Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чжун-Хао Сюй, Я. Хигучи, Чунь-Хуа Ху, Предельные режимы для графов случайных связностей, управляемых пуассоновым процессом, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 28–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:52:45

© 2012 г. Чжун-Хао Сюй*, Я. Хигучи†, Чунь-Хуа Ху‡

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ДЛЯ ГРАФОВ СЛУЧАЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ПУАССОНОВЫМ ПРОЦЕССОМ

Рассматривается класс графов случайных связностей со случайными вершинами и случайными ребрами, причем распределение вершин задается локализованными в вершинах пуассоновыми процессами с интенсивностью n , а распределение ребер задается функцией связностей. С помощью метода Аврама–Берсима, построенного в 1992 г. для центральной предельной теоремы на евклидовых функционалах, найдены скорость сходимости процесса центральной предельной теоремы и получены результаты, касающиеся вероятности умеренных отклонений, а также верхняя оценка вероятности больших отклонений для полной длины всех ребер графа случайных связностей.

Ключевые слова: граф случайных связностей, граф зависимостей, центральная предельная теорема, умеренные отклонение, большие отклонения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, теория перколяций испытала бурное развитие с того времени, когда она была впервые предложена в виде математической модели Бродбентом и Хаммерсли в 1957 г. Большинство работ было посвящено исследованию перколяций на целочисленных решетках. Были получены разнообразные результаты, касающиеся бернуллиевской перколяции [1], [2] и теории непрерывной перколяции на пространстве $\mathbb{R}^d$ [3]. Исследователями были предложены различные модели случайных графов, сыгравшие важную роль в развитии теории непрерывной перколяции. Отметим, что многие из моделей графов можно рассматривать как одну и ту же модель, а именно модель графов случайных связностей. В настоящей работе рассматривается новый класс моделей графов случайных связностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n, \dots\}$ детерминированные или независимые случайные точки, имеющие одно и то же распределение F на

*School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, China.
E-mail: hsuchunghao@gmail.com

†Department of Mathematics, Kobe University, Kobe, Japan

‡School of Applied Mathematics, Beijing Normal University, Zhuhai, China

евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Для каждой пары точек $x, y \in \mathcal{X}$ ребро между x и y возникает с вероятностью $g(x, y; \mathcal{X})$, не зависящей от вероятностей возникновения других ребер. Обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{X}, g)$ получающийся при этом граф, который будем называть *графом случайных связностей*, с множеством вершин $\mathcal{X}$ и с множеством ребер, задаваемым функцией вероятностей связностей g .

Из функции вероятностей связностей g получим, что вероятность возникновения связи между двумя точками может зависеть от информации о других точках.

В частности, в работе [4] для различных примеров функции g были представлены некоторые специальные модели графов случайных связностей такие, как модель перколяций бернуллиевских связей [1], [2], локально зависящая перколяция [5], [6], случайные геометрические графы [7] и т. д. Все эти модели графов, как правило, исследовались в рамках статистической физики и теории проверки гипотез, они применялись на практике в последние несколько лет в качестве моделей сетей с динамическими связностями, сенсорных сетей и социальных сетей. Перколяции и графы случайных связностей нашли разнообразные применения в анализе данных массивов многих переменных методами непараметрической статистики, включая проверки достоверности моделей, классификации, регрессии, оценки шума, оценки плотности, кластерный анализ (см. работы [8]–[10] и приведенную в них литературу).

Хотя с помощью указанных моделей графов были получены достаточно обширные результаты, весьма незначительная их часть следует из предельных теорем, в частности для непрерывных моделей. Поэтому для графов случайных связностей представляется необходимым установить предельную теорию: центральные предельные теоремы (ЦПТ), законы больших чисел (ЗБЧ) и больших отклонений и т. д.

Цель настоящей работы состоит в исследовании предельного поведения суммарной длины всех ребер графов случайных связностей, управляемых пуассоновыми процессами. В двух предыдущих работах нами были получены некоторые результаты, касающиеся асимптотического поведения графов случайных связностей. В работе [4] была сформулирована ЦПТ для представленной здесь модели графов случайных связностей, однако в этой работе отсутствовала оценка скорости сходимости. В работе [11] был доказан ЗБЧ для графов случайных связностей, управляемых непрерывным распределением. В этой работе первая теорема представляет собой дополнение к ЦПТ из работы [4], две другие теоремы описывают результаты для умеренных отклонений и больших отклонений. Как было указано Ву [12], оценки умеренных и больших отклонений даются на основе условий, налагаемых статистикой. Большие отклонения задают точную оценку, связанную с ЗБЧ. Умеренные отклонения часто применяются для получения дальнейших оценок, связанных с ЦПТ и с законом повторных логарифмов.

