Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Скрученная свертка и звездочное произведение Мойала обобщенных функций, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 9–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:48:53

© 2012 г.

М. А. Соловьев*

СКРУЧЕННАЯ СВЕРТКА И ЗВЕЗДОЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОЙАЛА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются ядерные пространства функций, на которых задано непрерывное действие группы Вейля–Гейзенберга, и исследуются основные свойства скрученной свертки функций с элементами сопряженного пространства. Итоговая теорема характеризует соответствующую алгебру свертывателей и показывает, что она содержит все достаточно быстро убывающие функционалы из сопряженного пространства. Как следствие получено общее описание алгебры мойаловских мультипликаторов фурье-преобразованного пространства. Результаты распространяют исчисление вейлевских символов за традиционные рамки распределений умеренного роста.

Ключевые слова: произведение Мойала, скрученная свертка, вейлевские символы, группа Вейля–Гейзенберга, некоммутативная теория поля, топологические $*$ -алгебры, пространства обобщенных функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скрученная свертка функций $g_1(s)$ и $g_2(s)$ на линейном симплектическом пространстве является некоммутативной деформацией обычной свертки и определяется формулой

$$(g_1 \circledast_{\theta} g_2)(s) = \int g_1(t)g_2(s-t)e^{i\theta(s,t)/2} dt, \quad (1)$$

где θ – билинейная кососимметрическая форма, задающая симплектическую структуру¹⁾. Преобразование Фурье переводит скрученную свертку в звездочное произведение $\star_{\theta}$ Вейля–Гренивольда–Мойала, которое выражает закон композиции вейлевских символов операторов квантовой механики и играет ключевую роль в вейлевском квантовании (см. [1], [2]). Стоит отметить, что первоначально закон композиции функций на фазовом пространстве, соответствующий произведению операторов в гильбертовом пространстве, был записан фон Нейманом [3] именно в терминах скрученной свертки. Обычно звездочное произведение и скрученную свертку исходно определяют для гладких и быстро убывающих функций, составляющих

¹⁾Скрученную свертку часто обозначают символом $\star_{\theta}$, но в настоящей статье будет использоваться символ $\circledast_{\theta}$ во избежание путаницы со звездочным произведением $\star_{\theta}$.

пространство Шварца S , которое является ассоциативной топологической алгеброй относительно каждой из этих операций, но на практике приходится иметь дело с их продолжением на то или иное (в зависимости от решаемой задачи) подпространство в сопряженном пространстве S' распределений умеренного роста. Максимальное расширение по дуальности было предложено Антонецем [4]–[6] и состоит в построении алгебры мультипликаторов для алгебры $(S, \star_\theta)$, или, что равносильно, для алгебры $(S, \circ_\theta)$. Затем оно изучалось во многих работах, наиболее глубоко в [7]–[9] (подробный обзор и ссылки имеются в [10]).

В последние 15 лет интенсивно исследуются модели теории поля на некоммутативных пространствах, основанные на использовании мойаловского звездочного произведения (см. обзор [11] для введения в эту тематику). Интерес к некоммутативным пространствам был стимулирован анализом [12], [13] ограничений на точность локализации пространственно-временных событий в квантовой теории, включающей гравитацию, а также изучением низкоэнергетического предела теории струн [14]. Есть основания считать [15]–[17], что рамки распределений умеренного роста слишком узки для последовательной формулировки общих принципов некоммутативной квантовой теории поля. Мойаловское произведение нелокально, и представляющее его разложение по параметру некоммутативности θ сходится лишь на аналитических функциях, фурье-образы которых убывают быстрее, чем гауссова экспонента [18], [19]. Анализ нарушений микропричинности в простейших некоммутативных моделях [20]–[22] указывает на возможную связь некоммутативной теории поля с рассматривавшимися ранее нелокальными теориями, где квантовые поля трактуются как операторнозначные обобщенные функции над подходящим пространством аналитических пробных функций вместо пространства Шварца. Возникает задача соответствующего обобщения исчисления вейлевских символов.

В работе [18] установлено условие, при котором ядерное пространство пробных функций $E(\mathbb{R}^d)$, имеющее структуру топологической алгебры относительно обычной свертки, является алгеброй и относительно скрученной свертки, а фурье-двойственное ему пространство является алгеброй относительно произведения Мойала. Это условие можно записать как

$$e^{-i\theta/2} \in M(E \tilde{\otimes} E), \quad (2)$$

где $E \tilde{\otimes} E$ – пополненное проективное тензорное произведение, отождествимое с $E(\mathbb{R}^{2d})$ в силу теоремы о ядре, и $M(E \tilde{\otimes} E)$ – пространство его мультипликаторов относительно обычного поточечного произведения. В случае пространств S_β^α Гельфанда–Шилова [23], рассмотренном в работе [18], условие (2) приводит к ограничению $\alpha \geq \beta$ на задающие пространство индексы. Точное описание поточечных мультипликаторов для пространств S_β^α дано Паламодовым [24], а соответствующие им алгебры мойаловских мультипликаторов построены в [25].

Здесь мы покажем, что данная задача может быть решена в общем виде и построение алгебры мойаловских мультипликаторов, включая описание ее элементов, можно выполнить для любого полного ядерного бочечного²⁾ пространства, на котором непрерывно действует группа Вейля–Гейзенберга, причем это удастся сделать без сложных аналитических выкладок, используя лишь хорошо известные факты [26]

²⁾ Этими свойствами обладают практически все пространства, используемые в теории обобщенных функций; см. [26] относительно их определения и роли в функциональном анализе.

о тензорных произведениях ядерных пространств. Основное наблюдение состоит в том, что из условия (2) следует

$$v \otimes_{\theta} g \in M(E), \quad g \otimes_{\theta} v \in M(E) \quad \text{при всех } g \in E, v \in E', \quad (3)$$

где $M(E)$ – пространство поточечных мультипликаторов для E . Это позволяет достаточно точно охарактеризовать те элементы сопряженного пространства E' , которые являются мультипликаторами алгебры $(E, \otimes_{\theta})$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем функциональные пространства, в которых задано линейное непрерывное представление группы Вейля–Гейзенберга, и определяем скрученную свертку элементов пространства с элементами сопряженного ему пространства. Здесь же излагаются некоммутативные аналоги некоторых свойств обычной свертки. В разделе 3 вводится основное понятие скрученного свертывателя. Раздел 4 содержит основные теоремы; в нем доказано, что при естественных требованиях к рассматриваемым пространствам справедлива импликация (2) $\Rightarrow$ (3), и получена вытекающая из этого утверждения характеристика алгебры скрученных свертывателей. Раздел 5 посвящен наиболее интересному случаю пространств, инвариантных относительно преобразования Фурье. В разделе 6 общая конструкция иллюстрируется конкретными примерами. Приложение содержит доказательство простого полезного критерия непрерывности действия топологических групп в функциональных пространствах рассматриваемого класса.

2. ГРУППА ВЕЙЛЯ–ГЕЙЗЕНБЕРГА И СКРУЧЕННАЯ СВЕРТКА

Пусть E – локально выпуклое пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^d$, а θ – билинейная симплектическая форма, т. е. невырожденное кососимметрическое скалярное произведение на $\mathbb{R}^d$. Предположим, что для всех $s \in \mathbb{R}^d$ операторы подскрученного сдвига

$$\tau_{\theta,s}: g(t) \rightarrow e^{i\theta(s,t)/2} g(t-s), \quad g \in E, \quad (4)$$

определены и непрерывны в E . Операторы $\tau_{\theta,s}$ реализуют проективное представление группы трансляций, которому соответствует линейное представление ее центрального расширения, порождаемого исходной симплектической структурой, т. е. группы Вейля–Гейзенберга, состоящей из элементов вида $a = (\alpha, s)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}^d$, со следующим законом умножения:

$$a_1 a_2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} \theta(s_1, s_2), s_1 + s_2 \right).$$

Предположим еще, что пространство E инвариантно относительно комплексного сопряжения $g \rightarrow g^*$. Тогда наряду с представлением $a \rightarrow e^{i\alpha} \tau_{\theta,s}$ в E реализуется и сопряженное представление $a \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\tau}_{\theta,s}$, где

$$\bar{\tau}_{\theta,s}: g(t) \rightarrow e^{-i\theta(s,t)/2} g(t-s). \quad (5)$$

Если, кроме того, E инвариантно относительно отражения координат $g(t) \rightarrow \check{g}(t) = g(-t)$, то для любых $g \in E$ и $v \in E'$ корректно определены функции

$$(v \otimes_{\theta} g)(s) := \langle v, e^{i\theta(s,\cdot)/2} g(s-\cdot) \rangle, \quad (g \otimes_{\theta} v)(s) := \langle v, e^{-i\theta(s,\cdot)/2} g(s-\cdot) \rangle, \quad (6)$$

которые мы называем скрученными свертками функции g и функционала v .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В определении группы Вейля–Гейзенберга симплектическая форма обычно предполагается стандартной, задаваемой матрицей $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, где $2n = d$, но для любой другой формы θ группа, очевидно, будет той же самой с точностью до изоморфизма, поскольку в каждом симплектическом пространстве существует симплектический базис [27]. Скрученная свертка в формулировке Вигнера–Вейля квантовой механики на линейном фазовом пространстве задается матрицей $\hbar J$, где постоянная Планка $\hbar$ играет роль параметра некоммутативной деформации.

