Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Внешние автоморфизмы $sl(2)$, интегрируемые системы и отображения, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 205–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:47:30

© 1999 г.

А. В. Цыганов*

ВНЕШНИЕ АВТОМОРФИЗМЫ $sl(2)$, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ОТОБРАЖЕНИЯ

Внешние автоморфизмы бесконечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ используются при построении матриц Лакса для интегрируемых гамильтоновых систем и дискретных интегрируемых отображений. Данный подход позволяет как воспроизвести известные результаты, так и построить новые примеры интегрируемых систем. Построены представления Лакса со спектральным параметром, соответствующие классические r -матрицы являются динамическими. Одно из достоинств этой схемы состоит в том, что построение представлений Лакса в методе классической r -матрицы позволяет достаточно легко перейти к рассмотрению квантовых систем и разделению переменных в квантовой механике.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, снабженное скобкой Ли–Пуассона, является пуассоновым многообразием. При этом орбиты соответствующего коприсоединенного действия – симплектические листы в $\mathfrak{g}^*$ – могут рассматриваться как фазовые пространства различных гамильтоновых систем. Наиболее интересные примеры интегрируемых систем такого типа связаны с бесконечномерными алгебрами Ли, а именно с аффинными алгебрами Ли или алгебрами петель [1]. Напомним, что алгеброй петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ называется алгебра Ли полиномов Лорана от переменной λ со значениями в конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Хотя многие из свойств интегрируемых систем связаны именно с бесконечномерностью алгебры петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, тем не менее некоторые из них определяются только соответствующей конечномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Число содержательных примеров интегрируемых систем можно резко увеличить, рассматривая универсальную обертывающую алгебру $U(\mathcal{L}(\mathfrak{g}))$ вместо алгебры петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Построение представлений алгебры $U(\mathcal{L}(\mathfrak{g}))$ и соответствующих матриц Лакса для интегрируемых систем основано на использовании свойств представлений конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

* Научно-исследовательский институт физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.niif.spb.su

Цель данной работы – показать на примерах, что довольно простые и очевидные алгебраические свойства конечномерных алгебр Ли можно эффективно использовать для построения и изучения интегрируемых систем и интегрируемых отображений. Мы рассматриваем одну из наиболее изученных алгебр Ли $\mathfrak{g} = sl(2)$. Тем не менее класс интегрируемых систем и дискретных интегрируемых отображений, связанных с внешними автоморфизмами бесконечномерных представлений $\mathfrak{g} = sl(2)$, оказывается достаточно широким. Мы не ставим перед собой задачу классификации и полного описания всех подобных систем и ограничимся лишь несколькими примерами. В перспективе полученные результаты, как нам кажется, помогут значительно упростить процедуру построения пар Лакса и r -матричных алгебр для широкого круга конечномерных интегрируемых систем. При этом для решения уравнений движения и в непрерывном, и в дискретном случаях можно использовать метод разделения переменных или проинтегрировать задачу в θ -функциях, связанных с соответствующей гиперэллиптической спектральной кривой $\mathcal{C}$.

В первой части работы мы рассматриваем несколько примеров внешних автоморфизмов пространства бесконечномерных представлений $sl(2)$, которые аддитивно сдвигают спектр оператора Лапласа, и автоморфизмов самих бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$. Затем мы используем эти автоморфизмы для построения матриц Лакса для семейства гамильтоновых интегрируемых систем – систем типа Штеккеля. В заключение рассматриваются дискретные интегрируемые отображения, связанные с данными механическими системами.

2. ВНЕШНИЕ АВТОМОРФИЗМЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ $sl(2)$

Пусть $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$ есть базис в алгебре Ли $sl(2)$

$$[\mathbf{h}, \mathbf{e}] = \mathbf{e}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -\mathbf{f}, \quad [\mathbf{e}, \mathbf{f}] = 2\mathbf{h}. \quad (2.1)$$

Элемент

$$\Delta = \mathbf{h}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{e}\mathbf{f} + \mathbf{f}\mathbf{e}) \quad (2.2)$$

обертывающей алгебры является оператором Лапласа на группе $SL(2)$.

