Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 355–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:37:47

© 2012 г. В. Э. Адлер*, В. Г. Марихин*, А. Б. Шабат*[†]

КВАНТОВЫЕ ВОЛЧКИ КАК ПРИМЕРЫ КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены квантовые аналоги волчков на алгебрах Ли $so(4)$ и $e(3)$ в представлении дифференциальными операторами.

Ключевые слова: квантование, интегрируемый волчок, операторная алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Коммутативные кольца дифференциальных операторов играют важную роль в математической физике. В случае одной независимой переменной задача их описания была поставлена и решена в работах [1] и [2]. Позднее эти результаты нашли многочисленные приложения в теории интегрируемых уравнений типа Кортевега–де Фриза, отметим описание конечнозонных операторов, полученное в работах [3], [4], и алгоритм проверки необходимых условий интегрируемости из работы [5].

В случае двух независимых переменных возможны обобщения в разных направлениях. Вообще говоря, задача о паре коммутирующих операторов $[\hat{H}, \hat{K}] = 0$ поставлена недостаточно жестко, и возникает вопрос о выборе дополнительных ограничений. Кроме условий, диктуемых внутренней логикой задачи (например, условием коммутативности тройки операторов), имеет смысл выделять классы операторов, важных с точки зрения приложений. Здесь мы рассмотрим один такой класс, связанный с квантовыми волчками на $so(4)$ и $e(3)$. Соответствующий оператор $\hat{H}$ имеет весьма специальный вид:

$$\hat{H} = a(x)D_x^2 + 2f(x, y)D_xD_y + b(y)D_y^2 + \dots, \quad (1)$$

где $a(x), b(y)$ – многочлены четвертой степени, $f(x, y)$ – биквадратичный многочлен, многоточие обозначает младшие члены также со специальными коэффициентами.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: adler@itp.ac.ru

[†]Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Карачаевск, Россия

Такой вид следует из того, что в генераторах алгебры Ли гамильтониан квадратичен; например, на $so(4)$ имеем

$$\hat{H} = (\hat{U}, A\hat{U}) + (\hat{V}, B\hat{V}) + 2(\hat{U}, F\hat{V}) + (\vec{c}, \hat{U}) + (\vec{d}, \hat{V}),$$

и при переходе к дифференциальному представлению генераторы U, V заменяются дифференциальными операторами первого порядка с квадратичными коэффициентами (см. формулы (8), (10) ниже).

В известных примерах порядок оператора $\hat{K}$ не превосходит 4, причем степень коэффициентов, соответственно, не превосходит 8. В исходном классическом варианте задачи вместо коммутирующих дифференциальных операторов рассматриваются гамильтонианы в инволюции относительно скобки Пуассона–Дарбу, полиномиальные по импульсам. При этом условия “коммутирования в главном” [6], т. е. сокращения старших членов в коммутаторе, совпадают в классическом и квантовом случаях. Подробнее эта связь поясняется схемой

$$\begin{array}{ccc} \{H, K\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование на алгебре Ли}} & [\hat{H}, \hat{K}] = 0 \\ R^* \downarrow & & \downarrow \hat{R}^* \\ \{H_D, K_D\} = 0 & \xrightarrow{\text{квантование в переменных Дарбу}} & [\hat{H}_D, \hat{K}_D] = 0 \end{array} \quad (2)$$

Здесь R обозначает представление скобки Ли–Пуассона в переменных Дарбу, H_D – образ гамильтониана H при двойственном отображении, т. е. $H_D = R^*(H) = H \circ R$. Аналогично, $\hat{R}$ обозначает представление алгебры Ли дифференциальными операторами, и $\hat{H}_D = \hat{R}^*(\hat{H}) = \hat{H} \circ \hat{R}$. Горизонтальные стрелки отвечают переходу от скобки Ли–Пуассона к коммутатору на алгебре Ли и переходу от скобки Пуассона–Дарбу к алгебре Гейзенберга $\{p_i, x_i\} = \delta_{ij} \rightarrow [D_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}$. На обоих уровнях этот переход осуществляется при помощи подходящего упорядочения в мономах гамильтонианов H, K , что равносильно добавлению младших членов (“квантовых поправок”).

Напомним, что описание классических волчков, допускающих дополнительный интеграл, до сих пор остается открытой задачей. Для случая алгебры $so(4)$ в работе [7] получены необходимые условия, выделяющие некоторые многообразия в пространстве параметров (уточненный результат см. в статье [8]). Однако в известных примерах число параметров по крайней мере на единицу меньше размерности этих многообразий. Некоторые классификационные результаты приводятся в статье [9]. Можно ли продвинуться в этой задаче, точнее, в ее квантовой версии, используя перевод на язык дифференциальных операторов? В настоящей работе в качестве первого шага мы строим дифференциальные операторы, отвечающие некоторым наиболее важным примерам. В частности, они подсказывают, что, по-видимому, простейшим необходимым условием интегрируемости служит факторизуемость дискриминанта оператора главной части $\hat{H}$:

$$f^2(x, y) - a(x)b(y) = w(x, y)\tilde{w}(x, y) \quad (3)$$

с некоторыми многочленами $w, \tilde{w}$. В конце статьи мы докажем это свойство с помощью теста Пенлеве. Отметим, что формула (3) оказывается важной при рассмотрении вопроса о разделении переменных [10].