Основной задачей настоящей работы является вычисление скорости сходимости ЦПТ и получение результатов о вероятности умеренных отклонений, а также верхней оценки вероятности больших отклонений для суммарной длины всех ребер графа случайных связностей. Эти предельные результаты важны для теорем о случайных графах и моделях перколяций. Это первый результат настоящей работы.

С другой стороны, в работе применяется метод Аврама–Бертсима, использованный в работе [13] для демонстрации ЦПТ, не только для доказательства справедливости ЦПТ в нашей модели, но и для оценки вероятностей умеренных отклонений и больших отклонений, что расширяет область применимости метода.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 дается определение графа случайных связностей, управляемого пуассоновым процессом, и формулируются ЦПТ. В разделе 3 приводятся некоторые результаты, касающиеся графов зависимостей, используемые при доказательствах теорем. В разделе 4 даются детальные доказательства теорем из раздела 2. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_{N_n}\}$ пуассоновы точки в $\mathbb{R}^2$, с интенсивностью n падающие в единичный квадрат $S = [0, 1]^2$; тем самым N_n представляет собой пуассонову случайную переменную со средним значением n .

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, $0 \leq p_i \leq 1$, представляет собой бесконечномерный вектор. Точки $x, y \in \mathcal{X}_n$ соединяются ребром с вероятностью $g^{\mathbf{p}}(x, y; \mathcal{X}_n)$, где $g^{\mathbf{p}}(x, y; \mathcal{X}_n) = p_i$, если точка y является i -м ближайшим соседом точки x , лежащей в $\mathcal{X}_n$. Получившийся при этом граф случайных связностей с функцией вероятностей связей $g^{\mathbf{p}}$ называется *графом случайных связностей, управляемым пуассоновым процессом*, и обозначается как $\mathcal{C}(\mathcal{X}_n, g^{\mathbf{p}})$ или $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обычно введенная в определении 2 функция $\mathcal{C}(\mathcal{X}_n, g^{\mathbf{p}})$ представляет собой направленный случайный граф, поскольку не налагается условие симметричности функции вероятностей связей g . Разумеется, можно рассматривать ненаправленный случай, если наложить условие $g^{\mathbf{p}}(x, y; \mathcal{X}_n) = g^{\mathbf{p}}(y, x; \mathcal{X}_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что если $p_i = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$ и $p_i = 0$ для $i > k$, то $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$ представляет собой граф со связями между k ближайшими соседями. Такие графы образуют важный класс геометрических графов, находящий многочисленные приложения в обработке изображений, кластеризации данных и сетевых коммуникациях. В литературе можно найти ЦПТ, ЗБЧ, предельные теоремы для связности и перколяций таких графов (см. [14]–[17]).

Обозначим через $\xi_n(x)$ полную длину всех направленных ребер, исходящих из точки x , а через $\eta_n = \sum_{x \in \mathcal{X}_n} \xi_n(x)$ – полную длину всех ребер графа $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$. Запишем $\eta_n^* = (\eta_n - E\eta_n)/\sqrt{\text{Var } \eta_n}$. Будем полагать далее, что $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k, 0, 0, \dots)$, где $0 \leq p_i \leq 1$ для $i = 1, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 1. При достаточно больших n имеем

$$|P\{\eta_n^* \leq x\} - \Phi(x)| \leq \frac{C}{n^{1/8}},$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной гауссовой случайной величины, C – постоянная, не зависящая от n . Таким образом,

$$\frac{\eta_n - E\eta_n}{\sqrt{\text{Var } \eta_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует числовая последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$ такая, что $a_n \rightarrow \infty$ и последовательность случайных величин $\{\eta_n^*/a_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет принципу умеренных отклонений со скоростью a_n^2 и функцией амплитуды $x^2/2$. Тогда для $x \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\frac{1}{a_n^2} \ln P\left\{\frac{\eta_n^*}{a_n} \geq x\right\} \rightarrow -\frac{x^2}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существует функция $L(k) \geq 0$ такая, что для $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка*

$$P\{\eta_n - E\eta_n \geq \sqrt{n}x\} \leq e^{-n^\alpha L(k)x^2} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $0 < \alpha < 1/3$. Та же верхняя оценка справедлива для $P\{\eta_n - E\eta_n \leq -\sqrt{n}x\}$.