Хотя операторы (4), (5) и функции (6) несут индекс θ , мы не будем выписывать его в том случае, если это не может вызвать недоразумений. В дальнейшем мы считаем, что E является плотным векторным подпространством пространства Шварца S , но определение (6) содержательно и в более общей ситуации, например когда E непрерывно и плотно вложено в L^2 , – это обеспечивает наличие канонического вложения $E \rightarrow E'$, и тогда формулы (6) расширяют операцию скрученной свертки элементов самого пространства E . Как обычно, мы обозначаем через $C(\mathbb{R}^d)$ пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактных множествах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть E – локально выпуклое пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^d$. Если отражение $g \rightarrow \check{g}$ и операторы (4), (5) действуют в E непрерывно, то функции (6) принадлежат $C(\mathbb{R}^d)$. Если, кроме того, E бочечно, то отображения $(g, v) \rightarrow v \otimes g$ и $(g, v) \rightarrow g \otimes v$ из $E \times E'$ в $C(\mathbb{R}^d)$ раздельно непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (6) могут быть записаны как

$$(v \otimes g)(s) = \langle v, \tau_s \check{g} \rangle, \quad (g \otimes v)(s) = \langle v, \bar{\tau}_s \check{g} \rangle.$$

Непрерывность действия τ_s в E означает, что отображение $\mathbb{R}^d \times E \rightarrow E: (s, g) \rightarrow \tau_s g$ непрерывно. Поэтому непрерывность функций (6) по s при сделанных предположениях очевидна. Если g фиксировано и s пробегает компакт K в $\mathbb{R}^d$, то $\tau_s \check{g}$ пробегает компакт Q в E . Значит, отображение $v \rightarrow v \otimes g$ непрерывно относительно сильной топологии E' по ее определению как топологии равномерной сходимости на ограниченных множествах. Аналогичным образом, непрерывно отображение $v \rightarrow g \otimes v$. Пусть теперь v фиксировано. Множество операторов τ_s , $s \in K$, поточечно ограничено и, если E бочечно, оно равностепенно непрерывно по обобщенной теореме Банаха–Штейнхауза ([26], § III.4.2). Следовательно, для любой окрестности нуля U в E найдется окрестность V такая, что $\tau_s \check{g} \in U$ при всех $g \in V$ и всех $s \in K$. Взяв в качестве U окрестность, на которой функционал v ограничен числом $\epsilon > 0$, мы заключаем, что отображение $g \rightarrow v \otimes g$ непрерывно. Аналогичным образом проверяется, что непрерывно отображение $g \rightarrow g \otimes v$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Наши основные теоремы будут касаться полных ядерных пространств. Такие пространства бочечны в том и только том случае, если они рефлексивны, и тогда они являются монтелевскими [26]. Для монтелевских функциональных пространств можно указать легко проверяемые достаточные условия

непрерывности действия топологической группы преобразований, которые сформулированы ниже в приложении в виде леммы 1.

Операторы τ_s являются автоморфизмами пространства $C(\mathbb{R}^d)$, и легко видеть, что линейное отображение $L_v: g \rightarrow v \otimes g$ коммутирует с ними. Аналогичным образом, отображение $R_v: g \rightarrow g \otimes v$ коммутирует со всеми операторами $\bar{\tau}_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть E удовлетворяет условиям предложения 1 и пусть A – линейное непрерывное отображение из E в $C(\mathbb{R}^d)$. Если A коммутирует со всеми операторами τ_s (со всеми $\bar{\tau}_s$), то существует единственный функционал $v \in E'$ такой, что $Ag = v \otimes g$ ($Ag = g \otimes v$) для всех $g \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументация аналогична используемой в теореме 4.2.1 в [28], относящейся к обычной свертке и к пространству $E = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Изложим ее для случая перестановочности A со всеми τ_s . Если искомым функционал v существует, то $\langle v, \check{g} \rangle = (Ag)(0)$ для всех $g \in E$, поэтому он единствен. Обозначим через v линейную форму $g \rightarrow (A\check{g})(0)$. Ясно, что $v \in E'$ благодаря непрерывности оператора A и отражения $g \rightarrow \check{g}$. Кроме того, $(v \otimes g)(0) = \langle v, \check{g} \rangle = (Ag)(0)$. Используя перестановочность A с τ_s , получаем

$$(Ag)(-s) = (\tau_s Ag)(0) = (A\tau_s g)(0) = (v \otimes \tau_s g)(0) = (v \otimes g)(-s) \quad \text{для всех } s \in \mathbb{R}^d.$$

Значит, $Ag = v \otimes g$ для всех $g \in E$. Во втором случае рассуждение аналогично. Предложение доказано.

3. СКРУЧЕННЫЕ СВЕРТЫВАТЕЛИ

Далее мы предполагаем, что E состоит из непрерывных функций, причем вложение $E \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ непрерывно, и что выполнены условия предложения 1. Определим пространства $\mathcal{C}_{\theta,L}(E)$ и $\mathcal{C}_{\theta,R}(E)$ левых и правых $\otimes$ -свертывателей для E , составив их из тех функционалов $v \in E'$, для которых $v \otimes_\theta g \in E$ и, соответственно, $g \otimes_\theta v \in E$ при всех $g \in E$, причем отображения $g \rightarrow v \otimes_\theta g$ и $g \rightarrow g \otimes_\theta v$ непрерывны.

Если к E применима теорема о замкнутом графике, то требование непрерывности соблюдается здесь автоматически и его можно исключить из данного определения, поскольку эти отображения имеют замкнутые графики. Действительно, если $g_\gamma \rightarrow g$ и $v \otimes g_\gamma \rightarrow h$ в E , то $v \otimes g_\gamma \rightarrow h$ в $C(\mathbb{R}^d)$ и $v \otimes g = h$ согласно предложению 1. Из предложения 2 следует, что имеется взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathcal{C}_L(E)$ и непрерывными линейными отображениями $E \rightarrow E$, коммутирующими со всеми τ_s . Обозначая через $\mathcal{L}(E)$ алгебру всех непрерывных операторов из E в E , снабженную топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах, мы заключаем, что $\mathcal{C}_L(E)$ можно отождествить с ее замкнутой подалгеброй. Если $v_1, v_2 \in \mathcal{C}_L(E)$, то через $v_1 \otimes v_2$ мы обозначаем тот элемент в $\mathcal{C}_L(E)$, который согласно предложению 2 соответствует суперпозиции операторов $g \rightarrow v_1 \otimes g$ и $g \rightarrow v_2 \otimes g$. В явном виде имеем

$$\langle v_1 \otimes v_2, \check{g} \rangle = (v_1 \otimes (v_2 \otimes g))(0), \quad g \in E. \quad (7)$$

Естественной топологией $\mathcal{C}_L(E)$ является та, что индуцирована из $\mathcal{L}(E)$. Аналогичным образом, $\mathcal{C}_R(E)$ можно отождествить с подалгеброй операторов, коммутирующих со всеми $\bar{\tau}_s$. Для элементов $\mathcal{C}_R(E)$ скрученная свертка определяется формулой

$$\langle v_1 \otimes v_2, \check{g} \rangle = ((g \otimes v_1) \otimes v_2)(0), \quad g \in E. \quad (8)$$

Если E имеет структуру топологической алгебры относительно произведения (1), то алгебры $\mathcal{C}_L(E)$ и $\mathcal{C}_R(E)$ являются ее расширениями. Обе они унитарны, поскольку δ -функция Дирака служит для них единицей. Каждый $\otimes$ -свертыватель в E порождает по дуальности соответствующие операции в сопряженном пространстве E' , определяемые формулами

$$\begin{aligned} \langle w \otimes v_1, g \rangle &= \langle w, \check{v}_1 \otimes g \rangle, & \langle v_2 \otimes w, g \rangle &= \langle w, g \otimes \check{v}_2 \rangle, \\ w \in E', & v_1 \in \mathcal{C}_L(E), & v_2 \in \mathcal{C}_R(E), \end{aligned} \quad (9)$$

что является дальнейшим расширением исходной операции в пространстве E .

