Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 64–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:33:42

© 2012 г.

Е. В. Юшков*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ, РОДСТВЕННОГО УРАВНЕНИЮ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Исследовано дифференциальное нелинейное уравнение третьего порядка $(u_{xx} - u)_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, описывающее процессы в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией. Изучена проблема существования глобальных решений, и для некоторых начально-краевых задач, отвечающих этому уравнению, получены достаточные условия отсутствия глобальных решений. Рассмотрены примеры разрушения решения для начально-краевой задачи и задачи Коши. Использован метод нелинейной емкости Митидиери–Похожаева.

Ключевые слова: уравнение типа Кортевега–де Фриза, начально-краевая задача, разрушение решения, глобальная разрешимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем уравнение третьего порядка

$$(u - u_{xx})_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad (1)$$

описывающее волновые процессы в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией. Мы не будем подробно останавливаться на получении используемых материальных соотношений, лишь представим краткий вывод уравнения (1) на основе законов электромагнетизма. Для более подробного ознакомления с физикой процесса и с математическими обозначениями, используемыми в настоящей работе, см. книгу [1]. Основная цель наших исследований состоит в изучении эффекта разрушения решения уравнения (1). С физической точки зрения этот эффект характеризует пробой в полупроводнике вследствие неограниченного роста концентрации свободных зарядов. Заметим, что уравнение (1) имеет много общего с хорошо известным нелинейным уравнением Кортевега–де Фриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, содержащим и дисперсию, и нелинейность, которое активно используется в приложениях (например, для описания волн на мелкой воде [2], [3]). Методика, представленная

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: yushkov.msu@mail.ru

в настоящей работе, является приложением методов Похожаева [4], [5], разработанных для уравнения Кортевега–де Фриза, к исследованию сингулярных решений методом нелинейной емкости [6].

Принципиальное свойство полупроводников заключается в том, что наблюдаемые в них нестационарные процессы описываются системой уравнений стационарного поля, уравнением неразрывности и материальными уравнениями [7]. При этом определяющим фактором в описании процесса является вид материальных уравнений, связывающих индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ с напряженностью $\mathbf{E}$, с одной стороны, и плотность тока $\mathbf{J}$ с индукцией $\mathbf{E}$, с другой. В некоторой декартовой системе координат система уравнений в общем случае имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi en, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (2)$$

где n – плотность свободных зарядов, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, относительно которого нам известно лишь модельное распределение плотности связанных зарядов: $\rho = \operatorname{div} \mathbf{P}$. Введем кулоновский потенциал $u(\mathbf{r}, t)$, тогда согласно (2) напряженность электрического поля может быть представлена в виде $\mathbf{E} = -\nabla u(\mathbf{r}, t)$. При этом в предположении сильно нагретых связанных электронов хорошим модельным распределением зарядов является $\rho = r_1 u$, где $r_1 > 0$ [1].

Если представить плотность тока $\mathbf{J}$ как сумму тока проводимости $\mathbf{J}_1$ и тока пространственной дисперсии $\mathbf{J}_2$, то в случае, когда присутствует постоянное внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0$, имеем (в одномерном случае)

$$\mathbf{J}_1 = \mu en_0(u) \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{J}_2 = -\sigma_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}. \quad (3)$$

В нашем модельном представлении квазистационарное распределение свободных электронов $n_0(u)$ пропорционально u^2 , тогда, рассматривая одномерный случай, подставляя (3) в уравнения (2) и дифференцируя первое уравнение в (2) по t , мы получаем систему

$$(u_{xx} - 4\pi u)_t = -4\pi n_t, \quad n_t = E_0 u u_x + \sigma_0 u_{xxx}.$$

Перепишем эту систему уравнений в виде (1), удобном для исследования. Данное нелинейное уравнение представляет собой уравнение третьего порядка для простейшего одномерного случая.

2. ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Мы будем говорить, что решение разрушается, если оно стремится к бесконечности при $t \rightarrow T$ на некотором множестве Ω значений x , другими словами, если

$$\int_{\Omega} u(t, x) \varphi(t, x) dx \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow T.$$

Выберем пробную функцию $\varphi(t, x)$ в области $G = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega\}$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(G), \quad \varphi_x \geq 0, \quad \varphi(x, T) = 0, \quad \int_G \frac{(\varphi_t - \varphi_{xxt} + \varphi_{xxx})^2}{\varphi_x} dx dt < \infty. \quad (4)$$

Умножая (1) на пробную функцию и интегрируя по области G , мы получаем

$$\int_G u_t \varphi \, dx \, dt - \int_G u_{xxt} \varphi \, dx \, dt + \int_G u_{xxx} \varphi \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_G (u^2)_x \varphi \, dx \, dt = 0.$$

Интегрируем по частям, в результате имеем

$$\begin{aligned} K(u, \varphi) - \int_G u(\varphi_t + \varphi_{xxx} - \varphi_{xxt}) \, dx \, dt - \\ - \int_{\Omega} u_0(\varphi(0, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \, dx = \frac{1}{2} \int_G u^2 \varphi_x \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K(u, \varphi) = \left[u_{0x} \varphi_0 - u_0 \varphi_x(0, x) + \right. \\ \left. + \int_0^T \left(\frac{1}{2} u^2 \varphi - u \varphi_{xt} + u \varphi_{xx} + u_x \varphi_t - u_x \varphi_x + u_{xx} \varphi \right) dt \right]_{\partial \Omega}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством Юнга:

$$\left| \int_G u(\varphi_t + \varphi_{xxx} - \varphi_{xxt}) \, dx \, dt \right| \leq \frac{1}{4} \int_G u^2 \varphi_x \, dx \, dt + S(G),$$

где мы использовали обозначение

$$S(G) = \int_G \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx} - \varphi_{xxt})^2}{\varphi_x} \, dx \, dt.$$

Наконец, из (5) мы получаем основное для дальнейшего анализа неравенство

$$\frac{1}{4} \int_G u^2 \varphi_x \, dx \, dt \leq K(u, \varphi)(t) - \int_{\Omega} u_0(\varphi(0, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \, dx + S(G). \quad (6)$$

Непосредственно из основного неравенства вытекает справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть начальная функция $u(0, x) = u_0$ принадлежит пространству $L^1(a, b)$, и существует пробная функция $\varphi(x, t)$, обладающая свойствами (4), такая, что $K(u, \varphi) \in L^1(0, T)$. Если справедливо неравенство

$$K(u, \varphi) + S(G) \leq \int_{\Omega} u_0(\varphi(0, x) - \varphi_{xx}(0, x)) \, dx,$$

то не существует глобального решения такой начально-краевой задачи для уравнения (1).

В качестве применения теоремы 1, действуя по схеме работы [4], приведем один пример, в котором не будем стремиться к получению “абсолютно” оптимального результата, а ограничимся “частично” оптимальным выбором пробной функции (оптимизация в данном случае связана с вариационной задачей на минимум правой части неравенства (6) по $\varphi(x, t)$).

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1) в прямоугольнике $G = \{(t, x) : 0 < t < T, 0 < x < 1\}$:

$$\begin{aligned} (u - u_{xx})_t + u_{xxx} + uu_x &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{при } x \in (0, 1), \\ u(t, 1) &= 0, \quad u_x(t, 1) = f_1(t), \quad u_{xx}(t, 1) = f_2(t) \quad \text{при } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_1, f_2 \in L^1(0, T)$. Выберем пробную функцию $\varphi(t, x) = \varphi_0(t)x^k$, где $\varphi_0(t) \geq 0$ при $0 < t < T$, $\varphi_0(0) = 1$ и $\varphi_0(T) = 0$. Используя явный вид пробной функции, нетрудно получить цепочку равенств

$$\begin{aligned} S(G) &= \int_G \frac{(\varphi_t + \varphi_{xxx} - \varphi_{xxt})^2}{\varphi_x} dx dt = \\ &= \int_G \frac{(\varphi'_0(x^k - k(k-1)x^{k-2}) + k(k-1)(k-2)\varphi_0 x^{k-3})^2}{k\varphi_0 x^{k-1}} dx dt = \\ &= \frac{k^5 - 5k^3 + 4k^2 + 9k - 10}{k(k^2 - 4)} \int_0^T \left(\frac{|\varphi'_0|^2}{\varphi_0} + \lambda^2 \varphi_0 \right) dt - 2(k-2) \left(1 - \frac{k(k-1)^2}{k-3} \right), \end{aligned}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{k^2(k-1)^2(k-2)^2(k^2-4)}{(k-4)(k^5-5k^3+4k^2+9k-10)}.$$