Прежде чем перейти к доказательствам приведенных выше теорем, опишем идеи, лежащие в основе этих доказательств. Соответствующие методы были разработаны Аврамом и Бертсимасом [13]. Ими был достигнут поразительный прогресс в решении важной и давно поставленной задачи формулировки ЦПТ для евклидовых функционалов [18]. Авторы работы [13] сначала показали выполнение ЦПТ на событии Ω_n с высокой вероятностью. Для события Ω_n они построили граф зависимостей и применили ЦПТ Балди–Ринотта [19] на графах зависимостей. Затем они выбрали некоторые необходимые меры на Ω_n^c и получили ЦПТ на всем пространстве вероятностей. В настоящей работе мы также применяем метод Аврама–Бертсимаса, который не только позволяет доказать ЦПТ, но и дает верхние границы для вероятностей умеренных и больших отклонений.

3. ГРАФ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В этом разделе представлены некоторые результаты, касающиеся предельных режимов графов зависимостей, использованных в разделе 2. Начнем с определения графа зависимостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [13]. Граф $G = (V, E)$ называется *графом зависимостей* для совокупности случайных величин $\{X_\alpha, \alpha \in V\}$, если для каждой пары непересекающихся подмножеств $A_1, A_2 \subset V$ таких, что ни одно ребро из E не имеет одной концевой точки в A_1 , а другой концевой точки – в A_2 , σ -поля $\sigma\{X_\alpha, \alpha \in A_1\}$ и $\sigma\{X_\alpha, \alpha \in A_2\}$ взаимно независимы.

Следующая теорема представляет собой ЦПТ для графов зависимостей.

ТЕОРЕМА 4 [19]. Пусть $\{X_{\alpha n}, \alpha \in V_n\}$ – случайная величина, граф зависимостей которой есть $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq 1$. Пусть $S_n = \sum_{\alpha \in V_n} X_{\alpha n}$, $\sigma_n^2 = \text{Var}[S_n] < \infty$. Обозначим через D_n максимальную степень G_n . Более того, имеется постоянная B_n такая, что $|X_{\alpha n}| \leq B_n$ почти наверное при всех $\alpha \in V_n$. Тогда

$$\left| P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sigma_n} \leq x\right\} - \Phi(x) \right| \leq 32(1 + \sqrt{6}) \left(\frac{|V_n| D_n^2 B_n^3}{\sigma_n^3} \right)^{1/2}.$$

Поэтому если $|V_n| D_n^2 B_n^3 / \sigma_n^3 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{S_n - ES_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Обратимся теперь к оценке кумулянтов для набора случайных величин, связанных с графами зависимостей.

Пусть X – случайная переменная с $E|X|^j < \infty$ при $j = 1, 2, \dots$, тогда j -й кумулянт переменной X по определению задается формулой

$$\Gamma_j = (-i)^j \frac{d^j}{dt^j} \ln \phi(t) \Big|_{t=0},$$

в которой через $\phi(t) = Ee^{itX}$ обозначена характеристическая функция величины X .

Для кумулянтов класса случайных переменных, связанных с графом зависимостей, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5 [20]. Пусть $G = (V, E)$ – граф зависимостей для случайных величин $\{X_\alpha, \alpha \in V\}$, D – максимальная степень графа G . Пусть существует постоянная B такая, что $|X_\alpha| \leq B$ почти наверное при всех $\alpha \in V$. Положим $Z = \sum_{\alpha \in V} X_\alpha$ и $\sigma^2 = \text{Var}(Z)$, тогда кумулянты Γ_j величины Z/σ ограничены,

$$|\Gamma_j| \leq (j!)^3 |V| (D+1)^{j-1} \left(\frac{2eB}{\sigma} \right)^j$$

при всех $j \geq 1$.

Недавно оценки для кумулянтов были детально изучены при исследованиях асимптотических поведений случайных систем (см. работы [12], [21] и приведенную в них литературу). Особенно часто кумулянты применяются для демонстрации принципа умеренных отклонений (см. [20]).