Рассмотрим бесконечномерное представление $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в линейном пространстве V :

$$\mathcal{W}: \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\} \rightarrow \{e, f, h\} \in \text{End}(V).$$

Сопоставим данному представлению $\mathcal{W}$ матрицу

$$L = L(e, f, h) = \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}, \quad \{e, f, h\} \in \text{End}(V). \quad (2.3)$$

Если оператор e обратим в пространстве $\text{End}(V)$, то отображения

$$\varrho_1: L(e, f, h) \rightarrow L(e', f', h') = L + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda e^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

$$\varrho_2: L(e, f, h) \rightarrow L(e', f', h') = L + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -2\lambda h e^{-1} & -\lambda \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

являются внешними автоморфизмами пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$ в пространстве V . Выпишем эти отображения более подробно:

$$\begin{aligned} \varrho_1: e \rightarrow e' = e, \quad h \rightarrow h' = h, \quad f \rightarrow f' = f + \lambda e^{-1}, \\ \varrho_2: e \rightarrow e' = e, \quad h \rightarrow h' = h + \lambda, \quad f \rightarrow f' = f - 2\lambda h e^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что данные отображения действуют на образующие только одной из борелевских подалгебр и при этом ее элементы преобразуются достаточно тривиально. Для нас очень важно, что отображения $\varrho_{1,2}$ сдвигают спектр оператора Лапласа Δ (2.2) по правилу

$$\Delta \rightarrow \Delta' = \Delta + \lambda \quad \text{или} \quad \Delta \rightarrow \Delta' = \Delta + \lambda^2. \quad (2.6)$$

Используя внутренние автоморфизмы алгебры $sl(2)$, отображения $\varrho_{1,2}$ можно обобщить (в работе [2] это сделано для первого отображения).

Данные автоморфизмы пространства представлений $sl(2)$ мы будем использовать при построении матриц Лакса для конечномерных гамильтоновых интегрируемых систем.

В качестве примера подобных бесконечномерных представлений рассмотрим следующее представление $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в классической механике:

$$h = \frac{\mathbf{x}\mathbf{p}}{2}, \quad e = \frac{\mathbf{x}^2}{2}, \quad f = -\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{\lambda}{\mathbf{x}^2}, \quad \Delta = \lambda. \quad (2.7)$$

Здесь $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ – канонические координаты, так что $\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\} = 1$. В квантовом случае представление $\mathcal{W}$ с обратимым оператором e можно реализовать следующим образом:

$$h = x\partial_x - l, \quad e = x, \quad f = x\partial_x^2 - 2l\partial_x + \frac{\lambda}{x}, \quad \Delta' = l(l+1) + \lambda. \quad (2.8)$$

Аналогичное представление для систем типа Калоджеро имеет вид

$$h = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N (x_k D_k + D_k x_k), \quad e = 2 \sum_{k=1}^N x_k^2, \quad f = -2 \sum_{k=1}^N D_k^2,$$

где x_k – координаты, а D_k – операторы Данкла.

Итак, мы предъявили два примера автоморфизмов пространства бесконечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g} = sl(2)$. Теперь рассмотрим автоморфизмы $\tau: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ самих представлений алгебры $sl(2)$ в следующей матричной форме:

$$\tau: L(e, f, h) \rightarrow L(e', f', h') = M L(e, f, h) M^{-1}, \quad (2.9)$$

с некоторой подходящей матрицей

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (e, f, h), \quad \{e, f, h\} \in \text{End } V,$$

элементы которой являются функциями операторов $\{e, f, h\}$. Очевидно, отображение τ (2.9) заведомо сохраняет значение оператора Лапласа Δ (2.2) и должно сохранять коммутационные соотношения между генераторами $\{e, f, h\}$.

При $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ автоморфизмы τ являются внутренними автоморфизмами $\mathcal{W}$, которые отвечают следующей замене координат:

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{\det M}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}' = \frac{1}{\det M}(\gamma \mathbf{x} + \delta \mathbf{p}). \quad (2.10)$$

Для классических интегрируемых систем, реализованных на двойственном пространстве $sl^*(2)$ (2.7), можно сказать, что автоморфизм τ (2.9) задает интегрируемое отображение $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ (2.10) или интегрируемую систему с дискретным временем [3–5].