С вычислительной точки зрения переход к дифференциальному представлению имеет то преимущество, что снимает вопросы о выборе упорядочения в операторной алгебре и учете операторов Казимира. Отметим, что представление $\hat{R}$ определено на фиксированной поверхности уровня операторов Казимира, значения которых входят в $\hat{H}_D, \hat{K}_D$ как независимые параметры (их число равно рангу алгебры Ли, т. е. двум в случае алгебр $so(4)$ и $e(3)$). Расщепление коммутационного соотношения по этим параметрам облегчает анализ.

Опишем кратко содержание настоящей работы. В разделе 2 рассматривается случай алгебры $so(4)$: волчки Шоттки–Манакова [11], [12], Стеклова [13], М. Адлера–ван Мёрбеке [14], [8] и Соколова [15]. Квантование волчка Шоттки–Манакова рассматривалось в работе [16]. Случай волчков М. Адлера–ван Мёрбеке и Соколова более сложны (оператор $\hat{K}$ имеет четвертый порядок), и, по-видимому, квантование для них получено впервые. В разделе 3 рассматриваются волчки на алгебре $e(3)$: волчки Клебша [17], Ковалевской [18] (квантование восходит к работе Лапорта [19]), гиростат Ковалевской и случай Горячёва–Чаплыгина. Для моделей на $e(3)$ квантование достаточно хорошо изучено в работах [20]–[24].

Разумеется, перечисленные волчки не исчерпывают все известные случаи. Изложение имеющихся результатов и подробную библиографию можно найти в книге [25]. Имеется также множество работ, в которых развиваются другие направления в задаче о коммутирующих дифференциальных операторах, упомянем лишь статьи [26], [27].

Обозначения. Для удобства положим $x = x_1, y = x_2$. При определении скобок Пуассона и коммутаторов нулевые скобки не приводятся. Индексы i, j, k всегда обозначают произвольную перестановку чисел 1, 2, 3. Мнимая единица обозначается через i . Используются обозначения $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Для компактной записи гамильтонианов в переменных Дарбу часто используются следующие многочлены:

$$\begin{aligned} W(a, b, c; x, y) &= a(x^2 - 1)(y^2 - 1) - b(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4cxy, \\ R(a, b, c; x) &= W(a, b, c; x, x) = (a - b)(x^4 + 1) + 2(2c - a - b)x^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что оператор $W(a, b, c; x, y)D_x D_y$ сохраняет свою форму при инверсии $x \rightarrow 1/x, y \rightarrow 1/y$.

2. ВОЛЧКИ НА $SO(4) \simeq SO(3) \oplus SO(3)$

2.1. Координаты Дарбу и операторное представление. Скобка Ли–Пуассона на $so(3)$ и ее функция Казимира определяются соотношениями

$$\{U_i, U_j\} = i\varepsilon_{ijk}U_k, \quad (U, U) = s_1^2, \quad (5)$$

где U обозначает вектор (U_1, U_2, U_3) . Представление в координатах Дарбу задается формулами

$$U_1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)p_1 + s_1x, \quad U_2 = -\frac{i}{2}(x^2 + 1)p_1 + is_1x, \quad U_3 = -xp_1 + s_1. \quad (6)$$

При квантовании мы переходим к операторной алгебре

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = j_1(j_1 + 1), \quad (7)$$

допускающей представление дифференциальными операторами

$$\widehat{U}_1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)D_x + j_1x, \quad \widehat{U}_2 = -\frac{i}{2}(x^2 + 1)D_x + ij_1x, \quad \widehat{U}_3 = -xD_x + j_1. \quad (8)$$

Алгебра Ли $so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$ реализуется как прямая сумма алгебры $so(3)$ и ее дубля, в котором сделаны переобозначения

$$U \rightarrow V, \quad x \rightarrow y, \quad p_1 \rightarrow p_2, \quad s_1 \rightarrow s_2, \quad \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}, \quad D_x \rightarrow D_y, \quad j_1 \rightarrow j_2.$$

Волчки на $so(4)$ определяются гамильтонианом общего вида

$$\widehat{H} = (U, AU) + (V, BV) + (U, FV) + (\vec{c}, U) + (\vec{d}, V). \quad (9)$$

Матрицы A и B можно считать диагональными без потери общности. При переходе к представлению (8) возникает дифференциальный оператор специального вида:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_D = & a(x)D_x^2 + f(x, y)D_xD_y + b(y)D_y^2 - \left(\frac{2j_1 - 1}{2}a'(x) + 2c(x) + j_2f_y(x, y) \right) D_x - \\ & - \left(\frac{2j_2 - 1}{2}b'(y) + 2d(y) + j_1f_x(x, y) \right) D_y + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6}a''(x) + \\ & + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6}b''(y) + 2j_1c'(x) + 2j_2d'(y) + j_1j_2f_{xy}(x, y) + \kappa, \end{aligned} \quad (10)$$

где κ — произвольная постоянная и

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0(x^4 + 1) + a_2x^2, & b(y) &= b_0(y^4 + 1) + b_2y^2, \\ c(x) &= c_2x^2 + c_1x + c_0, & d(y) &= d_2y^2 + d_1y + d_0, \\ f(x, y) &= f_{22}x^2y^2 + \dots + f_{00}. \end{aligned}$$

Формулы перехода от представления (10) к (9) записываются как

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(2a_0, -2a_0, a_2) + \alpha I, & B &= \text{diag}(2b_0, -2b_0, b_2) + \beta I, \\ \vec{c} &= 2(c_2 - c_0, -i(c_2 + c_0), c_1), & \vec{d} &= 2(d_2 - d_0, -i(d_2 + d_0), d_1), \\ F &= \begin{pmatrix} f_{00} - f_{02} - f_{20} + f_{22} & i(f_{00} + f_{02} - f_{20} - f_{22}) & f_{21} - f_{01} \\ i(f_{00} - f_{02} + f_{20} - f_{22}) & -f_{00} - f_{02} - f_{20} - f_{22} & -i(f_{21} + f_{01}) \\ f_{12} - f_{10} & -i(f_{12} + f_{10}) & f_{11} \end{pmatrix}, \\ 3\kappa &= (3\alpha + a_2)j_1(j_1 + 1) + (3\beta + b_2)j_2(j_2 + 1), \end{aligned}$$

где α, β — произвольные постоянные.