В заключение этого раздела приведем верхнюю границу для больших отклонений случайных величин, связанных с графами зависимостей.

ТЕОРЕМА 6 [22]. При условиях теоремы 5 при всех $x > 0$

$$P(Z - EZ \geq x) \leq \exp \left(- \frac{2x^2}{(D+1)|V|B^2} \right).$$

Эта же оценка остается справедливой и для $P(Z - EZ \leq -x)$.

Хорошо известно, что имеется много результатов относительно больших отклонений для независимых слагаемых, существенные результаты получаются при использовании различных предположений. Для зависимых слагаемых также имеется значительное количество результатов относительно больших отклонений (см. [22]–[24]).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

В этом разделе приводятся доказательства теорем из раздела 2. Как было указано в конце раздела 2, основные идеи доказательств связаны с применением предельных результатов для графов зависимостей из раздела 3. Поэтому начнем с построения графа зависимостей для какого-либо события с высокой вероятностью.

Далее будем полагать, что $m = m(n)$ обозначает функцию от n , выполнено условие $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda = un/m^2$ при достаточно больших n , где u – вещественное число и $u \geq e^2$.

Разобьем единичный квадрат $S = [0, 1]^2$ на m^2 подквадратов $S_1, \dots, S_{m^2}$ одинакового размера. Для каждого $i = 1, \dots, m^2$ обозначим через N_{in} число случайных точек, попавших в подквадрат S_i . Тогда N_{in} есть пуассонова случайная величина с интенсивностью n/m^2 . Тем самым имеем

$$P(N_{in} = 0) = e^{-n/m^2} = e^{-\lambda/u}. \quad (1)$$

Простое вычисление дает

$$P(N_{in} > \lambda) \leq e^{-\lambda}. \quad (2)$$

Действительно, в силу неравенства Чебышева при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$P(N_{in} > \lambda) \leq e^{-t\lambda} E(e^{tN_{in}}) = \exp\left\{\frac{n}{m^2}(e^t - 1) - t\lambda\right\}.$$

Предположим, что

$$h(t) = \exp\left\{\frac{n}{m^2}(e^t - 1) - t\lambda\right\}, \quad t_0 = \ln(n^{-1}m^2\lambda) \geq \ln e^2 = 2.$$

Тогда

$$P(N_{in} > \lambda) \leq \inf\{h(t) : t \in \mathbb{R}\} = h(t_0) = \exp\left\{\lambda(1 - t_0) - \frac{n}{m^2}\right\} \leq \exp\left\{-\lambda - \frac{n}{m^2}\right\} \leq e^{-\lambda}.$$

Определим теперь событие

$$\Omega_n = \bigcap_{i=1}^{m^2} \{1 \leq N_{in} \leq \lambda\}.$$

Тогда в силу (1) и (2) имеем

$$P(\Omega_n^c) \leq \sum_{i=1}^{m^2} P(N_{in} = 0 \text{ или } N_{in} > \lambda) \leq 2m^2 e^{-\lambda/u}. \quad (3)$$

Теперь перенумеруем индексы всех m^2 подквадратов. Пусть $i = (i_1, i_2)$ обозначает индекс подквадрата

$$S_i = \left[\frac{i_1 - 1}{m}, \frac{i_1}{m}\right] \times \left[\frac{i_2 - 1}{m}, \frac{i_2}{m}\right], \quad i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}.$$

Обозначим через V_n множество всех индексов. Перепишем η_n как $\eta_n = \sum_{i \in V_n} \eta_{in}$, где $\eta_{in} = \sum_{x \in S_i} \xi_n(x)$.

Для m^2 точек i из множества V_n при условии, что произошло Ω_n , построим граф зависимостей, связанный со случайными переменными $\{\eta_{in}, i \in V_n\}$. Для $i, j \in V_n$ проведем ребро, если $d^*(i, j) \leq 2k$, где расстояние между $i = (i_1, i_2)$ и $j = (j_1, j_2)$ задается формулой $d^*(i, j) = \max\{|i_1 - j_1|, |i_2 - j_2|\}$. Обозначим через E_n набор всех ребер.