Внешние автоморфизмы бесконечномерного представления $\mathcal{W}$ (2.7) отвечают более сложным отображениям $\tau: (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{p}')$. Например, для матрицы M вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \zeta & \pi \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

отображение τ (2.9) является внешним автоморфизмом представления $\mathcal{W}$ (2.7), если

$$\begin{aligned} \zeta = e, \quad \pi &= \lambda - \frac{eh}{2f} - \alpha ef^{-1} - \beta fe^{-1}, \\ \zeta = h, \quad \pi &= \lambda - \alpha fh^{-1} - \beta hf^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Более того, для представлений $\mathcal{W}$ с нулевым спином $\Delta = 0$ отображение τ (2.9) является внешним автоморфизмом при

$$\begin{aligned} \zeta = e, \quad \pi &= \lambda - h(\alpha e^{-1} + \beta f^{-1}) - h^{-1}(\gamma e + \delta f), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \zeta = h, \quad \pi &= \lambda - e(\alpha h^{-1} + \beta f^{-1}) - e^{-1}(\gamma h + \delta f), \\ \zeta = \alpha e^{-1}, \quad \pi &= \lambda - \frac{h}{2ef}(\beta \ln(f) + \gamma \ln(e)), \quad \alpha = \beta - \gamma, \\ \zeta = \alpha h e^{-1}, \quad \pi &= \lambda - (\beta \ln(f) + \gamma \ln(e)), \quad \alpha = \beta - \gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметим, что при подходящем выборе параметра λ в (2.7), (2.8) мы всегда можем построить подобные представления с нулевым спином.

Конечно, список внешних автоморфизмов представлений алгебры $sl(2)$ не исчерпывается выписанными выше автоморфизмами. Далее мы будем использовать данные внешние автоморфизмы τ вида (2.9) при построении представлений Лакса для интегрируемых систем с дискретным временем.

Заметим также, что представления с нулевым спином $\Delta = 0$ используются в квантовой конформной теории поля [6] и могут быть связаны с динамическими решениями уравнений отражения для цепочек Тоды, отвечающих корневым системам типа $\mathcal{D}_n$ [2, 7].

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В данной работе мы ограничимся только несколькими примерами интегрируемых систем натурального вида с рациональными потенциалами.

Построение матриц Лакса для интегрируемых систем данного типа начнем с рациональной функции вида

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)}, \quad m \leq n, \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

где $\{q_j\}$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, а $\{\delta_k\}$ — набор произвольных констант. Следуя работе [8], введем диагональную метрику

$$\mathbf{g}_{jj}(q_1, \dots, q_n) = \text{Res} \Big|_{\lambda=q_j} \frac{1}{e(\lambda)} \quad (3.2)$$

и гамильтониан свободного движения

$$H = \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_{jj}(q_1, \dots, q_n) p_j^2. \quad (3.3)$$

Здесь $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ — набор канонических переменных в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой

$$\Omega_n = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$$

и скобками Пуассона $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$. Матрица Лакса $L(\lambda)$ для свободного движения с гамильтонианом (3.3)

$$L_x(\lambda) = \{H, L\} = [L, A] \quad (3.4)$$

выражается через функцию $e(\lambda)$ и две ее производные по времени:

$$e_x = \{H, e\} \quad e_{xx} = \{H, \{H, e\}\},$$

по правилу

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \begin{pmatrix} -\frac{e_x}{2} & e \\ -\frac{e_{xx}}{2} & \frac{e_x}{2} \end{pmatrix} (\lambda) \equiv \begin{pmatrix} h(\lambda) & e(\lambda) \\ f(\lambda) & -h(\lambda) \end{pmatrix}, \\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При этом соответствующая спектральная кривая

$$\mathcal{C} = \det(yI - L(\lambda)), \quad \mathcal{C}: y^2 = \prod_{k=1}^{2g+1} (\lambda - \lambda_k)$$

рода $g = [(n-1)/2]$ является минимально допустимой кривой для интегрируемых систем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Это означает, что все параметры $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ кривой $\mathcal{C}$ отвечают значениям n независимых интегралов движения. В координатах $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ интегралы движения равны

$$I_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} p_j^2, \quad I_1 = H, \quad (3.6)$$

где c_{jk} – элементы матрицы, обратной к матрице Штеккеля [8].