Если пространство E инвариантно относительно комплексного сопряжения, то инволюция $g \rightarrow g^*$ в E индуцирует инволюцию в E' ; при этом $(v \otimes g)^* = g^* \otimes v^*$, и тем самым имеется канонический антилинейный изоморфизм между $\mathcal{C}_L(E)$ и $\mathcal{C}_R(E)$. Рассмотрим теперь пересечение

$$\mathcal{C}_\theta(E) = \mathcal{C}_{\theta,L}(E) \cap \mathcal{C}_{\theta,R}(E). \quad (10)$$

Естественной топологией $\mathcal{C}_\theta(E)$ является верхняя грань топологий, индуцированных из $\mathcal{C}_{\theta,L}(E)$ и $\mathcal{C}_{\theta,R}(E)$. Если $E \cap \mathcal{C}_\theta(E)$ плотно в $\mathcal{C}_\theta(E)$ по этой топологии и E состоит из ограниченных, непрерывных, интегрируемых функций, то $\mathcal{C}_\theta(E)$ имеет каноническую структуру инволютивной унитарной алгебры относительно $\otimes$ -произведения, поскольку тогда формулы (7) и (8) с $v_1, v_2 \in \mathcal{C}_\theta(E)$ определяют один и тот же функционал. Действительно, используя теорему Фубини, легко проверить, что при указанных условиях и для $v_1, v_2 \in E$ интегралы, представляющие правые части этих формул, совпадают и наше утверждение доказывается предельным переходом.

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Несколько слов об используемой ниже терминологии. Пусть E – полное ядерное локально выпуклое пространство. Если оно является линейным подпространством другого локально выпуклого пространства E_0 и тождественное отображение $E \rightarrow E_0$ непрерывно, то мы говорим, что E – полное ядерное подпространство в E_0 . Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть E – полное ядерное подпространство пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d)$. Тогда $E \tilde{\otimes} E$ является полным ядерным подпространством в $S(\mathbb{R}^{2d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что пополненное проективное тензорное произведение ядерных пространств ядерно [26]. Поскольку $S(\mathbb{R}^{2d}) = S(\mathbb{R}^d) \tilde{\otimes} S(\mathbb{R}^d)$, имеется естественное непрерывное линейное отображение $\iota: E \otimes E \rightarrow S(\mathbb{R}^{2d})$, и надо убедиться лишь в том, что его продолжение $\tilde{\iota}$ по непрерывности на $E \tilde{\otimes} E$ инъективно. Согласно теореме Гротендика ([26], § IV.9.4), если E полно и ядерно, $E \tilde{\otimes} E$ можно отождествить с пространством $\mathcal{B}_e(E'_\sigma, E'_\sigma)$ раздельно непрерывных билинейных форм на $E'_\sigma \times E'_\sigma$, где индексы σ и e соответственно означают, что E' наделено слабой топологией, а $\mathcal{B}$ – топологией биравностепенной сходимости. Каноническое отображение $E \times E \rightarrow \mathcal{B}_e(E'_\sigma, E'_\sigma)$ сопоставляет паре функций (f, g) билинейную форму

$$(f \otimes g)(u, v) = \langle u, f \rangle \langle v, g \rangle, \quad u, v \in E'. \quad (11)$$

Обозначим через j' отображение, сопряженное вложению $j: E \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$. Используя указанное отождествление также и для пространства Шварца, мы видим, что $\tilde{l}$ переводит билинейную форму $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_e(E'_\sigma, E'_\sigma)$ в билинейную форму на $S' \times S'$, значение которой на паре распределений $u, v \in S'$ есть $\mathbf{b}(j'(u), j'(v))$. Поскольку j – инъекция, $j'(S')$ плотно в E'_σ и, значит, $\tilde{l}(\mathbf{b}) = 0$ влечет $\mathbf{b} = 0$, что завершает доказательство.

Если выполнены условия предложения 3, мы будем наряду с $E \tilde{\otimes} E$ использовать для этого пространства обозначение $E(\mathbb{R}^{2d})$. Простое доказательство теоремы о ядре, обобщающей знаменитую теорему Шварца для $S(\mathbb{R}^d)$ на любое полное ядерное бочечное пространство, дано в работе [29]. Оно развивает конструкцию, предложенную Гротендиком ([30], гл. 2, теорема 13). На практике $E(\mathbb{R}^{2d})$ определяется теми же ограничениями, что и $E(\mathbb{R}^d)$, но только налагаемыми на функции от удвоенного числа переменных (см. примеры в разделе 6).

Хорошо известно, что свертка любого распределения умеренного роста с пробной функцией из пространства Шварца S является мультипликатором для этого пространства относительно поточечного умножения. Следующая теорема устанавливает аналог этого свойства для более широких классов обобщенных функций и показывает, что оно сохраняется при некоммутативной деформации свертки. Для любого локально выпуклого подпространства $E \subset S$ непрерывная функция μ называется его мультипликатором относительно поточечного умножения, если $\mu g \in E$ при всех $g \in E$ и отображение $g \rightarrow \mu g$ непрерывно³⁾. Множество всех таких мультипликаторов мы обозначаем через $M(E)$ и снабжаем топологией, индуцированной из операторной алгебры $\mathcal{L}(E)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – полное ядерное бочечное подпространство в $S(\mathbb{R}^d)$, а $\theta(s, t)$ – симплектическая форма на $\mathbb{R}^d$. Предположим, что $e^{-i\theta/2} \in M(E \tilde{\otimes} E)$ и инволютивное преобразование $h(s, t) \rightarrow h(s, s - t)$ есть непрерывный автоморфизм пространства $E(\mathbb{R}^{2d}) = E \tilde{\otimes} E$. Тогда E является алгеброй относительно $\otimes_\theta$ -произведения и это произведение раздельно непрерывно; функции $v \otimes_\theta g$ и $g \otimes_\theta v$ корректно определены и принадлежат $M(E)$ при любых $g \in E$ и $v \in E'$. Отображения $(g, v) \rightarrow v \otimes_\theta g$ и $(g, v) \rightarrow g \otimes_\theta v$ из $E \times E'$ в $M(E)$ также раздельно непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что если $h \in E(\mathbb{R}^{2d})$, то при каждом фиксированном s функция $h(s, t)$ по переменной t принадлежит E . Как и при доказательстве предложения 3, отождествляем h с билинейным раздельно непрерывным функционалом $\mathbf{h}$ на $E'_\sigma \times E'_\sigma$. Заметим, что

$$h(s, t) = \mathbf{h}(\delta_s, \delta_t), \quad (12)$$

где функционал $\delta_s \in E'$ определяется формулой $\langle \delta_s, f \rangle = f(s)$. Действительно, из (11) следует (12) для линейных комбинаций функций вида $h = f \otimes g$, а по непрерывности (12) соблюдается и для любого элемента в $E(\mathbb{R}^{2d})$. Линейное отображение $E' \rightarrow \mathbb{C}: v \rightarrow \mathbf{h}(\delta_s, v)$ непрерывно по слабой топологии $\sigma(E', E)$. Значит, существует

³⁾Условие непрерывности соблюдается автоматически, если к E применима теорема о замкнутом графике.

функция $h_s \in E = (E'_\sigma)'$ такая, что $\langle v, h_s \rangle = \mathbf{h}(\delta_s, v)$ при всех $v \in E'$. Подставляя сюда $v = \delta_t$, мы получаем $h_s(t) = h(s, t)$. Ясно, что отображение $h \rightarrow h_s$ непрерывно при наделении $E(\mathbb{R}^{2d})$ и E слабыми топологиями. Далее, легко видеть, что функция $s \rightarrow \langle v, h(s, \cdot) \rangle = \mathbf{h}(\delta_s, v)$ принадлежит E . Действительно, линейное отображение $u \rightarrow \mathbf{h}(u, v)$ непрерывно по топологии $\sigma(E', E)$, и, значит, существует функция $h_v \in E$ такая, что $\langle u, h_v \rangle = \mathbf{h}(u, v)$ при всех $u \in E'$. При $u = \delta_s$ это равенство принимает вид $h_v(s) = \langle v, h(s, \cdot) \rangle$. Отображение $E' \rightarrow E: v \rightarrow h_v$ также слабо непрерывно. Кроме того, слабо непрерывна зависимость h_v от h .

Применим изложенное рассмотрение к функции $h(s, t) = f(s)g(s - t)$, где $f, g \in E$. По условию теоремы она принадлежит $E(\mathbb{R}^{2d})$. Фиксируем точку $s \in \mathbb{R}^d$ и выберем f так, чтобы $f(s) = 1$. В силу сказанного выше функция $t \rightarrow g(s - t)$ принадлежит E и отображение $E \rightarrow E: g(t) \rightarrow g(s - t)$ слабо непрерывно. Поскольку любое бочечное пространство есть пространство Макки, отсюда вытекает, что это отображение непрерывно ([26], § IV.7.4). Так как s можно взять любым, мы видим, что отражения и сдвиги являются непрерывными операторами в пространстве E . Аналогичные соображения в применении к $f(s)e^{-i\theta(s, t)/2}g(s - t)$ показывают, что функция $t \rightarrow e^{-i\theta(s, t)/2}g(s - t)$ принадлежит E , причем отображение $g(t) \rightarrow e^{-i\theta(s, t)/2}g(s - t)$ непрерывно. Следовательно, подкрученные сдвиги (4) и (5) также являются непрерывными операторами в E и применимы определения функций $v \otimes g$ и $g \otimes v$, данные в разделе 2. Далее, поскольку $f(s)\langle v, e^{\pm i\theta(s, \cdot)/2}g(s - \cdot) \rangle \in E$ для любой функции $f \in E$, функции $\langle v, \tau_s \check{g} \rangle$ и $\langle v, \bar{\tau}_s \check{g} \rangle$ непрерывны по s при всяком $v \in E'$. Значит, множества $\{\tau_s \check{g}: |s| \leq 1\}$ и $\{\bar{\tau}_s \check{g}: |s| \leq 1\}$, где g фиксировано, слабо ограничены. Тогда они ограничены и в исходной топологии E ([26], § IV.3.2), и согласно лемме 1, доказанной в приложении, соответствующие представления группы Вейля–Гейзенберга в пространстве E непрерывны. При фиксированных v и g функции $f \cdot (v \otimes g)$ и $f \cdot (g \otimes v)$ слабо непрерывны по f , и, значит, умножение на $v \otimes g$ и умножение на $g \otimes v$ являются непрерывными операторами из E в E . Мы заключаем, что скрученные свертки принадлежат $M(E)$. Кроме того, снова в силу сказанного выше, при любом $u \in E'$ функция $t \rightarrow \langle u, f(\cdot)e^{-i\theta(\cdot, t)/2}g(t - \cdot) \rangle$ принадлежит E . В частности,

$$\int f(s)e^{-i\theta(s, t)/2}g(t - s)ds = f \otimes g \in E.$$

Таким образом, E является алгеброй относительно скрученной свертки. Отображения $f \rightarrow f \otimes g$ и $g \rightarrow f \otimes g$, очевидно, слабо непрерывны, а поэтому непрерывны и относительно исходной топологии E .