При условии Ω_n граф $G_n = (V_n, E_n)$ представляет собой граф зависимостей для случайных величин $\{\eta_{in}, i \in V_n\}$, а максимальная степень D_n графа G_n не превышает $(4k+1)^2$. Это рассуждение очевидно. В силу того что Ω_n произошло, каждый подквадрат содержит по крайней мере одну точку, и $\xi_n(x)$ зависит от x и от ее k ближайших соседей, η_{in} зависит от точек, лежащих в подквадратах, граничащих с подквадратом i . Детали рассуждения можно найти в работе [4].

Каждый подквадрат имеет стороны длины $1/m$, поэтому при условии Ω_n

$$\xi_n(x) \leq d(x, y_1) + \dots + d(x, y_n) \leq (2 + 3 + \dots + (k+1)) \cdot \frac{\sqrt{2}}{m} \triangleq \frac{C_1(k)}{m},$$

где через y_i обозначена i -я ближайшая соседняя точка для точки x в $\mathcal{X}_n$. Тогда

$$0 \leq \eta_{in} \leq C_1(k) \cdot \frac{\lambda}{m}, \quad (4)$$

здесь и далее $C_i(k)$ – постоянные, не зависящие от n .

С другой стороны, мы утверждаем, что существует положительная константа $C_2(k)$ такая, что

$$\text{Var}(\eta_n) \geq (C_2(k))^2 > 0. \quad (5)$$

Поскольку мы можем доказать эту нижнюю границу с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям работы [4], основанным на идее работы [25], дальнейшее доказательство опустим, но для удобства читателя оно приведено в приложении.

Три приведенные выше оценки (3), (4) и (5) используются в доказательствах теорем 1–3. Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7 [20]. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмем Z_n – случайную величину с $EZ_n = 0$, $\text{Var}(Z_n) = 1$ и абсолютными моментами, которая удовлетворяет условию*

$$|\Gamma_j(Z_n)| \leq \frac{(j!)^{1+\gamma}}{\Delta_n^{j-2}}, \quad j = 3, 4, \dots$$

при фиксированных $\gamma \geq 0$ и $\Delta_n > 0$. Если последовательность вещественных чисел такова, что выполнены условия $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\frac{a_n}{\Delta_n^{1/(1+2\gamma)}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

то величина $\{Z_n/a_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет принципу умеренных отклонений со скоростью a_n^2 и функцией амплитуды $x^2/2$.

Приведем теперь формальные доказательства теорем 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ предположим, что $A_n = \{\eta_n^* \leq x\}$. Тогда из оценок (4), (5) и теоремы 4 получим

$$|P(A_n | \Omega_n) - \Phi(x)| \leq C_3(k) \left(\frac{\lambda^3}{m} \right)^{1/2}.$$

Поэтому в силу (3) имеем

$$\begin{aligned} |P(A_n) - \Phi(x)| &\leq |P(A_n | \Omega_n) - \Phi(x)|P(\Omega_n) + |P(A_n | \Omega_n^c) - \Phi(x)|P(\Omega_n^c) \leq \\ &\leq |P(A_n | \Omega_n) - \Phi(x)| + 2P(\Omega_n^c) \leq C_3(k) \left(\frac{\lambda^3}{m} \right)^{1/2} + 4m^2 e^{-\lambda/u}. \end{aligned}$$

Выбрав теперь $m = n^{13/28}$, получим

$$|P(A_n) - \Phi(x)| \leq O(n^{-1/8})(1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно теореме 2 при условии Ω_n для кумулянтов $\Gamma_j(\eta_n^*)$ величин η_n^* существует оценка

$$\begin{aligned} |\Gamma_j(\eta_n^*)| &\leq (j!)^3 m^2 ((4k+1)^2 + 1)^{j-1} \left(\frac{2eC_1(k)}{C_2(k)} \cdot \frac{\lambda}{m} \right)^j \leq \\ &\leq (j!)^3 \left[((4k+1)^2 + 1)^2 \left(\frac{2eC_1(k)}{C_2(k)} \right)^3 \cdot \frac{\lambda^3}{m} \right]^{j-2}, \quad j = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Возьмем теперь $\gamma = 2$ и

$$\Delta_n = \left[((4k+1)^2 + 1)^2 \left(\frac{2eC_1(k)}{C_2(k)} \right)^3 \cdot \frac{\lambda^3}{m} \right]^{-1}.$$