В качестве замечания, полезного при вычислении спектров, поясним связь дифференциального представления (8) и известного матричного представления (см. учебник [28], с. 113)

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 \pm i\widehat{U}_2 &= \widehat{U}_{\pm}, & \widehat{U}_3|m, j\rangle &= m|m, j\rangle, \\ \widehat{U}_+|m, j\rangle &= \sqrt{(j - m)(j + m + 1)}|m + 1, j\rangle, \\ \widehat{U}_-|m, j\rangle &= \sqrt{(j + m)(j - m + 1)}|m - 1, j\rangle. \end{aligned}$$

В физическом случае рассматривается орбита $j = \text{const}$, причем j, m – целые или полуцелые числа одновременно, а m принимает значения от $-j$ до j , что отвечает матрицам конечного размера $(2j + 1) \times (2j + 1)$. Формально от этих ограничений можно отказаться и рассматривать бесконечные трехдиагональные матрицы, которые интерпретируются как разностные операторы

$$a(m)T_m + b(m) + c(m)T_m^{-1},$$

где $T_m: m \mapsto m + 1$ – оператор сдвига (матрица с одной нижней поддиагональю, состоящей из единиц). От радикалов можно избавиться, если взять сопряжение $\hat{A} \rightarrow f^{-1}\hat{A}f$, что дает представление алгебры $so(3)$ в операторах сдвига:

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= -\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1}, \\ \hat{U}_2 &= -i\left(\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1}\right), \\ \hat{U}_3 &= m.\end{aligned}\tag{11}$$

Еще одно разностное представление можно получить напрямую из соотношений (8), делая замены (“преобразование Фурье”) $D_x \rightarrow mT_m$, $x \rightarrow T_m^{-1}$, которые не меняют алгебру Гейзенберга $[D_x, x] = 1$, $[mT_m, T_m^{-1}] = 1$ и приводят к операторам

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= \frac{m}{2}T_m + \left(j+1 - \frac{m}{2}\right)T_m^{-1}, \\ \hat{U}_2 &= -i\frac{m}{2}T_m + i\left(j+1 - \frac{m}{2}\right)T_m^{-1}, \\ \hat{U}_3 &= j - m + 1.\end{aligned}\tag{12}$$

Можно проверить, что представления (11) и (12) эквивалентны с точностью до некоторого линейного преобразования из $SO(3)$ и сопряжения с помощью оператора $g(m)T^{-j-1}$, в котором функция g удовлетворяет соотношению

$$\frac{g(m+2)}{g(m+1)} = 2j - m.$$

2.2. Волчок Шоттки–Манакова. Коммутирующие операторы имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\alpha_1^2\hat{U}_1^2 - \alpha_2^2\hat{U}_2^2 - \alpha_3^2\hat{U}_3^2 - \alpha_1^2\hat{V}_1^2 - \alpha_2^2\hat{V}_2^2 - \alpha_3^2\hat{V}_3^2 + \\ &\quad + 2\alpha_2\alpha_3\hat{U}_1\hat{V}_1 + 2\alpha_3\alpha_1\hat{U}_2\hat{V}_2 + 2\alpha_1\alpha_2\hat{U}_3\hat{V}_3, \\ \hat{K} &= \alpha_1\hat{U}_1\hat{V}_1 + \alpha_2\hat{U}_2\hat{V}_2 + \alpha_3\hat{U}_3\hat{V}_3.\end{aligned}$$

Они получаются из классических гамильтонианов в инволюции при простой замене $U \rightarrow \hat{U}$, $V \rightarrow \hat{V}$, поскольку в данном случае нет проблемы нормального упорядочения (каждый моном содержит только коммутирующие переменные). В отличие от некоторых других примеров (волчки Стеклова, Ковалевской), добавка линейных членов к гамильтонианам здесь невозможна как в классическом, так и в квантовом

случаях, что можно проверить прямым вычислением с неопределенными коэффициентами. Применяя отображение (8), получаем следующую пару коммутирующих дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} 4\hat{H}_D = & r(x)D_x^2 + 2zD_xD_y + r(y)D_y^2 - \\ & - \left(\frac{2j_1-1}{2}r'(x) + 2j_2z_y \right) D_x - \left(\frac{2j_2-1}{2}r'(y) + 2j_1z_x \right) D_y + \\ & + 2j_1j_2z_{xy} + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r''(y) - \\ & - \frac{4}{3}(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1))(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$4\hat{K}_D = wD_xD_y - j_2w_yD_x - j_1w_xD_y + j_1j_2w_{xy}, \quad (14)$$

где

$$r(x) = -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; x),$$

$$z = z(x, y) = W(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2; x, y), \quad w = w(x, y) = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y)$$

с использованием обозначений (4). Постоянное последнее слагаемое в правой части равенства (13) (постоянная κ в формуле (10)) не влияет на коммутативность и определяет сдвиг энергии основного состояния системы.