Скобки Пуассона для матрицы $L(\lambda)$ (3.5) имеют вид

$$\{\overset{1}{L}(\lambda), \overset{2}{L}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), \overset{1}{L}(\lambda)] - [r_{21}(\lambda, \mu), \overset{2}{L}(\mu)]. \quad (3.7)$$

Здесь

$$\overset{1}{L}(\lambda) = L(\lambda) \otimes I \quad \text{и} \quad \overset{2}{L}(\mu) = I \otimes L(\mu)$$

(см. [9]). Для рациональной функции $e(\lambda)$ (3.1) r -матрицы r_{ij} в выражении (3.7) совпадают с обычной рациональной r -матрицей на алгебре петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [1]:

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{\Pi}{\lambda - \mu}, \quad r_{21}(\lambda, \mu) = \Pi r_{12}(\mu, \lambda) \Pi, \quad (3.8)$$

где Π – оператор перестановки [9].

В общем случае функция $e(\lambda)$ мероморфна и полностью определяется своими нулями $\{q_j\}_{j=1}^n$, которые дают решение проблемы обращения отображения Абеля [8]. В этом случае r -матрицы в (3.7) являются тригонометрическими или эллиптическими [1].

Таким образом, представление Лакса (3.5) с полюсами в точках $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ (3.1) для геодезического движения (3.3) можно отождествить с элементом пополненной алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [1] в фундаментальном представлении. Это позволяет применять внешние автоморфизмы $\varrho_{1,2}$ (2.4), (2.5) “подстилающей” алгебры Ли $sl(2)$ непосредственно к представлению (3.5) соответствующей алгебры петель.

Действительно, введем семейство матриц в соответствии с отображениями (2.4), (2.5)

$$L(\lambda) \rightarrow L_N(\lambda) = L + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\varphi(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$L(\lambda) \rightarrow L_N(\lambda) = L + \begin{pmatrix} [\varphi(\lambda)]_N & 0 \\ -2[\varphi(\lambda)h(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_N & -[\varphi(\lambda)]_N \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Здесь параметрическая функция $\varphi(\lambda)$ – произвольная функция спектрального параметра λ и $[z]_N$ – проекция элемента z на ad_R^* -инвариантные пуассоновы подпространства исходных r -скобок (3.7) [2, 10]. Для рациональной r -матрицы (3.8) данные проекции являются линейными комбинациями тейлоровских проекций

$$[z]_N = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k \lambda^k \right]_N \equiv \sum_{k=0}^N z_k \lambda^k \quad (3.11)$$

или лорановских проекций [1, 10].

Введем обозначения

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями можно доказать, что отображения (3.9), (3.10) являются автоморфизмами представлений двух r -матричных алгебр вида (3.7). При этом отображения $\varrho_{1,2}$ (3.9), (3.10) действуют на исходную r -матрицу по правилу

$$r_{12}^{(N)} = r_{12} + \frac{([\varphi(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_N - [\varphi(\mu)e^{-2}(\mu)]_N)}{\lambda - \mu} \cdot \sigma_- \otimes \sigma_-, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} r_{12}^{(N)} = r_{12} + \frac{([\varphi(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_N - [\varphi(\mu)e^{-1}(\mu)]_N)}{\lambda - \mu} \cdot \sigma_3 \otimes \sigma_- - \\ - 2 \frac{([\varphi(\lambda)h(\lambda)e^{-2}(\lambda)]_N - [\varphi(\mu)h(\mu)e^{-2}(\mu)]_N)}{\lambda - \mu} \cdot \sigma_- \otimes \sigma_-, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$r_{21}^{(N)}(\lambda, \mu) = \Pi r_{12}^{(N)}(\mu, \lambda) \Pi.$$

Таким образом, интегрируемая система, описывающая свободное движение, отображается в семейство функционально независимых интегрируемых систем.

Для первого отображения ϱ_1 (3.9) данное утверждение доказано в работе [10]. При доказательстве используется ряд свойств лорановских ad_R^* -инвариантных пуассоновых подпространств для рациональных r -матриц. Общее для всех r -матриц доказательство неизвестно.

Под действием отображения n параметров λ_j спектральной кривой $\mathcal{C}_N = \det(yI - L_N(\lambda))$ остаются, как и прежде, значениями интегралов движения

$$I_k \rightarrow I_k^{(N)} = I_k + \sum_{j=1}^n c_{jk} U_j(q_j, p_j). \quad (3.14)$$

Остальные параметры кривой $\mathcal{C}_N$ равны коэффициентам лорановского разложения параметрической функции $\varphi(\lambda)$, т.е. константам, которые и определяют форму потенциалов U_j (3.14) [8].