При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ предположим, что $B_n = \{\eta_n^*/a_n \geq x\}$. Согласно теореме 7, если a_n удовлетворяет условиям

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{a_n}{\Delta_n^{1/5}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

получим

$$\frac{1}{a_n^2} \ln P(B_n | \Omega_n) + \frac{x^2}{2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Таким образом, при всех $\varepsilon > 0$ и при достаточно больших n

$$e^{-a_n^2(x^2/2+\varepsilon)} \leq P(B_n | \Omega_n) \leq e^{-a_n^2(x^2/2-\varepsilon)}. \quad (8)$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n^2} \ln P(B_n) + \frac{x^2}{2} &= \frac{1}{a_n^2} \ln [P(B_n | \Omega_n)P(\Omega_n) + P(B_n | \Omega_n^c)P(\Omega_n^c)] + \frac{x^2}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{a_n^2} \ln [P(B_n | \Omega_n) + P(\Omega_n^c)] + \frac{x^2}{2} = \\ &= \frac{1}{a_n^2} \ln \left\{ P(B_n | \Omega_n) \cdot \left[1 + \frac{P(\Omega_n^c)}{P(B_n | \Omega_n)} \right] \right\} + \frac{x^2}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{a_n^2} \ln P(B_n | \Omega_n) + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a_n^2} \frac{P(\Omega_n^c)}{P(B_n | \Omega_n)}, \end{aligned}$$

для завершения доказательства теоремы мы должны показать, что

$$\frac{1}{a_n^2} \frac{P(\Omega_n^c)}{P(B_n | \Omega_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В соответствии с оценками (3) и (8) имеем

$$\frac{1}{a_n^2} \frac{P(\Omega_n^c)}{P(B_n | \Omega_n)} \leq \frac{2m^2 e^{-\lambda/u}}{a_n^2 e^{-a_n^2(x^2/2+\varepsilon)}}.$$

Тем самым, если показать, что найдется числовая последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$, удовлетворяющая условиям (6) такая, что

$$\frac{m^2 e^{-\lambda/u}}{a_n^2 e^{-a_n^2(x^2/2+\varepsilon)}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

то этого будет достаточно для завершения доказательства.

Можно утверждать, что последовательность чисел, удовлетворяющая условиям (6) и (9), существует. Действительно, выбрав $a_n = O(n^\delta)$, где $0 < \delta < 1/28$ и $m = n^{13/28}$, с помощью элементарных оценок можно проверить, что оценки (6) и (9) выполняются. Тем самым теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно теореме 6 имеем

$$P\{\eta_n - E\eta_n \geq \sqrt{n}x \mid \Omega_n\} \leq \exp\left(-\frac{2nx^2}{((4k+1)^2+1)m^2 C_1^2(k)\lambda^2/m^2}\right).$$

Предположив, что

$$L(k) = \left[\frac{((4k+1)^2+1)C_1^2(k)u^2}{2} \right]^{-1},$$

и вспомнив, что $\lambda = un/m^2$, получим

$$P\{\eta_n - E\eta_n \geq \sqrt{n}x \mid \Omega_n\} \leq e^{-L(k)x^2 \cdot m^4/n}.$$

Возьмем теперь $m = n^\beta$, где $1/4 < \beta < 1/3$, тогда

$$\begin{aligned} P\{\eta_n - E\eta_n \geq \sqrt{n}x\} &\leq P\{\eta_n - E\eta_n \geq \sqrt{n}x \mid \Omega_n\} + P(\Omega_n^c) \leq \\ &\leq e^{-L(k)x^2 \cdot m^4/n} + C_0 m^2 e^{-\lambda} \leq e^{-L(k)x^2 \cdot n^\alpha} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\alpha = 4\beta - 1$ и $0 < \alpha < 1/3$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдены скорость сходимости для ЦПТ и получены результаты, касающиеся вероятности умеренных отклонений, а также верхней оценки вероятности больших отклонений для полной длины всех ребер графа случайных связей, управляемых пуассоновым процессом.

В действительности предположение о том, что случайные точки обладают пуассоновым распределением, не является существенным. Например, можно предположить, что $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ представляют собой независимые одинаково распределенные случайные точки, принимающие значения в квадрате $S = [0, 1]^2$ с непрерывной функцией распределения $\mu(dx) = \rho(x)dx$ и с положительными постоянными a и b такими, что $0 < a \leq \rho(x) \leq b < 1$ при всех $x \in S$.