Теперь минимизируем интеграл по ϕ , сделав замену $\varphi_0(t) = \psi^2(t)$. Воспользуемся формулой Эйлера–Лагранжа [7], получим, что минимизирующая функция удовлетворяет уравнению

$$\psi'' - \frac{\lambda^2}{4}\psi = 0, \quad \psi(0) = 1, \quad \psi(T) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = \psi^2(t) &= \frac{e^{\lambda t/2} - e^{\lambda T} e^{-\lambda t/2}}{1 - e^{\lambda T}} = \frac{\operatorname{sh}^2((T-t)\lambda/2)}{\operatorname{sh}^2(T\lambda/2)}, \\ S(G) &= 2\lambda \operatorname{cth} \frac{T\lambda}{2} \cdot \frac{k^5 - 5k^3 + 4k^2 + 9k - 10}{k(k^2 - 4)} - 2(k-2) \left(1 - \frac{k(k-1)^2}{k-3} \right), \\ K(u, \varphi)(t) &= \int_0^T (f_2 \varphi_0 - f'_1 \varphi_0 - k f_1 \varphi_0) dt. \end{aligned}$$

Тогда, применяя теорему 1, получаем следующий результат. Если начальная функция $u_0 \in L^1(0, 1)$ и граничные функции $f_1, f_2 \in L^1(0, T)$ удовлетворяют неравенству

$$\int_0^1 u_0(x^k - k(k-1)x^{k-2}) dx > S(G) + \int_0^T (f_2 - f'_1 - k f_1) \varphi_0 dt,$$

то начально-краевая задача (7) не имеет решения.

Заметим, что если $f_2 \leq kf_1 + f'_1$, то с ростом начальной функции, при

$$\int_0^1 u_0(x^k - k(k-1)x^{k-2}) dx \rightarrow +\infty,$$

для локального решения задачи время разрушения уменьшается, $T \rightarrow 0$.

3. ЗАДАЧА КОШИ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1). Будем пользоваться методом “расширяющегося промежутка”. Другими словами, предположим, что существует решение на ограниченном промежутке $(a, b) \subset R$, а затем перейдем к пределам $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$. В результате получим изначальную оценку, на основании которой придем к противоречию с утверждением о существовании решения.

Положим

$$F(t) = \int_{-L}^L u(t, x)(\phi(x) - \phi''(x)) dx, \quad \phi \in C^3(-L, L) \cap C^2[-L, L]. \quad (8)$$

Пусть функция ϕ , помимо свойств (4), удовлетворяет условиям

$$\phi(L) = \phi'(L) = \phi''(L) = 0. \quad (9)$$

Умножим уравнение (1) на эту функцию и проинтегрируем по интервалу $(-L, L)$. Тогда для функционала (8) мы получим следующее дифференциальное равенство:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{-L}^L u^2 \phi' dx + \int_{-L}^L u \phi''' dx + K(u, \phi), \quad (10)$$

где $K(u, \phi) = [u_{xx}\phi - u_x\phi_x + u\phi_{xx} - u_{xt}\phi + u_t\phi_x + u^2\phi/2]_{x=-L}$. Используя неравенства Гёльдера и Юнга, нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L u \phi''' dx &\leq \frac{1}{4} \int_{-L}^L u^2 \phi' dx + a, \\ \int_{-L}^L u(\phi - \phi'') dx &\leq \left(\int_{-L}^L u^2 \phi' dx \right)^{1/2} b^{1/2}, \end{aligned}$$

где мы ввели обозначения

$$a = \int_{-L}^L \frac{(\phi''')^2}{\phi'} dx, \quad b = \int_{-L}^L \frac{(\phi - \phi'')^2}{\phi'} dx.$$

Потребуем, чтобы $a < \infty$ и $b < \infty$ для данной функции ϕ . Из формулы (10) имеем

$$\frac{dF(t)}{dt} \geq \frac{1}{4b} F^2(t) - a + K(u, \phi).$$

Пользуясь методами теории обыкновенных дифференциальных неравенств первого порядка, нетрудно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Если существует $L > 0$ и функция $\phi(x)$ такая, что выполняются условия (4), (9), и, кроме того, $K(u, \phi) \geq c$ при всех $t > 0$, где c – некоторая константа, то $F(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T$, где

$$T = \begin{cases} \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{c-a}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{F(0)}{2\sqrt{b(c-a)}} \right), & c > a; \\ \frac{4b}{F(0)}, & c = a, \quad F(0) > 0; \\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-c}} \ln \frac{F(0) + 2\sqrt{b(a-c)}}{F(0) - 2\sqrt{b(a-c)}}, & c < a, \quad F(0) > 2\sqrt{b(a-c)}. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, поскольку не существует решения на интервале, не существует решения задачи Коши.