Отображения (3.9), (3.10) одного представления алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ в различные представления соответствующей универсальной обертывающей алгебры $U(\lambda, sl(2))$ можно рассматривать как одевающую процедуру. Эта процедура позволяет создавать матрицы Лакса $L'_N(\lambda)$ для бесконечного семейства интегрируемых систем из одной известной матрицы Лакса для движения по геодезическим. При этом отображения (3.9), (3.10) “одевают” исходную кривую $\mathcal{C}$ минимально допустимого рода $g = [(n - 1/2)]$, задающую метрику, для всех потенциальных однородных систем типа Штеккеля на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ [8]. Данные системы задаются гамильтонианами вида

$$H = \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_{jj}(q_1, \dots, q_n) [p_j^2 + U(q_j, p_j)]. \quad (3.15)$$

При этом переменные $\{q_j\}_{j=1}^n$ образуют систему ортогональных криволинейных координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ [8, 11]. Декартовы координаты $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ равны коэффициентам в лорановском разложении функции $\sqrt{e(\lambda)}$ [10]. В декартовых координатах гамильтониан (3.15) имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2} + V_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n).$$

Таким образом, отображения (3.9), (3.10) аддитивно сдвигают классический аналог оператора Лапласа

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Можно сказать, что мы перенесли действие (2.6) наших достаточно простых отображений $\varrho_{1,2}$ (2.4), (2.5) из пространства бесконечномерных представлений в фазовое пространство интегрируемых систем $\mathbb{R}^{2n}$. Заметим при этом, что автоморфизм ϱ_1 (2.4) приводит к потенциалу $V_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, который зависит только от координат [2, 8].

В качестве примера выпишем несколько стандартных криволинейных систем координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ [12] в нашем формализме, т.к. эти конкретные системы будут использоваться нами далее:

эллиптические координаты при $m = n$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^n (\lambda - \delta_k)} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

$$\delta_1 < \mathbf{x}_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n < \mathbf{x}_n;$$

параболические координаты при $m = n - 1$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \delta_k)} = \lambda - \mathbf{x}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

$$\mathbf{x}_1 < \delta_1 < \mathbf{x}_2 < \dots < \delta_{n-1} < \mathbf{x}_n;$$

сферические координаты при $m = n + 1$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_0, \dots, q_n) = \frac{q_0 \prod_{j=1}^n (\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n+1} (\lambda - \delta_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathbf{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}).$$

По своему определению криволинейные координаты $\{q_j\}$ являются нулями рациональной функции $e(\lambda)$, тогда как декартовы координаты $\{\mathbf{x}_j\}$ суть вычеты этой функции $e(\lambda)$ в полном соответствии с подходом, основанным на применении функции Бейкера–Ахизера [13]. Все другие ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть получены предельными переходами из данных систем [12]. Более того, все интегрируемые системы с гамильтонианами натурального вида, имеющие рациональные потенциалы и допускающие разделение переменных в стандартных криволинейных координатах, могут быть построены в рамках предложенного подхода [8].

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В данном разделе мы рассмотрим два примера интегрируемых отображений достаточно специального вида. Действительно, мы попробуем построить отображение, сохраняющее симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\tau_\lambda: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (4.1)$$

такое, что рассмотренные ранее интегралы движения $I_k^{(N)}$ (3.14) будут инвариантны относительно действия τ_λ :

$$I_k^{\tau(N)} = I_k^{(N)}, \quad \{I_i^{(N)}, I_k^{(N)}\} = 0, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Здесь $f^\tau(z) = f(\tau(z))$ и $I_k^{(N)}$ – интегралы движения для гамильтоновой интегрируемой системы с матрицей Лакса $L_N(\lambda)$ (3.9), (3.10). Так как $\{I_k^{(N)}\}$ – полный набор интегралов в инволюции, то отображение τ_λ будет описывать интегрируемую систему с дискретным временем. Вообще говоря, такого отображения может не существовать. Однако даже если оно и существует, то найти его совсем не просто.