Приведенное выше утверждение можно доказать с помощью того же метода с небольшими модификациями. В этом случае для каждого $i = 1, \dots, m^2$ величина N_{in} оказывается биномиальной случайной величиной с параметрами n и q_i , где

$$q_i = \mu(S_i) = \int_{S_i} \rho(x) dx.$$

При этом

$$P(N_{in} = 0) = (1 - q_i)^n \leq e^{-nq_i} \leq e^{-an/m^2}. \quad (10)$$

В соответствии с неравенством Чебышева при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} P(N_{in} > \lambda) &\leq e^{-t\lambda} E(e^{tN_{in}}) = e^{n \ln(1+q_i(e^t-1)) - t\lambda} \leq \\ &\leq e^{nq_i(e^t-1) - t\lambda} \leq e^{(bn/m^2)(e^t-1) - t\lambda}. \end{aligned}$$

Затем, если выбрать $u \geq be^2$ и $\lambda = un/m^2$, получим оценку (2). Поэтому в силу оценок (10) и (2) имеем

$$P(\Omega_n^c) \leq \sum_{i=1}^{m^2} P(N_{in} = 0 \text{ или } N_{in} > \lambda) \leq m^2(e^{-a\lambda/u} + e^{-\lambda}) \leq 2m^2 e^{-a\lambda/u}. \quad (11)$$

Сравнив выражения (11) и (3), можно заключить, что доказательства теорем 4–6 проводятся аналогично с единственной заменой u на u/a .

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении для целостности изложения приводится доказательство нижней оценки для $\text{Var}(\eta_n)$. Идея доказательства заимствована в работе [25].

Сначала разобьем единичный квадрат $S = [0, 1]^2$ на q^2 равных малых квадратов $Q_1, Q_2, \dots, Q_{q^2}$, где $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа). Будем называть квадрат Q *ловушкой*, если он содержит внутри себя 21 малых квадратов таких, что:

- 1) имеется по крайней мере $k + 1$ точек в каждом из 20 квадратов, лежащих на периферии Q ;
- 2) имеется ровно $k + 1$ точек в центральном квадрате C ;
- 3) в оставшейся части нет ни одной точки (см. рис. 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По определению событие типа ловушки приводит к тому, что случайные точки, лежащие в центральном квадрате, отделены от всех других точек.

Для каждого $i = 1, \dots, q^2$ обозначим через $\delta = (1/6 \cdot 1/q)^2 = 1/(36q^2)$ площадь малого квадрата в подквадрате Q_i . Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что подквадрат Q_i представляет собой ловушку, тогда по определению ловушки имеем

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \left(1 - \sum_{j=0}^k e^{-n\delta} \cdot \frac{(n\delta)^j}{j!}\right)^{20} \cdot \left(e^{-n\delta} \cdot \frac{(n\delta)^{k+1}}{(k+1)!}\right) \cdot e^{-n(1/q^2 - 21\delta)} \geq \\ &\geq e^{-36n\delta} \left(\frac{(n\delta)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{21} \geq e^{-1} (36^{k+1} (k+1)!)^{-21} \equiv a(k), \end{aligned}$$

Рис. 1

где последнее неравенство следует из условия $n \geq q^2$ и того факта, что функция $h(t) = e^{-t}t^m$, $m > 1$, возрастает на отрезке $[1, m]$.

Предположим, что $I(\omega) = \{i \in \{1, 2, \dots, q^2\} : \omega \in A_i\}$ и $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, где C_i – центральный квадрат ловушки Q_i . Построим теперь σ -алгебру

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{I(\omega), \{X_1, \dots, X_{N_n}\} \cap C^c\},$$

т. е. $\mathcal{F}_n$ определяется случайным множеством I и случайными точками, лежащими вне всех центральных квадратов $C = \bigcup_{i \in I} C_i$.

По определению условной вероятности имеем

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_n) &= \text{Var}[E(\eta_n | \mathcal{F}_n)] + E[\text{Var}(\eta_n | \mathcal{F}_n)] \geq \\ &\geq E[\text{Var}(\eta_n | \mathcal{F}_n)] = E[\text{Var}(\eta_n(C) + L_n(C^c) | \mathcal{F}_n)], \end{aligned}$$

где через $\eta_n(C)$ и $\eta_n(C^c)$ обозначены полные длины всех ребер, исходящих из соответствующих точек в C и C^c .