Осталось убедиться, что отображения $(g, v) \rightarrow v \otimes g$ и $(g, v) \rightarrow g \otimes v$ из $E \times E'$ в $M(E)$ раздельно непрерывны. Пусть v фиксировано. Покажем, что для любой окрестности нуля U и любого ограниченного множества Q в E найдется окрестность нуля W такая, что $f \cdot (v \otimes g) \in U$ при всех $f \in Q$ и всех $g \in W$. По определению топологии бивариантной сходимости базис окрестностей нуля в $E \tilde{\otimes} E = \mathcal{B}_e(E'_\sigma, E'_\sigma)$ образует множества вида

$$\mathcal{U}_{U, V} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathcal{B}(E'_\sigma, E'_\sigma) : \sup_{u \in U^\circ, v \in V^\circ} |\mathbf{b}(u, v)| \leq 1 \right\}, \quad (13)$$

где U и V пробегает базис замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей в E , а U° , V° обозначают их поляры, т. е. $U^\circ = \{u \in E' : \sup_{f \in U} |\langle u, f \rangle| \leq 1\}$. Функционал v ограничен единицей на некоторой окрестности нуля, которую мы возьмем

в качестве V в (13). По условиям теоремы для любого множества $\mathcal{U}_{U,V}$ найдутся окрестности U_1, V_1 такие, что

$$h(s, t) = f(s)e^{i\theta(s,t)/2}g(s-t) \in \mathcal{U}_{U,V}$$

при всех $f \in U_1$ и $g \in V_1$. Для ограниченного множества Q найдется $\delta > 0$ такое, что $Q \subset \delta U_1$. Положим $W = \delta V_1$. Тогда при всех $u \in U^\circ$, $f \in Q$ и $g \in W$ мы имеем

$$|\mathbf{h}(u, v)| = |\langle u, f(v \otimes g) \rangle| \leq 1.$$

Иными словами, $f \cdot (v \otimes g) \in U^{\circ\circ} = U$, что доказывает непрерывность отображения $E \rightarrow M(E): g \rightarrow v \otimes g$.

Пусть теперь g фиксировано и последовательность v_n стремится к нулю в E' . Тогда последовательность мультипликаторов $v_n \otimes g \rightarrow 0$ в топологии простой сходимости $L(E)$, а поскольку E – монтелевское пространство (как уже было сказано в замечании 2), то и в топологии ограниченной сходимости (см. [26], § III.4.6). Таким образом, отображение $E' \rightarrow \mathcal{L}(E): v \rightarrow v \otimes g$ секвенциально непрерывно. Остается показать, что пространство E' борнологично, поскольку для таких пространств секвенциальная непрерывность линейного отображения в любое локально выпуклое пространство влечет его непрерывность ([26], § II.8.3). С этой целью напомним, что всякое полное ядерное пространство E представимо как проективный предел некоторого семейства гильбертовых пространств E_γ . Этот предел можно считать приведенным, и сопряженное пространство E' в топологии Макки $\tau(E', E)$ есть индуктивный предел семейства пространств E'_γ , снабженных топологиями Макки $\tau(E'_\gamma, E_\gamma)$ ([26], § IV.4.4). Поскольку монтелевские и гильбертовы пространства рефлексивны, сильная топология на сопряженных им пространствах совпадает с топологией Макки. Значит, E' борнологично как индуктивный предел нормированных пространств. Мы заключаем, что отображение $E' \rightarrow M(E): v \rightarrow v \otimes g$ непрерывно. Аналогичная аргументация для $g \otimes v$ завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены предположения теоремы 1, то определение (6) равносильно определению произведений $v \otimes g$ и $g \otimes v$ по дуальности и для всех $v \in E'$ и всех $g, f \in E$ справедливы равенства

$$(v \otimes g) \otimes f = v \otimes (g \otimes f), \quad (g \otimes v) \otimes f = g \otimes (v \otimes f), \quad g \otimes (f \otimes v) = (g \otimes f) \otimes v. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой топологической алгебры $(E, \otimes)$ скрученная свертка функции $g \in E$ с функционалом $v \in E'$ определяется по дуальности формулами

$$\langle v \otimes g, f \rangle = \langle v, \check{g} \otimes f \rangle, \quad \langle g \otimes v, f \rangle = \langle v, f \otimes \check{g} \rangle, \quad f \in E. \quad (15)$$

Тогда отображения $v \rightarrow v \otimes g$ и $v \rightarrow g \otimes v$ из E' в E' непрерывны, поскольку являются сопряженными к непрерывным отображениям $f \rightarrow \check{g} \otimes f$ и $f \rightarrow f \otimes \check{g}$. Легко видеть, что при $v \in E$ правые части в равенствах (15) совпадают с результатом интегрирования функций (6) с пробной функцией f . Надо показать, что это верно и при $v \in E'$. Для этого заметим, что при условиях теоремы 1 пространство E плотно в E' . Действительно, как показано при доказательстве теоремы 1, E содержит вместе с функцией $g(t)$ и все ее сдвиги $g(t-s)$, а также все произведения $e^{i\theta(s,t)/2}g(t)$, $s \in \mathbb{R}^d$. Согласно [23] (§ IV.8.4) отсюда следует, что E имеет достаточно большой

запас функций в том смысле, что для любой локально интегрируемой функции φ из сходимости интеграла $\int \varphi(t)f(t) dt$ и равенства его нулю для всех $f \in E$ вытекает, что $\varphi(t) \equiv 0$. Значит, каноническое отображение $E \rightarrow E'$ инъективно, и, поскольку E рефлексивно, по теореме Хана–Банаха это отображение имеет плотный образ, что и утверждалось. Далее, всякий мультипликатор $m \in M(E)$ определяет функционал $\mu \in E'$ по формуле $\langle \mu, f \rangle = \int m(t)f(t) dt$, причем отображение

$$M(E) \rightarrow E': m \rightarrow \mu \quad (16)$$

инъективно в силу тех же соображений и непрерывно по определению топологии этих пространств. Аппроксимируя функционал $v \in E'$ функциями $v_\gamma \in E$, используя непрерывность отображений $v \rightarrow v \otimes g$, $v \rightarrow g \otimes v$ из E' в $M(E)$ и переходя к пределу в равенстве

$$\int (v_\gamma \otimes g)(t)f(t) dt = \langle v_\gamma, \check{g} \otimes f \rangle$$

и в аналогичном равенстве для $g \otimes v_\gamma$, мы заключаем, что отображение (16) устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями, определяемыми формулами (6), и функционалами, определяемыми посредством (15). Формулы (14) следуют из ассоциативности алгебры $(E, \otimes)$ также по непрерывности, что завершает доказательство.

Теперь заметим, что при условиях теоремы 1 пространство E является алгеброй относительно поточечного умножения. Действительно, при любых $f, g \in E$ функция $f(s)g(s-t)|_{t=0}$ принадлежит E , причем из доказательства теоремы 1 следует, что отображение $(f, g) \rightarrow f \cdot g$ раздельно непрерывно. Таким образом, имеется каноническое вложение $E \rightarrow M(E)$. В дальнейшем мы считаем, что E плотно в $M(E)$. Это условие обычно предполагается при рассмотрении мультипликаторов топологических алгебр, а в работе [24] оно включено в определение $M(E)$. Если оно выполнено, то алгебра $M(E)$ канонически изоморфна замыканию в $\mathcal{L}(E)$ множества операторов умножения на элементы E .