Теперь рассмотрим начально-краевую задачу с достаточно гладкими условиями, приводящими к разрушению локального решения уравнения (1) за конечное время. Поставим в прямоугольнике $G = \{(t, x) : 0 < t < T, 0 < x < L\}$ специальную начально-краевую задачу с полным набором граничных условий:

$$\begin{aligned} (u - u_{xx})_t + u_{xxx} + uu_x &= g(t, x + t), \\ u(0, x) &= U_0(x) - 1, \\ u(t, -t) = F_0(t) - 1, \quad u_x(t, -t) &= F_1(t), \quad u_{xx}(t, -t) = F_2(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В разделе 1 и на примере задачи Коши мы показали, что при исследовании эффекта разрушения для процессов в полупроводниках применим метод нелинейной емкости Похожаева. Мы не заостряли наше внимание на конкретном виде уравнения (1), так как применимость этого метода весьма широка. Далее мы преобразуем нашу задачу к виду, более удобному для анализа. С учетом результатов работы [8], которая посвящена бегущим волнам в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией, разумно сделать замену $(t, x) \rightarrow (t, y = x + t)$ и положить $f = u + 1$. Тогда (11) переходит в следующую задачу в области $G' = \{(t, y) : 0 < t < T, 0 < y < L\}$:

$$\begin{aligned} f_t - f_{yyt} + ff_y &= g(t, y), \\ f(0, y) &= U_0(y), \\ f(t, 0) = F_0(t), \quad f_y(t, 0) &= F_1(t), \quad f_{yy}(t, 0) = F_2(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Возьмем пробную функцию с определенными в предыдущем разделе свойствами. Действуя аналогично, можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \overline{K}(f, \varphi) - \int_{G'} f(\varphi_t - \varphi_{yyt}) dy dt - \int_0^L U_0(\varphi - \varphi_{yy}) dy - \\ - \int_{G'} g(t, y) \varphi dy dt = \frac{1}{2} \int_{G'} f^2 \varphi_y dy dt, \end{aligned}$$

где

$$\overline{K}(f, \varphi) = \left[f_{0y} \varphi_0 - f_0 \varphi_y(0, y) + \int_0^T \left(\frac{1}{2} f^2 \varphi - f \varphi_{yt} + f_y \varphi_t \right) dt \right]_0^L.$$

Используя неравенство Юнга, нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{G'} f^2 \varphi_y dy dt &\leq \overline{K}(f, \varphi) - \int_0^L U_0(\varphi(0, y) - \varphi_{yy}(0, y)) dy + \\ &+ \int_{G'} \frac{(\varphi_t - \varphi_{yyt})^2}{\varphi_y} dy dt - \int_{G'} g(t, y) \varphi dy dt. \end{aligned}$$

Наложим на пробную функцию дополнительные условия на границе: пусть

$$\varphi(t, L) = \varphi_y(t, L) = 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, T). \quad (14)$$

Тогда для граничного оператора имеем

$$\overline{K}(f, \varphi) = \int_0^T \left(F_1'(t) \varphi(t, 0) - F_0'(t) \varphi_y(t, 0) - \frac{1}{2} F_0^2 \varphi(t, 0) \right) dt.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для данных задачи (13) существует пробная функция, удовлетворяющая условиям (4), (14), такая что

$$\begin{aligned} \int_0^L U_0(\varphi(0, y) - \varphi_{yy}(0, y)) dy + \int_{G'} g(t, y) \varphi(t, y) dy dt &> \\ > \overline{K}(f, \varphi) + \int_{G'} \frac{(\varphi_t - \varphi_{yyt})^2}{\varphi_y} dy dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда задача (13) не имеет решения в области $G' = \{(t, y) : 0 < t < T, 0 < y < L\}$.