Операторы (13), (14) можно получить и другим способом, при другом обходе диаграммы (2). Для этого следует сначала перейти к переменным Дарбу в классических гамильтонианах H, K согласно формулам (6), что дает

$$\begin{aligned} 4H_D = & r(x)p_1^2 + 2zp_1p_2 + r(y)p_2^2 - (s_1r'(x) + 2s_2z_y)p_1 - (s_2r'(y) + 2s_1z_x)p_2 + \\ & + 2s_1s_2z_{xy} + \frac{s_1^2}{3}r''(x) + \frac{s_2^2}{3}r''(y) - \frac{4}{3}(s_1^2 + s_2^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \\ 4K_D = & wp_1p_2 - s_2w_y p_1 - s_1w_x p_2 + s_1s_2w_{xy}, \end{aligned}$$

где r, z, w заданы теми же формулами, что и раньше. Далее следует сделать замену p_i на D_{x_i} в квадратичных членах, а младшие члены взять с неопределенными коэффициентами (с сохранением степени по переменным x, y). Таким образом, мы ищем коммутирующие дифференциальные операторы в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_D = & r(x)D_x^2 + 2z(x, y)D_xD_y + r(y)D_y^2 + a(\overset{3}{x}, \overset{1}{y})D_x + b(\overset{1}{x}, \overset{3}{y})D_y + c(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}), \\ \hat{K}_D = & w(x, y)D_xD_y + f(\overset{2}{x}, \overset{1}{y})D_x + g(\overset{1}{x}, \overset{2}{y})D_y + h(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}), \end{aligned}$$

где r, z, w заданы, a, b, c, f, g, h – многочлены с неопределенными коэффициентами, число над аргументом указывает степень многочлена по соответствующей переменной. В результате возникает довольно громоздкая система уравнений, но при помощи компьютерной алгебры она легко решается, и вновь получается ответ (13), (14). Таким образом, оба способа квантования оказываются эквивалентными, как и следовало ожидать. С вычислительной точки зрения в ситуации, когда требуется найти $\hat{K}$ по заданному $\hat{H}$, каждый способ имеет свои преимущества и недостатки. Использование генераторов алгебры Ли приводит к более простой системе уравнений для

коэффициентов, но сложнее реализуется, поскольку необходимо работать с некоммутативными переменными. Дифференциальное представление дает более гибкий и универсальный язык, но приводит к несколько более громоздким уравнениям для коэффициентов операторов.

2.3. Волчок Стеклова. Классические гамильтонианы имеют вид ($\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$)

$$H = -\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} U_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} U_2^2 + \frac{1}{\alpha_3^2} U_3^2 \right) + 2\alpha(\alpha_1 U_1 V_1 + \alpha_2 U_2 V_2 + \alpha_3 U_3 V_3),$$

$$K = 2\alpha \left(\frac{1}{\alpha_1} U_1 V_1 + \frac{1}{\alpha_2} U_2 V_2 + \frac{1}{\alpha_3} U_3 V_3 \right) - \alpha_1^2 V_1^2 - \alpha_2^2 V_2^2 - \alpha_3^2 V_3^2.$$

Как и в предыдущем примере, проблемы упорядочения нет, и коммутирующие квантовые гамильтонианы получаются просто заменой U, V на $\hat{U}, \hat{V}$. Нетрудно проверить, что и в классическом, и в квантовом случаях к гамильтонианам можно добавить линейные члены,

$$H \rightarrow H - \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 U_1 - \beta_2 \alpha_1 \alpha_3 U_2 - \beta_3 \alpha_1 \alpha_2 U_3,$$

$$K \rightarrow K + \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 V_3$$

с произвольными β_i . Однако далее для простоты мы будем считать, что $\beta_i = 0$.

Переходя к дифференциальным операторам, получаем

$$4\hat{H}_D = r_1 D_x^2 + 2z D_x D_y - \left(\frac{2j_1 - 1}{2} r_1' + 2j_2 z_y \right) D_x - 2j_1 z_x D_y +$$

$$+ 2j_1 j_2 z_{xy} + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6} r_1'' - \frac{4}{3} j_1(j_1 + 1)(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2),$$

$$4\hat{K}_D = 2w D_x D_y + r_2 D_y^2 - 2j_2 w_y D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2} r_2' + 2j_1 w_x \right) D_y +$$

$$+ 2j_1 j_2 w_{xy} + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6} r_2'' - \frac{4}{3} j_2(j_2 + 1)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

где

$$r_1 = r_1(x) = -R(\alpha_2^2 \alpha_3^2, \alpha_3^2 \alpha_1^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2; x), \quad r_2 = r_2(y) = -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; y),$$

$$z = z(x, y) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y),$$

$$w = w(x, y) = W(\alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2; x, y).$$

Эти же операторы получаются при квантовании в переменных Дарбу для гамильтонианов

$$4H_D = r_1 p_1^2 + 2z p_1 p_2 - (s_1 r_1' + 2s_2 z_y) p_1 - 2s_1 z_x p_2 +$$

$$+ 2s_1 s_2 z_{xy} + \frac{s_1^2}{3} r_1'' - \frac{4}{3} s_1^2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2),$$

$$4K_D = 2w p_1 p_2 + r_2 p_2^2 - 2s_2 w_y p_1 - (s_2 r_2' + 2s_1 w_x) p_2 +$$

$$+ 2s_1 s_2 w_{xy} + \frac{s_2^2}{3} r_2'' - \frac{4}{3} s_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

