}} dw_1 dw_2 + \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_1^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w_2^2} \frac{|w_2|}{\sqrt{P}} dw_2 dw_1 = \\ & = \frac{M^2}{\pi^3} \left[\pi^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{P}} + \pi^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{P}} \right] = \frac{4M^2}{\sqrt{P}\pi} \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегралом Эйлера–Пуассона и значениями интегралов, вычисленных ранее. Таким образом, мы доказали сходимость интеграла, входящего во второе слагаемое, и его стремление к нулю при $P \rightarrow +\infty$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношение (21) остается в силе и при фиксированном P в выражении (23), но при дополнительном условии: $d \rightarrow 0$ (околокнудсеновский газ).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В выражении (23), очевидно, можно было бы вместо первого множителя $C(x - ut)$ рассматривать и такой: $C([u \times x])$, а вместо второго – иные δ -образные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. С точки зрения физического смысла полученных результатов заметим, что теорема 1 является лишь некоторой математической абстракцией. Реально соотношения (10) и (11) вместе с (22) можно трактовать следующим образом: оценка (10) и нахождение предела в выражении (11) служат для обеспечения дальнейшей произвольной малости невязки Δ при соответствующих коэффициентных функциях и достаточно низкой абсолютной температуре, что означает лишь предположение о малости тепловой составляющей скоростей молекул при сохранении произвольной величины массовой скорости потока.

Итак, в настоящей работе нам удалось построить более общее, отличное от бимодальных, континуальное распределение, приближенно удовлетворяющее уравнению Больцмана (1)–(3) в смысле минимизации невязки (8).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проверим, что условия леммы 1 для выражения (19) выполнены. Здесь $y = (t, x)$, $Y = \mathbb{R}^4$, $z = \gamma$, где $\gamma = 1/\sqrt{\beta}$, $Z = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^1$. Проверим выполнение условия 1 для первого слагаемого, воспользовавшись условием (9) и тем, что $|\gamma| \leq 1$ при $\beta \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| e^{-w^2} dw du \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^6} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + |w||\gamma| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \right) e^{-w^2} dw du \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\pi^{3/2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| + 2\pi \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \pi^{3/2} \left| u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \right) du \end{aligned}$$

равномерно ограничено в силу условий теоремы 1 (второй интеграл легко вычисляется после перехода к сферической системе координат: $\int_{\mathbb{R}^3} |w| e^{-w^2} dw = 2\pi$).

Таким образом, функция, входящая в первый супремум, ограничена на Y относительно t, x . Теперь для первого слагаемого проверим выполнение условия 2 леммы:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| e^{-w^2} dw du - \int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma_0 + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| e^{-w^2} dw du \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma_0 + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \right] dw du \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (w\gamma + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (w\gamma_0 + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| dw du \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| |w||\gamma - \gamma_0| dw du \leq \delta \int_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| |w| dw du = 2\pi\delta \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| du, \end{aligned}$$

т. е. благодаря условиям теоремы второе условие леммы действительно выполнено.

Перед тем как проверить выполнение условий леммы для второго супремума в выражении (19), рассмотрим его подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} M_1 L(M_2) &= M \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1 \right) \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \left| \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - v_1, \alpha \right) \right| M(v_1, u_2) = \\ &= M \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1 \right) \frac{d^2}{2} \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \left| \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - v_1, \alpha \right) \right| e^{-\beta(v_1 - u_2)^2}. \end{aligned}$$

Введем замену

$$\sqrt{\beta}(v_1 - u_2) = s, \quad v_1 = \frac{s}{\sqrt{\beta}} + u_2 :$$

$$M_1 L(M_2) = M(w\gamma + u_1, u_1) \frac{d^2}{2} \rho \pi^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} ds \int_{\Sigma} d\alpha |(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2, \alpha)| e^{-s^2}.$$

Пусть θ – угол между векторами $(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2)$ и α . Тогда

$$\begin{aligned} M_1 L(M_2) &= M(w\gamma + u_1, u_1) \frac{d^2}{2} \rho \pi^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} \times \\ &\quad \times \int_{\Sigma} d\alpha |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| |\cos \theta|. \end{aligned}$$

Ось z направим вдоль вектора $(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2)$ и введем на Σ сферическую систему координат, тогда очевидное интегрирование по углам θ и φ дает

$$M_1 L(M_2) = M(w\gamma + u_1, u_1) \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2|.$$