Используя свойство условного математического ожидания и учитывая, что $\eta_n(C^c) \in \mathcal{F}_n$, получим

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_n) &\geq E[\text{Var}(\eta_n(C) | \mathcal{F}_n)] = E\left[\text{Var}\left(\sum_{i \in I} \eta_n(C_i) \mid \mathcal{F}_n\right)\right] = \\ &= E\left(\sum_{i \in I} \text{Var}[\eta_n(C_i)]\right) = \text{Var}[\eta_n(C_i)] \cdot E|I| = \\ &= b(k)\delta \cdot E\left(\sum_{i=1}^{q^2} 1_{A_i}\right) = b(k)\delta q^2 P(A_1) \geq \frac{a(k)b(k)}{36}, \end{aligned}$$

где $b(k)$ – дисперсия полной длины ребер, исходящих из ровно $k + 1$ случайных точек, лежащих в квадрате единичной площади. Последнее неравенство получено с использованием того, что $\delta = 1/36q^2$ и $P(A_1) \geq a(k)$.

Благодарности. Работа частично поддержана Natural Science Foundation of China (71071056)(10971068).

Список литературы

- [1] G. Grimmett, *Percolation*, Springer, Berlin, 1999.
- [2] B. Bollobás, O. Riordan, *Percolation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [3] R. Meester, R. Roy, *Continuum Percolation*, Cambridge Tracts in Mathematics, **119**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [4] Z. H. Xu, Y. Higuchi, “A central limit theorem of random biased connected graphs”, *Sci. China Math.*, 2012, to appear [in Chinese].
- [5] K. Kuulasmaa, *J. Appl. Probab.*, **19**:4 (1982), 745–758.
- [6] Z. H. Xu, D. Han, *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, **26**:6 (2010), 649–661.
- [7] M. D. Penrose, *Random Geometric Graphs*, Oxford Studies in Probability, **5**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
- [8] P. J. Bickel, L. Breiman, *Ann. Probab.*, **11**:1 (1983), 185–214.
- [9] D. Evans, A. J. Jones, *Proc. R. Soc. London A*, **458**:2027 (2002), 2759–2799.
- [10] N. Henze, *Adv. Appl. Probab.*, **19**:4 (1987), 873–895.
- [11] Чжун-Хао Сюй, Я. Хигучи, Чунь-Хуа Ху, “Усиленный закон больших чисел для графов случайных смещенных связностей”, *ТМФ*, 2012, в печати.
- [12] L. Wu, *Ann. Probab.*, **23**:1 (1995), 420–445.
- [13] F. Avram, D. Bertsimas, *Ann. Appl. Probab.*, **2**:1 (1992), 113–130.
- [14] M. D. Penrose, *Stochastic Process. Appl.*, **85**:2 (2000), 295–320.
- [15] M. D. Penrose, J. E. Yukich, *Ann. Appl. Probab.*, **13**:1 (2003), 277–303.
- [16] P. Balister, B. Bollobás, A. Sarkar, M. Walters, *Adv. Appl. Probab.*, **37**:1 (2005), 1–24.
- [17] S. H. Teng, F. F. Yao, *Algorithmica*, **49**:3 (2007), 192–211.
- [18] J. M. Steel, *Statistical Science*, **8**:1 (1993), 48–56.
- [19] P. Baldi, Y. Rinott, *Ann. Probab.*, **17**:4 (1989), 1646–1650.
- [20] H. Doering, P. Eichelsbacher, *Moderate deviations via cumulants*, arXiv: 1012.5027.
- [21] Y. Baryshnikov, P. Eichelsbacher, T. Schreiber, J. E. Yukich, *Ann. Inst. Henri Poincaré-Probab. Statist.*, **44**:3 (2008), 422–446, arXiv: math/0603022.
- [22] S. Janson, *Random Struct. Algorithms*, **24**:3 (2004), 234–248.
- [23] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley and Sons, New York, 2000.
- [24] S. Janson, A. Ruciński, *Random Struct. Algorithms*, **20**:3 (2002), 317–342.
- [25] F. Xue, P. R. Kumar, *Wireless Networks*, **10**:2 (2004), 169–181.

Поступила в редакцию 30.08.2011,
после доработки 11.11.2011