2.4. Волчок М. Адлера–ван Мёрбеке. Классические гамильтонианы имеют следующий вид (параметры связаны соотношением $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$):

$$H = \sum_{i=1}^3 (-9\lambda_j^2 \lambda_k^2 U_i^2 + 6\lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i) U_i V_i + \lambda_j \lambda_k (4\lambda_i^2 - \lambda_j \lambda_k) V_i^2), \quad (15)$$

$$K = 3 \sum_{i,j} \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) U_i V_i V_j^2 + \sum_i (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) U_i V_i^3 - \\ - 9 \sum_l U_l^2 \sum_i \lambda_j \lambda_k U_i V_i + \frac{3}{2} \sum_l U_l^2 \sum_i (3\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \lambda_k^2) V_i^2. \quad (16)$$

Квантовый гамильтониан $\hat{H}$ получается заменой U, V на $\hat{U}, \hat{V}$. Однако в гамильтониане $\hat{K}$ имеются мономы с некоммутирующими генераторами, и возникает проблема нормального упорядочения. В результате прямых вычислений с неопределенными коэффициентами для $\hat{K}$ получается выражение

$$\hat{K} = \sum_{i,j} \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) (\hat{U}_i \hat{V}_i \hat{V}_j^2 + \hat{U}_i \hat{V}_j \hat{V}_i \hat{V}_j + \hat{U}_i \hat{V}_j^2 \hat{V}_i) + \sum_i (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) \hat{U}_i \hat{V}_i^3 - \\ - 9 \left(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{1}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \hat{U}_i \hat{V}_i + \frac{3}{2} \sum_l \hat{U}_l^2 \sum_i (3\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \lambda_k^2) \hat{V}_i^2. \quad (17)$$

Таким образом, квантовый гамильтониан отличается от классического упорядочением в первой сумме и квантовой поправкой в третьей сумме (напомним, что $\sum_l \hat{U}_l^2$ является функцией Казимира).

Переходя к дифференциальным операторам, для $\hat{H}_D$ получаем следующее выражение по общей формуле (10):

$$4\hat{H}_D = r_1(x) D_x^2 + 2z D_x D_y + r_2(y) D_y^2 - \\ - \left(\frac{2j_1 - 1}{2} r_1'(x) + 2j_2 z_y \right) D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2} r_2'(y) + 2j_1 z_x \right) D_y + \\ + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6} r_1''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6} r_2''(y) + \\ + 2j_1 j_2 z_{xy} - \frac{4}{3} (9j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1)) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)^2,$$

где

$$r_1(x) = -9R(\lambda_2^2 \lambda_3^2, \lambda_3^2 \lambda_1^2, \lambda_1^2 \lambda_2^2, x), \quad r_2(x) = \frac{1}{9} r_1(x) + 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x), \\ z = z(x, y) = 3W(\mu_1, \mu_2, \mu_3, x, y), \quad \mu_i = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2).$$

Оператор $\hat{K}_D$ имеет достаточно простую структуру:

$$4\hat{K}_D = g^2 D_x D_y^3 + c_1 g g_y D_x D_y^2 + c_2 g g_x D_y^3 + \\ + (c_3 g g_{yy} + c_4 g_y^2) D_x D_y + (c_5 g_y g_x + c_6 g g_{xy}) D_y^2 + \\ + (c_7 g g_{yy} + c_8 g_y g_{yy}) D_x + (c_9 g_{yy} g_x + c_{10} g_y g_{xy} + c_{11} g g_{xy}) D_y + \\ + c_{12} g_{yyy} g_x + c_{13} g_{yy} g_{xy} + c_{14} g_y g_{xy} + c_{15} g g_{yyy},$$

хотя коэффициенты и являются весьма громоздкими. Здесь

$$g = (\lambda_1 - \lambda_2)(xy^3 + 1) + 3\lambda_3(x + y)y$$

есть многочлен, связанный с коэффициентами $\hat{H}_D$ соотношением

$$z^2 - r_1(x)r_2(y) = 36\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)g\tilde{g},$$

где $\tilde{g} = (\lambda_1 - \lambda_2)x(x + y) - \lambda_3(x^3y + 1)$. Коэффициенты c_i , в свою очередь, являются многочленами от параметров j_1, j_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= -2(j_2 - 1), & c_2 &= -2j_1, \\ c_3 &= \frac{1}{2}(3j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 - 3) + 2), & c_4 &= -j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 - 1), \\ c_5 &= 2j_1(j_1 + j_2), & c_6 &= -2j_1(j_1 - j_2 + 2), \\ c_7 &= -\frac{j_2}{6}(9j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 3) + 4), & c_8 &= \frac{j_2}{2}(j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 - 1)), \\ c_9 &= -\frac{j_1}{2}(3j_1^2 + 4j_1j_2 + j_2^2 + j_1 + j_2), & c_{10} &= 2j_1(j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 - 1)), \\ c_{11} &= -\frac{j_1}{2}(3j_1^2 - 4j_1j_2 + j_2^2 + 5j_1 - 7j_2 + 4), \\ c_{12} &= \frac{j_1j_2}{6}(9j_1^2 + 3j_1j_2 - j_2^2 + 6j_1 + 1), \\ c_{13} &= \frac{j_1j_2}{6}(-3j_1^2 + 5j_1j_2 + 3j_2^2 - 4j_1 + 2j_2 - 1), \\ c_{14} &= \frac{j_1j_2}{6}(-3j_1^2 - 5j_1j_2 + 3j_2^2 - 2j_1 - 8j_2 + 1), \\ c_{15} &= \frac{j_1j_2}{6}(9j_1^2 - 3j_1j_2 - j_2^2 + 12j_1 - 6j_2 + 7). \end{aligned}$$