Аналогично

$$M_2 L(M_1) = M(w\gamma + u_2, u_2) \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1|.$$

Проверим выполнение условия 1 леммы для второго супремума в выражении (19):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[M(w\gamma + u_1, u_1) \gamma^{-3/2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + M(w\gamma + u_2, u_2) \gamma^{-3/2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1| \right] dw du_1 du_2 \right| = \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1| \right] dw du_1 du_2 \right| \leq \\ & \leq 2 \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[e^{-w^2} \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} (|\gamma| |w - s| + |u_1| + |u_2|) \right] dw du_1 du_2 \leq \\ & \leq \frac{2d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[e^{-w^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} (|w| + |s| + |u_1| + |u_2|) \right] dw du_1 du_2 \leq \\ & \leq \frac{2d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 [4\pi^{5/2} + \pi^3 (|u_1| + |u_2|)] du_1 du_2 = \\ & = 2d^2 \rho^2 \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 [4\sqrt{\pi} + \pi (|u_1| + |u_2|)] du_1 du_2. \end{aligned}$$

Значит, функция, входящая во второй супремум, также ограничена на Y относительно t, x благодаря условиям теоремы.

Теперь проверим выполнение условия 2 леммы для второго супремума в выражении (19):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1| \right] dw du_1 du_2 - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[\rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma_0 + u_1 - s\gamma_0 - u_2| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho \pi^{-3/2} e^{-w^2} \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w\gamma_0 + u_2 - s\gamma_0 - u_1| \right] dw du_1 du_2 \right| = \\ & = \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \left| \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} [(|w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| - |w\gamma_0 + u_1 - \right. \\ & \quad \left. - s\gamma_0 - u_2|) + (|w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1| - |w\gamma_0 + u_2 - s\gamma_0 - u_1|)] dw du_1 du_2 \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} \times \\
&\times [|w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2 - w\gamma_0 - u_1 + s\gamma_0 + u_2| + \\
&\quad + |w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1 - w\gamma_0 - u_2 + s\gamma_0 + u_1|] dw du_1 du_2 \leq \\
&\leq 2 \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} |w - s| |\gamma - \gamma_0| dw du_1 du_2 \leq \\
&\leq 2\delta \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w^2} \int_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} (|w| + |s|) dw du_1 du_2 = \\
&= 4\pi^{5/2} \cdot 2\delta \frac{d^2 \rho^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 du_1 du_2 = 8\delta d^2 \rho^2 \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \varphi_1 \varphi_2 du_1 du_2.
\end{aligned}$$

Значит, благодаря условиям теоремы 1 условие 2 леммы 1 действительно выполнено.

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [2] М. Коган, *Динамика разреженного газа*, Наука, М., 1967.
- [3] Т. Карлеман, *Математические задачи кинетической теории газов*, ИЛ, М., 1960.
- [4] А. В. Бобылев, *Докл. АН СССР*, **225**:6 (1975), 1296–1299.
- [5] K. Krook, T. T. Wu, *Phys. Fluids*, **20**:10 (1977), 1589–1595.
- [6] H. M. Ernst, *J. Statist. Phys.*, **34**:5–6 (1984), 1001–1017.
- [7] И. Е. Тамм, *Тр. ФИАН*, **29** (1965), 239–249.
- [8] H. M. Mott-Smith, *Phys. Rev.*, **82**:6 (1951), 885–892.
- [9] R. Narasimha, S. M. Deshpande, *J. Fluid Mech.*, **36**:3 (1969), 555–570.
- [10] I. Hosokawa, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57**:6 (1988), 1865–1867.
- [11] В. Д. Гордевский, *ТМФ*, **114**:1 (1998), 126–136.
- [12] В. Д. Гордевский, *ТМФ*, **126**:2 (2001), 283–300.
- [13] В. Д. Гордевский, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 278–286.
- [14] V. D. Gordevskiy, *Nonlinear Anal.*, **53**:3–4 (2003), 481–494.
- [15] В. Д. Гордевский, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 303–314.
- [16] V. D. Gordevsky, *Math. Methods Appl. Sci.*, **21**:16 (1998), 1479–1494.

Поступила в редакцию 20.07.2011,
после доработки 12.09.2011