Напомним, что уравнение Лакса для систем с дискретным временем имеет вид

$$L_N^\tau(\lambda) = M L_N(\lambda) M^{-1}. \quad (4.2)$$

С точки зрения алгебраической геометрии отображение τ_λ задает набор сдвигов (многозначный сдвиг) на якобиане спектральной кривой $\mathcal{C}$ или на его абелевом подмногообразии [3].

С точки зрения теории представлений отображение τ_λ задает автоморфизм представления $L_N(\lambda)$ линейной r -матричной алгебры (3.7). Данный автоморфизм (4.2) сохраняет r -матрицы (3.12), (3.13):

$$\tau(\lambda): r_{12}^{(N)} \rightarrow r_{12}^{\tau(N)} = r_{12}^{(N)},$$

которые преобразуются по правилу

$$\begin{aligned} r_{12}^{\tau(N)} &= \overset{1}{M} \overset{2}{M} \cdot \left(r_{12}^{(N)} - \left\{ \overset{1}{M}^{-1}, \overset{2}{L} \right\} \overset{1}{M}^{-1} + \frac{1}{2} [U_{12}, \overset{2}{L}] \right) \cdot \overset{1}{M}^{-1} \overset{2}{M}^{-1}, \\ U_{12} &= \left\{ \overset{1}{M}^{-1}, \overset{2}{M}^{-1} \right\} \cdot \overset{1}{M} \overset{2}{M}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Кроме этого, отображение τ_λ (4.2) должно сохранять структуру данного представления (3.5)–(3.10).

Довольно часто последнее условие является наиболее критичным. Для того чтобы подтвердить это, рассмотрим интегрируемые системы, допускающие разделение переменных в эллиптических $m = n$ (3.1) и сферических координатах $m = n + 1$ (3.1). В декартовых координатах матрица Лакса $L(\lambda)$ (3.5) для свободного движения имеет вид

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda - \delta_j} \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j & \mathbf{x}_j^2 \\ -\mathbf{p}_j^2 & \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j \end{pmatrix} (\lambda) \equiv \sum_{k=0}^n L^{(j)}(\lambda, \mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j), \quad (4.4)$$

где $\epsilon = 1 + n - m = 0, 1$, соответственно. Очевидно, что внутренние автоморфизмы (2.9) индуцируют отображения, которые всегда сохраняют r -матрицу (3.8), но в общем случае нарушают структуру представления при $m \leq n$. В то же время для сферических координат данные автоморфизмы индуцируют отображения типа (2.10).

Таким образом, мы видим, что построение искомым интегрируемых отображений τ_λ (4.1) – достаточно сложная процедура. Естественнo предположить, что автоморфизмы τ_λ могут быть связаны с автоморфизмами τ (2.9) представлений “подстилающей” алгебры Ли $sl(2)$. В данной работе мы докажем, что автоморфизмы алгебры $sl(2)$ действительно позволяют находить интегрируемые системы с дискретным временем.

Подставив матрицу Лакса

$$L_N(\lambda) = \begin{pmatrix} h_N & e_N \\ f_N & -h_N \end{pmatrix} (\lambda)$$

и искомую вторую матрицу Лакса M вида (2.11) в уравнение (4.2), мы получим

$$e_N^\tau(\lambda) = -\zeta^{-1}(\lambda) f_N(\lambda).$$

Данное выражение можно рассматривать как отображение

$$\mathbf{x}_j^\tau = \pm \zeta^{-1/2}(\lambda) \mathbf{p}_j, \quad \zeta(\lambda) = \left[\frac{\varphi(\lambda)}{e(\lambda)} \right]_N, \quad \zeta(\lambda) = -2 \left[\frac{\varphi(\lambda) h(\lambda)}{e(\lambda)} \right]_N. \quad (4.5)$$

Напомним, что матрица Лакса (4.4) для свободного движения является элементом пополненной алгебры петель вида $\bigoplus_{j=1}^n sl(2)$ в фундаментальном представлении. Более того, представления в каждом узле цепочки $L^{(j)}(\lambda, \mathbf{x}_j, \mathbf{p}_j)$ имеют нулевой спин $\Delta = 0$. Поэтому мы можем попробовать применить автоморфизмы алгебры $sl(2)$ вида (2.13) с подходящим элементом ζ .