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены предположения теоремы 1 и E плотно в $M(E)$, то сопряженное к $M(E)$ пространство $M'(E)$ содержится в $\mathcal{C}_0(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – ограниченное множество в пространстве E . Множество непрерывных отображений $g \rightarrow f \cdot g$, $f \in Q$, поточечно ограничено. По теореме Банаха–Штейнхауса отсюда следует, что для всякой окрестности нуля U в E найдется окрестность V такая, что $f \cdot g \in U$ при всех $g \in V$, $f \in Q$. Это означает, что естественное вложение $E \rightarrow M(E)$ непрерывно. Следовательно, определено и непрерывно сопряженное отображение $M'(E) \rightarrow E'$. Из предположения о плотности E в $M(E)$ вытекает, что это отображение инъективно. Поэтому если $w \in M'(E)$, то $w \in E'$ и $w \otimes g \in M(E)$ согласно теореме 1. Покажем, что $w \otimes g \in E$. По следствию 1 мы имеем

$$(w \otimes g) \otimes f = w \otimes (g \otimes f) \quad \text{при всех } g, f \in E.$$

Равенство этих сверток в нуле может быть записано как

$$\langle w \otimes g, \check{f} \rangle = \langle \check{w}, g \otimes f \rangle. \quad (17)$$

Пусть L'_g – линейное отображение из $M'(E)$ в E , сопряженное непрерывному отображению $L_g: v \rightarrow g \otimes v$. Тогда

$$\langle v, L'_g \check{w} \rangle = \langle \check{w}, g \otimes v \rangle \quad \text{при всех } v \in E'. \quad (18)$$

При $v = f$ правые части (17) и (18) совпадают, а левая часть (18) записывается как $\int (L'_g \check{w})(t) f(t) dt$. Поскольку f – произвольный элемент пространства E , которое достаточно богато функциями, мы заключаем, что функция $(w \otimes g)(t)$ совпадает с функцией $(L'_g \check{w})(-t)$, принадлежащей пространству E . Осталось показать, что отображение $E \rightarrow E: g \rightarrow w \otimes g$ непрерывно. По теореме 1 при любом фиксированном $v \in E'$ отображение $E \rightarrow M(E): g \rightarrow g \otimes v$ непрерывно. Тем более оно непрерывно при наделении E и $M(E)$ слабыми топологиями. Поэтому числовая функция $g \rightarrow \langle \check{w}, L_g v \rangle$ непрерывна по топологии $\sigma(E, E')$. Следовательно, отображение $E \rightarrow E: g \rightarrow L'_g \check{w} = w \otimes g$ слабо непрерывно. Поскольку E – пространство Макки, это отображение непрерывно и относительно его исходной топологии. Мы заключаем, что $w \in C_L(E)$. Аналогичным образом, $w \in C_R(E)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает соответствующий результат для пространства F , которое двойственно E относительно преобразования Фурье, т.е. $E = \hat{F}$. Преобразование Фурье функции f мы обозначаем через

$$\hat{f}(s) := \int f(x) e^{-ix \cdot s} dx.$$

Для любых функций f_1, f_2 из пространства Шварца S мы имеем соотношение

$$\widehat{(f_1 \star_\theta f_2)} = (2\pi)^{-d} \hat{f}_1 \otimes_\theta \hat{f}_2, \quad (19)$$

которое можно взять за определение мойаловского произведения элементов S . Поэтому если E удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, то F является алгеброй относительно произведения $\star_\theta$ с раздельно непрерывным умножением. Это произведение, очевидно, имеет единственное продолжение по непрерывности на тот случай, когда один из сомножителей принадлежит сопряженному пространству, и если $u \in F'$, $f \in F$, то

$$\widehat{(u \star_\theta f)} = (2\pi)^{-d} \hat{u} \otimes_\theta \hat{f}, \quad \widehat{(f \star_\theta u)} = (2\pi)^{-d} \hat{f} \otimes_\theta \hat{u}.$$

Кроме того, справедливы формулы

$$\langle u \star_\theta g, f \rangle = \langle u, g \star_\theta f \rangle, \quad \langle g \star_\theta u, f \rangle = \langle u, f \star_\theta g \rangle, \quad f, g \in F, \quad u \in F', \quad (20)$$

дающие продолжение мойаловского произведения на элементы F' по дуальности и соответствующие формулам (15). Поскольку E – алгебра по обычному умножению, F является также алгеброй относительно обычной свертки. Обозначим через $C(F)$ соответствующую алгебру обычных свертывателей, а через $\mathcal{M}_{\theta,L}(F)$, $\mathcal{M}_{\theta,R}(F)$ – алгебры левых и правых мойаловских мультипликаторов для F . Тогда $\hat{C}(F) = M(\hat{F})$, $\widehat{\mathcal{M}}_{\theta,L}(F) = C_{\theta,L}(\hat{F})$, $\widehat{\mathcal{M}}_{\theta,R}(F) = C_{\theta,R}(\hat{F})$ и мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если F – пространство функций, преобразование Фурье которого $E = \hat{F}$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, то пространство $C'(F)$ содержится в $\mathcal{M}_\theta(F) = \mathcal{M}_{\theta,L}(F) \cap \mathcal{M}_{\theta,R}(F)$.

5. СЛУЧАЙ ПРОСТРАНСТВ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Особый интерес представляют фурье-инвариантные функциональные пространства, имеющие структуру алгебры как относительно скрученной свертки, так и относительно произведения Мойяла. Напомним, что автогомеоморфизмом топологического пространства называют его взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение на себя.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что для пространства E выполнены условия теорем 1 и 2. Если, кроме того, преобразование Фурье и линейные замены координат в $\mathbb{R}^d$ являются автогомеоморфизмами E , то оба пространства $M'(E)$ и $C'(E)$ содержатся как в $C_\theta(E)$, так и в $M_\theta(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что симплектическая форма θ задается кососимметрической матрицей ϑ по формуле $\theta(s, t) = s \cdot \vartheta t$, где точка обозначает обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Пусть $f_1, f_2 \in E$. Из (1) и (19) следует

$$\begin{aligned} (f_1 \star_\theta f_2)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \iiint \hat{f}_1(t) f_2(y) e^{(i/2)s \cdot \vartheta t - i(s-t) \cdot y + is \cdot x} dt dy ds = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \iint \hat{f}_1(t) f_2(y) e^{it \cdot y} \delta\left(y - x - \frac{1}{2}\vartheta t\right) dt dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}_1(t) f_2\left(x + \frac{1}{2}\vartheta t\right) e^{it \cdot x} dt = \\ &= \frac{1}{\pi^d \det \theta} \int \hat{f}_1(-2\theta^{-1}\xi) f_2(x - \xi) e^{-2ix \cdot \theta^{-1}\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом,

$$f_1 \star_\vartheta f_2 = \frac{1}{\pi^d \det \theta} (\mathcal{F}_\vartheta f_1) \circledast_{-4\vartheta^{-1}} f_2,$$

где

$$(\mathcal{F}_\vartheta f)(\xi) := \int f(x) e^{2ix \cdot \vartheta^{-1}\xi} dx.$$

Аналогичная выкладка дает

$$f_1 \star_\vartheta f_2 = \frac{1}{\pi^d \det \theta} f_1 \circledast_{-4\vartheta^{-1}} (\overline{\mathcal{F}}_\vartheta f_2),$$

где

$$(\overline{\mathcal{F}}_\vartheta f)(\xi) := \int f(x) e^{-2ix \cdot \vartheta^{-1}\xi} dx.$$

Из условий теоремы вытекает, что каждое из симплектических преобразований Фурье $\mathcal{F}_\vartheta$ и $\overline{\mathcal{F}}_\vartheta$ есть автогомеоморфизм E и, кроме того, $e^{-2ix \cdot \vartheta^{-1}\xi} \in M(E \widetilde{\otimes} E)$. Поэтому в силу теоремы 1 скрученные свертки $(\mathcal{F}_\vartheta f) \circledast_{-4\vartheta^{-1}} v$ и $v \circledast_{-4\vartheta^{-1}} (\overline{\mathcal{F}}_\vartheta f)$ с параметром деформации $-4\vartheta^{-1}$ корректно определены для всех $f \in E$ и $v \in E'$, причем они непрерывны по v . Поскольку скрученная свертка и мойаловское произведение единственным образом продолжаются по непрерывности на тот случай, когда один из сомножителей принадлежит сопряженному пространству, мы заключаем, что

$$f \star_\vartheta v = \frac{1}{\pi^d \det \theta} (\mathcal{F}_\vartheta f) \circledast_{-4\vartheta^{-1}} v, \quad v \star_\vartheta f = \frac{1}{\pi^d \det \theta} v \circledast_{-4\vartheta^{-1}} (\overline{\mathcal{F}}_\vartheta f). \quad (22)$$

Из теоремы 1 и формул (22) следует, что $f \star_{\vartheta} v$ и $v \star_{\vartheta} f$ принадлежат $M(E)$ и отображения $(f, v) \rightarrow f \star_{\vartheta} v$, $(f, v) \rightarrow v \star_{\vartheta} f$ из $E \times E'$ в $M(E)$ непрерывны. Дальнейшая аргументация аналогична использованной при доказательстве теоремы 2. Пусть $w \in M'(E) \subset E'$. Тогда $w \star_{\vartheta} f \in M(E)$ по теореме 1. Покажем, что $w \star_{\vartheta} f \in E$. Согласно (20) мы имеем

$$\langle w \star_{\vartheta} f, g \rangle = \langle w, f \star_{\vartheta} g \rangle \quad \text{при всех } g \in E. \quad (23)$$