2.5. Волчок Соколова. В этом примере удобно использовать обозначения $m_i = U_i + V_i$ и $n_i = U_i - V_i$. Волчок Соколова на $so(4)$ определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + m_3^2 + m_3(\alpha n_1 + \beta n_2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)n_3^2, \quad (18)$$

и дополнительный интеграл четвертой степени имеет вид

$$\begin{aligned} K &= m_3^2(2H - m_3^2 + (\beta m_1 - \alpha m_2)^2 + (\alpha n_1 + \beta n_2)^2) + \\ &+ 2m_3(\alpha m_1 + \beta m_2 - (\alpha^2 + \beta^2)n_3)(m_1n_1 + m_2n_2). \end{aligned}$$

Квантовый гамильтониан получается при симметризации некоммутативных мономов:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{m}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 + [\hat{m}_3, \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2]^+ - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\hat{n}_3^2,$$

где $[a, b]^+ = (ab + ba)/2$. Оператор $\hat{K}$ также получается при симметризации со специально подобранными весовыми коэффициентами. Следует отметить, что в алгебре $so(4)$ имеются однородные многочлены, тождественно равные нулю по модулю коммутационных соотношений, поэтому запись оператора $\hat{K}$ неединственна, и ее можно

пытаться упростить путем добавления таких выражений. Мы приведем один из возможных вариантов. Введем обозначения

$$A_{a,b,c}(m, f) = amf^2m + b[m^2, f^2]^+ + c[f, mfm]^+(1 - a - b - c)fm^2f, \\ B(m, f, g) = mfg + gfm,$$

тогда оператор

$$\hat{K} = A_{1/2,0,3/4}(\hat{m}_3, \hat{m}_1) + A_{1/2,0,3/4}(\hat{m}_3, \hat{m}_2) - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{m}_3^2\hat{n}_3^2 + \\ + A_{1/2,1/4,1}(\hat{m}_3, \beta\hat{m}_1 - \alpha\hat{m}_2) + A_{-3/4,-1,7/2}(\hat{m}_3, \hat{m}_3 + \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2) + \\ + B(\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2 - (\alpha^2 + \beta^2)\hat{n}_3, \hat{m}_1\hat{n}_1 + \hat{m}_2\hat{n}_2) - \frac{1}{2}[\hat{m}_3\hat{n}_3, [\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2]]$$

коммутирует с $\hat{H}$ и совпадает с K при переходе к коммутирующим переменным.

Представление алгебры $so(4)$ дифференциальными операторами в этом примере удобно слегка изменить, сделав дополнительно замену $y \rightarrow -y$, $D_y \rightarrow -D_y$, после чего ответ становится симметричным по переменным x, y . Введем обозначения (параметры α, β , вообще говоря, комплексные)

$$\xi_1 = \alpha + i\beta, \quad \xi_2 = -\alpha + i\beta, \quad r(x) = x(\xi_1 x + 1)(x + \xi_2), \\ z = z(x, y) = \xi_1 xy(x + y) + (x + y)^2 + 2(1 - \xi_1 \xi_2)xy + \xi_2(x + y),$$

тогда $\hat{H}$ записывается в виде (10):

$$2\hat{H}_D = r(x)D_x^2 + zD_xD_y + r(y)D_y^2 - \\ - \left(\frac{2j_1 - 1}{2}r'(x) + j_2z_y \right)D_x - \left(\frac{2j_2 - 1}{2}r'(y) + j_1z_x \right)D_y + \\ + \frac{j_1(2j_1 - 1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2 - 1)}{6}r''(y) + j_1j_2z_{xy} + \\ + \frac{1}{3}(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1))(\xi_1\xi_2 + 4)$$

(обратим внимание на то, что степень многочлена r равна 3, поскольку в переменных U, V гамильтониан (18) принимает вид (9) с недиагональными матрицами A, B). Второй оператор имеет слишком громоздкий вид, и мы выпишем только старшие члены:

$$\hat{K}_D = w^2(xD_x + yD_y)^2D_xD_y - 2j_2x^2ww_yD_x^3 - 2j_1y^2ww_xD_y^3 - \\ - 2xw((j_1 - 1)xw_x + (j_1 + j_2 - 1)w + (2j_2 - 1)yw_y)D_x^2D_y - \\ - 2yw((2j_1 - 1)xw_x + (j_1 + j_2 - 1)w + (j_2 - 1)yw_y)D_xD_y^2 + \dots,$$

где $w = \xi_1 xy + x + y + \xi_2$.

2.6. Классический предел. Постоянная Планка вводится путем простого растяжения генераторов, в результате коммутационные соотношения (7) заменяются на

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = \hbar^2 j_1(j_1 + 1),$$

а представление (8) – на

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1 &= \hbar \left(-\frac{1}{2}(x^2 - 1)D_x + j_1x \right), & \widehat{U}_2 &= \hbar \left(-\frac{i}{2}(x^2 + 1)D_x + ij_1x \right), \\ \widehat{U}_3 &= \hbar(-xD_x + j_1).\end{aligned}$$

Формулы для переменных V изменяются аналогично. Переход к классическому пределу для любого квантового оператора $\widehat{A}$ определяется формулой

$$A = \lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-i(p_1x + p_2y)/\hbar} \left(\widehat{A} e^{i(p_1x + p_2y)/\hbar} \right) \Big|_{j_i = s_i/\hbar},$$

причем коммутатор и функция Казимира для каждой копии алгебры $so(3)$ переходят в скобку Ли–Пуассона (5), а формулы для самих генераторов – в представление (6) через переменные Дарбу.