В данной работе мы ограничимся изучением второго автоморфизма ϱ_2 (2.5), (3.10) и еще более упростим выкладки, используя свойства инвариантных тейлоровских подпространств (3.11). Итак, пусть

$$L_1(\lambda) = L(\lambda) + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $L(\lambda)$ задано в (4.4). Данная матрица построена по правилу (3.10). Действительно, положим $\varphi(\lambda) = -\lambda/2$ в (3.10) и используем разложение Лорана в окрестности точки $\lambda = \infty$, отбросив все слагаемые с обратными степенями по λ ,

$$\begin{aligned} [\varphi(\lambda)]_1 &= \left[-\frac{\lambda}{2} \right]_1 = -\frac{\lambda}{2}, \\ -2 \left[\frac{\varphi(\lambda)h(\lambda)}{e(\lambda)} \right]_1 &= \left[\frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j + O(\lambda^{-1})}{1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^2 \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})} \right]_1 = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j = \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j + O(\lambda^{-1}) \right) \right]_1 = [\phi(\lambda)h(\lambda)]_1, \end{aligned}$$

где $\phi(\lambda) = \lambda^{1-n} \prod (\lambda - \delta_k)$. Таким образом, для данной проекции можно использовать более простые автоморфизмы вида (2.9)–(2.11) с элементом $\zeta = h$. Более того, для данной проекции r -матрица (3.13) не зависит от динамических переменных.

Например, при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ в (2.12) матрица $M_1(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ [\phi(\lambda)h(\lambda)]_1 & \left[\phi(\lambda) - \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} \right]_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j & \lambda - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j^2}{\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Дискретное уравнение Лакса (4.2) с матрицами $L_1(\lambda)$ (4.6) и $M_1(\lambda)$ (4.7) отвечает известным интегрируемым отображениям [4, 5]. Для случая эллиптических координат это отображение известно как дискретный аналог системы Гарнье [4, 5]. Для случая сферических координат это отображение является одним из дискретных аналогов задачи Неймана о движении точки на сфере под действием силы с квадратичным потенциалом [4]. Выпишем явно отображение τ_λ для случая эллиптических координат [5]:

$$\begin{aligned} \tau_\lambda : \quad q_j^\tau &= \pm \mathbf{p}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k \right)^{-1/2}, \\ \tau_\lambda : \quad p_j^\tau &= \mp \mathbf{x}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k \right)^{1/2} \pm \mathbf{p}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k \right)^{-1/2} \left(\lambda_j - \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k^2}{\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в работах [4, 5] рассматривалось обратное отображение τ_λ^{-1} . Кроме этого, в работе [4] используются подобные матрицы Лакса и поэтому соответствующие r -матрицы преобразуются по правилу (4.3) и зависят от динамических переменных.

Таким образом, мы доказали, что известные классические интегрируемые отображения [4, 5] могут быть связаны с внешними автоморфизмами бесконечномерных представлений (2.9) алгебры $sl(2)$. Более того, с помощью данных автоморфизмов можно построить обобщения систем (2.12), (2.13) и получить новые системы с дискретным временем.

Список литературы

- [1] Динамические системы-VII. В сб.: Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987.
- [2] *A. V. Tsiganov*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 650.
- [3] *А. П. Веселов*. УМН. 1991. Т. 46. С. 3.
- [4] *O. Ragnisco*. Phys. Lett. A. 1995. V. 198. P. 295.
- [5] *Z. Qiao, R. Zhou*. Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 35.
- [6] *L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky*. High energy QCD as a completely integrable model. Preprint ITP-SB-94-14, hep-th/9404173, 1994.
- [7] *A. V. Tsiganov*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 8049.
- [8] *А. В. Цыганов*. ТМФ. 1998. Т. 115. С. 3.
- [9] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [10] *P. P. Kulish, S. Rauch-Wojciechowski, A. V. Tsiganov*. J. Math. Phys. 1995. V. 37. P. 3365.
- [11] *J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, V. B. Kuznetsov, A. V. Tsiganov*. J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 567.
- [12] *E. G. Kalnins*. Separation of Variables for Riemann Spaces of Constant Curvature. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. New York: Longman Scientific & Technical, 1986.
- [13] *E. K. Sklyanin*. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35.

Поступила в редакцию 30.VI.1998 г.