Пусть L_f – линейное отображение $v \rightarrow f \star_{\vartheta} v$ из E' в $M(E)$. Тогда

$$\langle v, L'_f w \rangle = \langle w, f \star_{\vartheta} v \rangle \quad \text{при всех } v \in E'. \quad (24)$$

При $v = g$ правые части равенств (23) и (24) совпадают и

$$\langle g, L'_f w \rangle = \int (L'_f w)(\xi) g(\xi) d\xi.$$

Следовательно, $w \star_{\vartheta} f$ совпадает с функцией $L'_f w$, принадлежащей E . При любом фиксированном $v \in E'$ отображение $E \rightarrow M(E): f \rightarrow f \star_{\vartheta} v$ непрерывно. Тем более оно непрерывно при наделении E и $M(E)$ слабыми топологиями. Поэтому функция $f \rightarrow \langle w, L'_f v \rangle$ непрерывна по топологии $\sigma(E, E')$. Следовательно, отображение $E \rightarrow E: f \rightarrow L'_f w = w \star_{\vartheta} f$ слабо непрерывно. Поскольку E – пространство Макки, это отображение непрерывно и относительно его исходной топологии. Мы заключаем, что $w \in \mathcal{M}_{\theta, L}(E)$. Аналогичным образом, $w \in \mathcal{M}_{\theta, R}(E)$ и, значит, $M'(E) \subset \mathcal{M}_{\theta}(E)$. Из этого результата и изоморфизмов $\widehat{M}(E) = C(\widehat{E})$, $\widehat{\mathcal{M}}_{\theta}(E) = \mathcal{C}_{\theta}(\widehat{E})$, где в данном случае $\widehat{E} = E$, следует, что $C'(E) \subset \mathcal{C}_{\theta}(E)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из формул (22) вытекает, что при условиях теоремы 3 алгебра $\mathcal{M}_{\vartheta}$ и алгебра $\mathcal{C}_{-4\vartheta^{-1}}(E) = \widehat{\mathcal{M}}_{-4\vartheta^{-1}}(E)$ состоят из одних и тех же элементов пространства E' . В частности, при $\theta = \hbar J$, где J – стандартная симплектическая матрица, алгебры $\mathcal{M}_{\hbar J}$ и $\mathcal{C}_{4\hbar^{-1}J}(E)$ состоят из одних и тех же элементов, а алгебра $\mathcal{M}_{2J}(E)$ фурье-инвариантна.

6. ПРИМЕРЫ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Многие используемые в теории обобщенных функций пространства являются ядерными пространствами Фреше или сильными сопряженными к ним. Для этих двух классов пространств используются соответственно аббревиатуры FN и DFN. Они обладают дополнительными удобными свойствами. В частности, к ним применима теорема о замкнутом графике в форме Птака; раздельная непрерывность билинейного отображения произведения таких пространств в любое локально выпуклое пространство равносильна для них совместной непрерывности; кроме того, пополненное проективное тензорное произведение двух FN (двух DFN) пространств является FN (DFN) пространством (см. [26], [31]). Отметим, что каждое пространство FN является пространством FS (Фреше–Шварца), а каждое пространство DFN есть пространство DFS. Основные сведения о пространствах FS и DFS можно найти, например, в [32], [33]. Изложенные выше формулировки и доказательства для таких пространств существенно упрощаются. Пространство Шварца S является

наиболее известным примером пространства FN. К этому классу принадлежат также пространства $\mathcal{S}^\beta$, рассматривавшиеся в контексте некоммутативной теории поля в работах [21], [34]. Пространство $\mathcal{S}^\beta(\mathbb{R}^d)$, $\beta > 0$, определяется как проективный предел $\text{proj} \lim_{N \rightarrow \infty, B \rightarrow 0} S_N^{\beta, B}(\mathbb{R}^d)$, где $S_N^{\beta, B}(\mathbb{R}^d)$ – банахово пространство гладких функций на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{N, B} = \sup_{x, \kappa} (1 + |x|)^N \frac{|\partial^\kappa f(x)|}{B^{|\kappa|} \kappa^{\beta \kappa}}. \quad (25)$$

(Здесь и далее используются стандартные мультииндексные обозначения, принятые в [23], [28].) Фурье-преобразованное пространство $\widehat{\mathcal{S}}^\beta = \mathcal{S}_\beta$ относится к классу пространств $K(M_n)$, где в данном случае $M_n(p) = e^{n|p|^{1/\beta}}$, и оно удовлетворяет условию ядерности $\int (M_n/M_{n'}) dp < \infty$, $n' > n$, указанному в [23]. Если $\beta > 1$, пространство $\mathcal{S}^\beta$ содержит функции с компактным носителем, и элементы сопряженного ему пространства $(\mathcal{S}^\beta)'$ принято называть ультрараспределениями (типа Бёрлинга) умеренного роста. При $\beta \leq 1$ функции из $\mathcal{S}^\beta(\mathbb{R}^d)$ аналитически продолжаются на $\mathbb{C}^d$ как целые функции порядка $\leq 1/(1 - \beta)$. Особую роль играет пространство $\mathcal{S}^1$. Вслед за Моримото [35] элементы $(\mathcal{S}^1)'$ называют ультрагиперфункциями умеренного роста, они использовались при аксиоматическом построении нелокальной квантовой теории поля с фундаментальной длиной (см. [29], [36], [37] и ссылки в этих статьях). Легко видеть, что для любой вещественной билинейной формы θ на $\mathbb{R}^d$ функция $e^{-i\theta/2}$ является поточечным мультипликатором пространства $\mathcal{S}_\beta(\mathbb{R}^{2d})$. Тем самым для $\mathcal{S}_\beta$ выполнены все условия теоремы 1 и $\mathcal{S}^\beta$ является алгеброй относительно звездочного произведения $\star_\theta$ при любом $\beta > 0$. При изучении моделей некоммутативной квантовой теории поля обычно используется представление мойаловского произведения в форме степенного разложения

$$(f \star_\theta g)(x) = f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \vartheta^{\mu_1 \nu_1} \dots \vartheta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x), \quad (26)$$

где $\vartheta^{\mu\nu}$ – матрица симплектической формы θ . В работе [21] показано, что если $\beta \leq 1/2$, то ряд (26) абсолютно сходится для всех $f, g \in \mathcal{S}^\beta$ по каждой из норм (25). Пространство $\mathcal{S}^{1/2}$ является максимальным FN-подпространством в S , для которого справедливо представление (26) с абсолютной сходимостью, поэтому оно играет выделенную роль в некоммутативной теории поля. Обозначим через $E_N^{\beta, B}(\mathbb{R}^d)$ банахово пространство гладких функций на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой

$$\|f\|_{-N, B} = \sup_{x, \kappa} (1 + |x|)^{-N} \frac{|\partial^\kappa f(x)|}{B^{|\kappa|} \kappa^{\beta \kappa}} \quad (27)$$

и пусть $\mathcal{E}^\beta = \text{inj} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{proj} \lim_{B \rightarrow 0} E_N^{\beta, B}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство $\mathcal{E}^\beta$ содержится в $\mathcal{M}_\theta(\mathcal{S}^\beta)$. При любых $w \in \mathcal{E}^\beta$ и $v \in (\mathcal{S}^\beta)'$ мойаловские произведения $w \star_\theta v$, $v \star_\theta w$ корректно определены как элементы $(\mathcal{S}^\beta)'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2 для доказательства первого утверждения достаточно доказать включение $\mathcal{E}^\beta \subset C'(\mathcal{S}^\beta)$. Тогда верно и второе утверждение, поскольку указанные произведения определены по дуальности для любых

$w \in \mathcal{M}_\theta(\mathcal{S}^\beta)$, $v \in (\mathcal{S}^\beta)'$. В работе [24] доказано⁴⁾, что алгебра $C(\mathcal{S}^\beta)$ состоит из тех же элементов, что и пространство $(\mathcal{E}^\beta)'$. Мы покажем, что топология $C(\mathcal{S}^\beta)$ не слабее, чем $\sigma((\mathcal{E}^\beta)', \mathcal{E}^\beta)$, и, следовательно, $C'(\mathcal{S}^\beta) \supset ((\mathcal{E}^\beta)'_\sigma)' = \mathcal{E}^\beta$.