Если применить описанную выше процедуру к операторам $\widehat{H}_D$, $\widehat{K}_D$, то она даст те же выражения для H_D , K_D , что и непосредственный переход к переменным Дарбу в классических гамильтонианах H , K . Это гарантируется “принципом соответствия”, который является инвариантным, т.е. не зависит явно от выбора представления алгебры $so(4)$. Проверка принципа соответствия для волчков Шоттки–Манакова и Стеклова тривиальна, так как эти системы не содержат квантовых поправок. В случае волчка М. Адлера–ван Мёрбеке для корректного перехода к классическому пределу надо внести поправку в $\widehat{K}$, заменив одно из слагаемых в формуле (17):

$$\left(\sum_l \widehat{U}_l^2 + \frac{1}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \widehat{U}_i \widehat{V}_i \longrightarrow \left(\sum_l \widehat{U}_l^2 + \frac{\hbar^2}{3} \right) \sum_i \lambda_j \lambda_k \widehat{U}_i \widehat{V}_i,$$

в результате все члены станут однородны по $\hbar$, а в пределе $\hbar \rightarrow 0$ получится классический гамильтониан (16).

Следует отметить, что функции Казимира $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$ имеют квантовую природу, поскольку j_i принимают целые или полуцелые значения. При переходе к пределу $\hbar \rightarrow 0$ вводятся классические (конечные) величины $s_i = \hbar j_i$. С другой стороны, если мы имеем дело со спинами, то величины j_i конечны, а значит, $s_i \rightarrow 0$, что согласуется с тезисом о том, что спин – чисто квантовое понятие.

3. ВОЛЧКИ НА $e(3)$

3.1. Координаты Дарбу и операторные представления. Скобка Ли–Пуассона на $e(3)$ имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$$

и обладает функциями Казимира $(M, \gamma) = l$, $(\gamma, \gamma) = a^2$, где $M = (M_1, M_2, M_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Мы будем использовать следующее представление в координатах Дарбу:

$$\begin{aligned}M_1 &= -\frac{i}{2}(x^2 - 1)p_1 - \frac{i}{2}(y^2 - 1)p_2 + \frac{l}{2a}(x - y), \\ M_2 &= -\frac{1}{2}(x^2 + 1)p_1 - \frac{1}{2}(y^2 + 1)p_2 - i\frac{l}{2a}(x - y), \\ M_3 &= i(xp_1 + yp_2), \\ \gamma_1 &= a\frac{1 - xy}{x - y}, \quad \gamma_2 = ia\frac{1 + xy}{x - y}, \quad \gamma_3 = a\frac{x + y}{x - y}.\end{aligned}\tag{19}$$

Отметим также представление с вещественными координатами Дарбу [29]:

$$\begin{aligned} M_1 &= -p_1 q_1 q_2 + \frac{1}{2} p_2 (q_1^2 - q_2^2 - 1) + \frac{l q_1 (q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2a(q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_2 &= p_2 q_1 q_2 + \frac{1}{2} p_1 (q_1^2 - q_2^2 + 1) + \frac{l q_2 (q_1^2 + q_2^2 + 1)}{2a(q_1^2 + q_2^2)}, \\ M_3 &= p_1 q_2 - p_2 q_1, \\ \gamma_1 &= \frac{2a q_1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \quad \gamma_2 = \frac{2a q_2}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \quad \gamma_3 = \frac{a(q_1^2 + q_2^2 - 1)}{q_1^2 + q_2^2 + 1}. \end{aligned} \quad (20)$$

При квантовании скобка Ли–Пуассона заменяется на коммутационные соотношения алгебры $e(3)$

$$[\widehat{M}_i, \widehat{M}_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k, \quad [\widehat{M}_i, \widehat{\gamma}_j] = i\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad [\widehat{\gamma}_i, \widehat{\gamma}_j] = 0$$

с операторами Казимира

$$(\widehat{\gamma}, \widehat{M}) = l, \quad (\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}) = a^2. \quad (21)$$

Для этой операторной алгебры имеется следующее представление:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1 &= \frac{1}{2}(1 - x^2)D_x + \frac{1}{2}(1 - y^2)D_y + \frac{l}{2a}(x - y), \\ \widehat{M}_2 &= \frac{i}{2}(1 + x^2)D_x + \frac{i}{2}(1 + y^2)D_y - i\frac{l}{2a}(x - y), \\ \widehat{M}_3 &= xD_x + yD_y, \\ \widehat{\gamma}_1 &= a\frac{1 - xy}{x - y}, \quad \widehat{\gamma}_2 = ia\frac{1 + xy}{x - y}, \quad \widehat{\gamma}_3 = a\frac{x + y}{x - y}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что все операторы инвариантны относительно замены $x \leftrightarrow y$, $a \rightarrow -a$.