Разберем специальный пример, в котором пробная функция имеет вид

$$\varphi(t, x) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \left(\frac{y}{L} - 1\right)^3.$$

Далее мы будем использовать переменные $\tau = t/T$, $\xi = y/L$. Для указанной пробной функции неравенство (15) записывается как

$$\begin{aligned} L \int_0^1 U_0(L\xi) \left((\xi - 1)^3 - \frac{6}{L^2} (\xi - 1) \right) d\xi + TL \int_0^1 \int_0^1 g(T\tau, L\xi) (\tau - 1)^2 (\xi - 1)^3 d\tau d\xi &> \\ > T \int_0^1 \left(F_1' - \frac{3}{L} F_0' - \frac{1}{2} F_0^2 \right) (\tau - 1)^2 d\tau + \frac{4L^2}{3T} \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{L^2} + \frac{36}{L^4} \right). \end{aligned}$$

Мы можем взять $T = L^n$, где $n > 1$, тогда получаем, что при “однородных” граничных условиях справедливы неравенства $g(t, x) \leq 0$, $F_1' \leq 3F_0'/L + F_0^2/2$, и начально-краевая задача (13) не имеет решения в квадрате $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ при условии

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^1 U_0(L\xi) \left((\xi - 1)^3 - \frac{6}{L^2} (\xi - 1) \right) d\xi > 0. \quad (16)$$

Наконец, сравним полученный результат с тем фактом, что у задачи (12) отсутствует стационарное решение $w(x)$, для которого $ww_y = g(y)$ при $y > 0$ и $w(0) = w_0$. Действительно, решение этой задачи, определяющееся формулой

$$w^2(y) = 2 \int_0^y g(z) dz + w_0^2,$$

не существует на интервале $y \in (0, L)$, если

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} L \int_0^1 g(L\xi) d\xi < -\frac{w_0^2}{2}. \quad (17)$$

Поскольку $u_0(y)$ удовлетворяет системе (13) при $g(x) = g(x, t)$, из условия (17) можно получить условие для функции $u_0(y)$, аналогичное (16).

4. АВТОМОДЕЛЬНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ

Хорошо известно, что одним из мощных средств описания сингулярных решений является построение соответствующих автомодельных решений. Опишем один класс сингулярных решений задачи (1), разрушающихся за конечное время. Чтобы построить разрушающееся автомодельное решение, воспользуемся упрощенным уравнением задачи (13):

$$f_t - f_{yyt} + f f_y = 0. \quad (18)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что одним из решений этого уравнения является $f(y, t) = w(y)/(T - t)$, где T – время разрушения, а $w(y)$ – решение уравнения $w_{yy} = w + ww_y$. Сделаем замену переменных $v(w) = w'_y$ и $z = w^2$, тогда получим уравнение $vv'_z = 1 + v$, которое представляет собой уравнение Абеля второго рода с решением $z = v - \ln |v + 1| + C$. Возвращаясь к функции w , имеем $w^2 = w'_y - \ln |w'_y + 1| + C$.

Более общим характерным случаем является решение уравнения (17) вида

$$f(y, t) = \frac{1}{T - t} F(y + a \ln(T - t)),$$

где функция $F(y + a \ln(T - t)) = F(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$F_{\xi\xi} + F_{\xi\xi\xi} = F + F_{\xi} + FF_{\xi}.$$

Если записать решение в переменных x, t ,

$$u(x, t) = 1 + \frac{1}{T - t} w(x + t), \quad (19)$$

то мы получим бегущую волну с амплитудой, обращающейся в бесконечность при $t \rightarrow T$. Бегущие волны как решения уравнения (1) рассмотрены в работах [9], [10].

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность М. О. Корпусову за неоценимую помощь в работе и полезное обсуждение полученных результатов. Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [2] С. А. Габов, *Введение в теорию нелинейных волн*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [4] С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортевега–де Фриза”, *Уравнения в частных производных*, Современная математика. Фундаментальные направления, **39**, РУДН, М., 2011, 141–150.
- [5] С. И. Похожаев, *Докл. РАН*, **435**:4 (2010), 460–462.
- [6] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. VIII: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.
- [8] Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Наука, М., 1969.
- [9] А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Е. В. Юшков, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 808–812.
- [10] J. Lenells, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11**:4 (2004), 508–520.

Поступила в редакцию 26.09.2011