Если функционал $u \in (\mathcal{S}^\beta)'$ принадлежит $C(\mathcal{S}^\beta)$, то его непрерывное продолжение на $\mathcal{E}^\beta$ можно построить следующим образом. Пусть f_0 – функция в $\mathcal{S}^\beta$ со свойством $\int f_0(\xi) d\xi = 1$ и пусть $h \in \mathcal{E}^\beta$. Положим

$$\langle u, h \rangle = \int \langle u, h(\cdot) f_0(\xi - \cdot) \rangle d\xi = \int (u * h_\xi)(\xi) d\xi, \quad h_\xi(x) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi - x) f_0(x) \quad (28)$$

(здесь звездочка $*$ обозначает обычную свертку). Подынтегральная функция в (28) непрерывна, поскольку сдвиги действуют в $\mathcal{S}^\beta$ непрерывно, а h является поточечным мультипликатором для этого пространства. Существует N_0 такое, что $\|h\|_{-N_0, B} < \infty$ при любом $B > 0$, поэтому для функции $h_\xi \in \mathcal{S}^\beta$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\partial^\kappa h_\xi(x)| &\leq \sum_\mu \binom{\kappa}{\mu} |\partial^\mu h(\xi - x) \partial^{\kappa-\mu} f_0(x)| \leq \\ &\leq \|h\|_{-N_0, B} \|f_0\|_{N, B} \sum_\mu \binom{\kappa}{\mu} B^{|\mu|} \mu^{\beta\mu} B^{|\kappa-\mu|} (\kappa - \mu)^{\beta(\kappa-\mu)} \times \\ &\quad \times (1 + |\xi - x|)^{N_0} (1 + |x|)^{-N} \leq \\ &\leq \|h\|_{-N_0, B} \|f_0\|_{N, B} (2B)^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} (1 + |x|)^{N_0-N} (1 + |\xi|)^{N_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда получаем, что при любых $N, B > 0$

$$\|h_\xi\|_{N, B} \leq \|h\|_{-N_0, B/2} \|f_0\|_{N+N_0, B/2} (1 + |\xi|)^{N_0}. \quad (30)$$

Поскольку $u \in C(\mathcal{S}^\beta)$, для окрестности $U = \{g: \|g\|_{N_0+d+1, 1} < 1\}$ в $\mathcal{S}^\beta$ найдется окрестность $V = \{g: \|g\|_{N, B} \leq \delta\}$ такая, что $u * g \in U$ при всех $g \in V$. Обозначим правую часть неравенства (30) через λ_ξ . Тогда $\delta \lambda_\xi^{-1} h_\xi \in V$ и, следовательно,

$$|(u * h_\xi)(\xi)| \leq \delta^{-1} \lambda_\xi (1 + |\xi|)^{-N_0-d-1} = \delta^{-1} \|h\|_{-N_0, B/2} \|f_0\|_{N+N_0, B/2} (1 + |\xi|)^{-d-1}. \quad (31)$$

Таким образом, интеграл в (28) абсолютно сходится и функционал u корректно определен на $\mathcal{E}^\beta$. Поскольку правая часть (31) содержит фактор $\|h\|_{-N_0, B/2}$, этот функционал непрерывен на каждом пространстве $\text{proj} \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{E}_N^{\beta, B}$, а тем самым и на $\mathcal{E}^\beta$. Надо еще убедиться, что на пространстве $\mathcal{S}^\beta$ определяемый формулой (28) функционал совпадает с исходным, что оправдывает использование для него того же обозначения. Если $h \in \mathcal{S}^\beta$, то аналогичная (29) оценка показывает, что при любых N_0, N и B справедливо неравенство

$$\|h(x) f_0(\xi - x)\|_{N, B} \leq \|h\|_{N+N_0, B/2} \|f_0\|_{N_0, B/2} (1 + |\xi|)^{-N_0}. \quad (32)$$

Отсюда следует, что интеграл в (28) остается абсолютно сходящимся при замене u на любой функционал $v \in (\mathcal{S}^\beta)'$, ибо $\|v\|_{N, B} \leq \infty$ при некоторых N и B . Значит, соответствующая последовательность интегральных сумм слабо фундаментальна в $\mathcal{S}^\beta$.

⁴⁾В [24] вместо $\mathcal{S}^\beta$ и $\mathcal{E}^\beta$ использовались обозначения $S^{\beta-}$ и $\widehat{\mathcal{E}}^{\beta-}$. Там показано, что пространством поточечных мультипликаторов для $\mathcal{S}^\beta$ является $\text{proj} \lim_{B \rightarrow 0} \text{inj} \lim_{N \rightarrow \infty} E_N^{\beta, B}$.

Поскольку пространство $\mathcal{S}^\beta$ монтелевское, оно полно относительно слабой сходимости и в нем слабая сходимость влечет сильную (см. [23], § I.6.3). Следовательно, последовательность интегральных сумм сходится в $\mathcal{S}^\beta$, а ее пределом может быть только h , так как топология $\mathcal{S}^\beta$ сильнее топологии простой сходимости.

Пусть теперь $u_\gamma \rightarrow 0$ в $C(\mathcal{S}^\beta)$. Тогда для ограниченного множества

$$Q = \bigcap_{N,B} \{g: \|g\|_{N,B} \leq \|h\|_{-N_0,B/2} \|f_0\|_{N+N_0,B/2}\}$$

и окрестности $\epsilon U = \{g: \|g\|_{N_0+d+1,1} < \epsilon\}$ со сколь угодно малым ϵ найдется такое γ_0 , что $u_\gamma * g \in \epsilon U$ при всех $g \in Q$ и $\gamma > \gamma_0$. Согласно (30) семейство функций $(1 + |\xi|)^{-N_0} h_\xi$ содержится в Q , и мы заключаем, что

$$|\langle u_\gamma, h \rangle| \leq \int |(u_\gamma * h_\xi)(\xi)| d\xi \leq \epsilon \int (1 + |\xi|)^{-d-1} d\xi \quad \text{при всех } \gamma > \gamma_0. \quad (33)$$

Следовательно, $\langle u_\gamma, h \rangle \rightarrow 0$ при любом $h \in \mathcal{E}^\beta$, что завершает доказательство.

Пространства Гельфанда–Шилова S^β_α являются пространствами DFN, алгебры $\mathcal{M}_\theta(S^\beta_\alpha)$ построены и изучены в работе [25]. Там же показана выделенная роль минимального нетривиального инвариантного относительно преобразования Фурье пространства $S^{1/2}_{1/2}$. Другие часто используемые пространства Гельфанда–Шилова $S^\beta = \text{inj} \lim_{B \rightarrow \infty} \text{proj} \lim_{N \rightarrow \infty} S^{\beta,B}_N$ не являются ни пространствами Фреше, ни пространствами DF. В эту шкалу входит пространство S^0 , представляющее собой фурье-образ пространства $\mathcal{D}$ гладких функций с компактным носителем. Возможность использования пространства S^0 в некоммутативной теории поля обсуждалась в работах [17], [38]. Следует отметить, что пространства S^β с $\beta > 0$ не наделялись топологией в [23], где вместо этого использовалось понятие сходимости последовательностей. Тем не менее к ним применимо вышеизложенное рассмотрение, поскольку при снабжении естественной топологией они ядерны [39], полны [40] и, очевидно, бочечны как индуктивные пределы пространств Фреше. В работе [24] доказано, что алгебра $C(S^\beta)$ состоит из тех же элементов, что и пространство, сопряженное к $E^\beta = \text{inj} \lim_{N,B \rightarrow \infty} E^{\beta,B}_N = M(S^\beta)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пространство E^β содержится в $\mathcal{M}_\theta(S^\beta)$. При любых $w \in E^\beta$ и $v \in (S^\beta)'$ мойаловские произведения $w \star_\theta v$, $v \star_\theta w$ корректно определены как элементы $(S^\beta)'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично разобранным выше случаям $\mathcal{S}^\beta$, достаточно показать, что топология пространства $C(S^\beta)$ не слабее, чем $\sigma((E^\beta)', E^\beta)$. Непрерывное продолжение функционала $u \in (S^\beta)'$ на E^β можно определить той же формулой (28) с $f_0 \in S^\beta$. На этот раз $\|h\|_{-N_0,B_0} < \infty$ при некоторых $N_0, B_0 > 0$, и аналогичная (29) оценка дает

$$\|h_\xi\|_{N,B_0} \leq \|h\|_{-N_0,B_0/2} \|f_0\|_{N+N_0,B_0/2} (1 + |\xi|)^{N_0} \quad \text{при любом } N > 0. \quad (34)$$

Значит, семейство функций $(1 + |\xi|)^{-N_0} h_\xi$ ограничено в S^β .

Пусть U – окрестность нуля в S^β , определяемая как абсолютно выпуклая оболочка множества $\cup_B \{g: \|g\|_{N_0+d+1,B} < 1\}$. Тогда все функции в U мажорируются

функцией $(1 + |x|)^{-N_0-d-1}$. Поскольку образ любого ограниченного множества при непрерывном отображении $g \rightarrow u * g$ поглощается окрестностью U , мы заключаем, что интеграл в (28) сходится и определяет линейный непрерывный функционал на E^β . Если $h \in S^\beta$, то в данном случае неравенство (32) соблюдается при некотором B и любых N, N_0 . Значит, интеграл в (28) абсолютно сходится при замене u на любой линейный функционал, определенный и непрерывный на монтелевском пространстве $\text{proj} \lim_{N \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} S_N^{\beta, B_1 + \varepsilon}$, где $B_1 > B$, и мы заключаем, что на S^β построенный функционал совпадает с исходным. Наконец, пусть $u_\gamma \rightarrow 0$ в $C(S^\beta)$. Тогда для ограниченного множества

$$Q = \bigcap_N \{g: \|g\|_{N, B_0} \leq \|h\|_{-N_0, B_0/2} \|f_0\|_{N+N_0, B_0/2}\}$$

и окрестности ϵU найдется такое γ_0 , что $u_\gamma * g \in \epsilon U$ при всех $g \in Q$ и $\gamma > \gamma_0$. Согласно (34) семейство $(1 + |\xi|)^{-N_0} h_\xi$ содержится в Q , и мы приходим к (33), что завершает доказательство.

Мы видим, что алгебры $M_\theta(\mathcal{S}^\beta)$ и $M_\theta(S^\beta)$ при любом θ включают в себя все полиномы, как и алгебра мойаловских мультипликаторов для пространства Шварца. Кроме того, при любом $\beta \geq \beta_0$, $0 < \beta_0 < 1$, эти алгебры содержат целые функции порядка роста не больше $1/(1-\beta_0)$ (в случае $M_\theta(\mathcal{S}^{\beta_0})$ минимального типа), которые полиномиально ограничены на вещественном пространстве. В частности, при любом $\beta \geq 0$ алгебра $M_\theta(S^\beta)$ содержит пространство $\mathcal{O}_{\text{exp}}$, состоящее из целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих оценке $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{b|\text{Im } z|}$, где константы C, N и b зависят от f . Это обобщает результат [8], [9], установленный ранее для $M_\theta(S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя рассуждение, аналогичное доказательству леммы 1 в работе [25] для S_α^β , можно показать, что $\mathcal{S}^\beta$ плотно в $M_\theta(\mathcal{S}^\beta)$. В соответствии со сказанным в конце раздела 3 отсюда следует, что $M_\theta(\mathcal{S}^\beta)$ является алгеброй относительно мойаловского произведения, а $(\mathcal{S}^\beta)'$ является $M_\theta(\mathcal{S}^\beta)$ -бимодулем. Аналогичным образом, $(S^\beta)'$ есть бимодуль над алгеброй $M_\theta(S^\beta)$.

Вопрос о преобразовании Вейля построенных алгебр мойаловских мультипликаторов, т. е. об их операторной реализации в гильбертовом пространстве, будет рассмотрен в последующей статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При рассмотрении линейных представлений топологических групп в монтелевских функциональных пространствах полезна следующая простая лемма.

ЛЕММА 1. *Предположим, что E – монтелевское пространство функций на множестве X и топология E сильнее топологии поточечной сходимости. Пусть в E задано линейное представление T локально компактной группы $\mathcal{G}$. Если для каждой функции $f \in E$ существует компактная окрестность K единицы e группы $\mathcal{G}$ такая, что множество $\{T_a f : a \in K\}$ ограничено в E , и если $\lim_{a \rightarrow e} (T_a f)(x) = f(x)$ при всех $x \in X$, то представление T непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{a_n\}$ – последовательность, сходящаяся к e в $\mathcal{G}$, то $a_n \in \mathcal{K}$ при достаточно больших n и, значит, последовательность $\{\mathcal{T}_{a_n}f\}$ ограничена в E . По определению монтелевского пространства [26] такая последовательность имеет по крайней мере одну точку прикосновения. Поскольку топология E сильнее топологии простой сходимости, из предельного соотношения $\lim_{a \rightarrow e} (\mathcal{T}_a f)(x) = f(x)$ следует, что точкой прикосновения может быть только f , и тем самым $\mathcal{T}_{a_n}f \rightarrow f$. Далее, к монтелевским пространствам применима обобщенная теорема Банаха–Штейнгауза ([26], § III.4.2), согласно которой из поточечной ограниченности множества операторов $\{\mathcal{T}_a\}_{a \in \mathcal{K}}$ следует, что для всякой абсолютно выпуклой окрестности нуля U в E найдется окрестность V такая, что $\mathcal{T}_a(V) \subset U$ при всех $a \in \mathcal{K}$. Записывая $\mathcal{T}_a f - f_0 = \mathcal{T}_a(f - f_0) + \mathcal{T}_a f_0 - f_0$, мы видим, что для окрестности U и всякой функции $f_0 \in E$ найдется окрестность $\mathcal{K}'(e)$ такая, что $\mathcal{T}_a f \in f_0 + U$ при всех $f \in f_0 + V/2$ и $a \in \mathcal{K}'$, т. е. отображение $\mathcal{G} \times E \rightarrow E: (a, f) \rightarrow \mathcal{T}_a f$ непрерывно в точке (e, f_0) . Записывая $\mathcal{T}_a f - \mathcal{T}_{a_0} f_0 = \mathcal{T}_{a_0}(\mathcal{T}_{a_0^{-1}a} f - f_0)$, мы заключаем, что это отображение непрерывно всюду. Лемма доказана.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 09-01-00835).

Список литературы

- [1] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [2] C.K. Zachos, D.B. Fairlie, T.L. Curtright (eds.), *Quantum Mechanics in Phase Space*, World Scientific Series in 20th Century Physics, **34**, World Scientific, Singapore, 2005.
- [3] J. von Neumann, *Math. Ann.*, **104**:1 (1931), 570–578.
- [4] M. A. Antonets, *Lett. Math. Phys.*, **2**:3 (1978), 241–245.
- [5] М. А. Антонец, *Матем. сб.*, **107(149)**:1(9) (1978), 20–36.
- [6] М. А. Антонец, *ТМФ*, **38**:3 (1979), 331–344.
- [7] J. M. Maillard, *J. Geom. Phys.*, **3**:2 (1986), 231–261.
- [8] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly, *J. Math. Phys.*, **29**:4 (1988), 869–879; J. C. Várilly, J. M. Gracia-Bondia, *J. Math. Phys.*, **29**:4 (1988), 880–887.
- [9] R. Estrada, J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly, *J. Math. Phys.*, **30**:12 (1989), 2789–2796.
- [10] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondia, B. Iochum, T. Schücker, J. C. Várilly, *Commun. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 569–623, arXiv: hep-th/0307241.
- [11] R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207–299, arXiv: hep-th/0109162.
- [12] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *Phys. Lett. B*, **331**:1–2 (1994), 39–44.
- [13] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys.*, **172**:1 (1995), 187–220, arXiv: hep-th/0303037.
- [14] N. Seiberg, E. Witten, *JHEP*, **09** (1999), 032, 93 pp., arXiv: hep-th/9908142.
- [15] L. Álvarez-Gaumé, M. A. Vázquez-Mozo, *Nucl. Phys. B*, **668**:1–2 (2003), 293–321, arXiv: hep-th/0305093.
- [16] V. E. Hubeny, M. Rangamani, S. F. Ross, *JHEP*, **07** (2005), 037, 32 pp., arXiv: hep-th/0504034.
- [17] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 257–269, arXiv: hep-th/0605249.
- [18] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **153**:1 (2007), 3–17, arXiv: 0708.0811.
- [19] M. Chaichian, M. Mnatsakanova, A. Tureanu, Yu. Vernov, *JHEP*, **09** (2008), 125, 11 pp., arXiv: 0706.1712.
- [20] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. D*, **73**:4 (2006), 045014, 5 pp., arXiv: hep-th/0508057.
- [21] M. A. Soloviev, *J. Phys. A*, **40**:48 (2007), 14593–14604, arXiv: 0708.1151.
- [22] M. A. Soloviev, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 125013, 11 pp., arXiv: 0802.0997.

- [23] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции*, Вып. 2: *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, М., 1958.
- [24] В. П. Паламонов, *Труды ММО*, **11** (1962), 309–350.
- [25] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **52**:6 (2011), 063502, 18 pp., arXiv: 1012.0669.
- [26] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1966.
- [27] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [28] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1: *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.
- [29] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **51**:9 (2010), 093520, 20 pp., arXiv: 1012.3546.
- [30] A. Grothendieck, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **16** (1955), 140 pp.
- [31] G. Köthe, *Topological Vector Spaces*. II, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], **237**, Springer, New York, 1979.
- [32] В. В. Жаринов, *УМН*, **34**:4(208) (1979), 97–131.
- [33] M. Morimoto, *An Introduction to Sato's Hyperfunctions*, Translations of Mathematical Monographs, **129**, AMS, Providence, RI, 1993.
- [34] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 413–429, arXiv: 1012.3536.
- [35] M. Morimoto, *Proc. Japan Acad.*, **51**:2 (1975), 87–91; **51**:4 (1975), 213–218.
- [36] E. Brüning, S. Nagamachi, *J. Math. Phys.*, **45**:6 (2004), 2199–2231.
- [37] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **50**:12 (2009), 123519, 17 pp., arXiv: 0912.0595.
- [38] D. H. T. Franco, C. M. M. Polito, *J. Math. Phys.*, **46**:8 (2005), 083503, 11 pp., arXiv: hep-th/0403028.
- [39] Б. С. Митягин, *Труды ММО*, **9** (1960), 317–328.
- [40] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **128**:3 (2001), 492–514, arXiv: math-ph/0112052.

Поступила в редакцию 12.09.2011