Матричное представление можно получить, вводя базисную волновую функцию $|\psi\rangle = |m, n\rangle = (x + y)^m (x - y)^n$. Такой выбор обусловлен знаменателем генераторов γ_i в представлении (22) и соображениями симметрии. Простые вычисления дают (здесь $M_{\pm} = M_1 \pm iM_2$, $\gamma_{\pm} = \gamma_1 \pm i\gamma_2$)

$$\begin{aligned} \widehat{M}_3 |m, n\rangle &= (m + n) |m, n\rangle, \quad \widehat{M}_- |m, n\rangle = 2m |m + 1, n - 1\rangle, \\ \widehat{M}_+ |m, n\rangle &= -\left(n + \frac{m}{2}\right) |m + 1, n\rangle - \frac{m}{2} |m - 1, n + 2\rangle + \frac{l}{a} |m, n + 1\rangle, \\ \widehat{\gamma}_3 |m, n\rangle &= a |m + 1, n - 1\rangle, \quad \widehat{\gamma}_- |m, n\rangle = 2a |m, n - 1\rangle, \\ \widehat{\gamma}_+ |m, n\rangle &= \frac{a}{2} |m, n + 1\rangle - \frac{a}{2} |m + 2, n - 1\rangle. \end{aligned}$$

При переходе к классическому пределу постоянная Планка вводится следующим образом:

$$[\widehat{M}_i, \widehat{M}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} M_k, \quad [\widehat{M}_i, \widehat{\gamma}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad [\widehat{\gamma}_i, \widehat{\gamma}_j] = 0,$$

причем операторное представление заменяется на

$$\begin{aligned}\widehat{M}_1 &= \hbar \left(\frac{1}{2}(1-x^2)D_x + \frac{1}{2}(1-y^2)D_y \right) + \frac{l}{2a}(x-y), \\ \widehat{M}_2 &= \hbar \left(\frac{i}{2}(1+x^2)D_x + \frac{i}{2}(1+y^2)D_y \right) - i\frac{l}{2a}(x-y), \\ \widehat{M}_3 &= \hbar(xD_x + yD_y), \\ \widehat{\gamma}_1 &= a\frac{1-xy}{x-y}, \quad \widehat{\gamma}_2 = ia\frac{1+xy}{x-y}, \quad \widehat{\gamma}_3 = a\frac{x+y}{x-y}.\end{aligned}$$

Переход к классическому пределу аналогичен случаю алгебры $so(4)$,

$$A = \lim_{\hbar \rightarrow 0} e^{-i(p_1x+p_2y)/\hbar} (\widehat{A} e^{i(p_1x+p_2y)/\hbar}),$$

следует отметить только, что операторы Казимира (21) являются чисто классическими. Применение данной процедуры к генераторам M_i приводит к представлению (19). В случае волчка Ковалевской эта процедура влечет изменение коэффициента в операторе $\widehat{K}$, см. формулу (26) ниже (ср. с работой [19]):

$$\widehat{K} = \frac{1}{2}(\hat{k}_+\hat{k} + \hat{k}_-\hat{k}_+) + 4\hbar^2(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2).$$

3.2. Волчок Клебша. В данном примере проблемы упорядочения нет, квантовый волчок определяется гамильтонианами

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\widehat{M}_i^2 + \lambda_i \widehat{\gamma}_i^2), \quad \widehat{K} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i \widehat{M}_i^2 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \widehat{\gamma}_i^2 \right), \quad (23)$$

где $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Переходя к представлению (22), получаем следующие коммутирующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned}2\widehat{H}_D &= -(x-y)^2 D_x D_y + \frac{l}{a}(x-y)(D_x + D_y) + \frac{a^2 z}{(x-y)^2} + a^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ 8\widehat{K}_D &= r(x)D_x^2 + 2zD_x D_y + r(y)D_y^2 + \\ &+ \left(\frac{a-l}{2a}r'(x) + \frac{l}{a}z_y \right) D_x + \left(\frac{a+l}{2a}r'(y) - \frac{l}{a}z_x \right) D_y + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{l^2}{a^2}(x-y)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{l}{a}(x^2 - y^2) + a^2 \frac{r(x)r(y) - z^2}{(x-y)^4},\end{aligned}$$

где

$$r(x) = R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x), \quad z = z(x, y) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x, y).$$

Отметим, что тождество (3) в данном случае принимает вид

$$z^2 - r(x)r(y) = 4(x-y)^4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + 4(x-y)^2 W(\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2; x, y),$$

поэтому в последнем слагаемом выражения для гамильтониана $\widehat{K}_D$ в (23) происходит частичное сокращение. Классические гамильтонианы в переменных Дарбу

имеют аналогичный вид, но коэффициенты немного изменяются:

$$\begin{aligned} 2H_D &= -(x-y)^2 p_1 p_2 + \frac{2l}{a}(x-y)(p_1 + p_2) + \frac{a^2 z}{(x-y)^2} + a^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ 8K_D &= r(x)p_1^2 + 2zp_1 p_2 + r(y)p_2^2 - \frac{l}{a}(r'(x) - 2z_y)p_1 + \frac{l}{a}(r'(y) - 2z_x)p_2 + \\ &+ 4(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{l^2}{a^2}(x-y)^2 + a^2\frac{r(x)r(y) - z^2}{(x-y)^4}. \end{aligned}$$

3.3. Волчок Ковалевской. Классический волчок определяется гамильтонианами

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) - \frac{1}{2}\gamma_1, \quad K = k_+ k_-, \quad (24)$$

где $k_{\pm} = (M_1 \pm iM_2)^2 + \gamma_1 \pm i\gamma_2$. В переменных Дарбу (19)

$$\begin{aligned} 2H &= x^2 p_1^2 + (4xy - x^2 - y^2)p_1 p_2 + y^2 p_2^2 + \frac{2l}{a}(x-y)(p_1 + p_2) + a\frac{xy-1}{x-y}, \\ K &= \left(\left(x^2 p_1 + y^2 p_2 - \frac{2l}{a}(x-y) \right)^2 - \frac{2axy}{x-y} \right) \left((p_1 + p_2)^2 + \frac{2a}{x-y} \right). \end{aligned}$$

Квантовая версия волчка Ковалевской имеет вид [19], [22]

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2 + 2\widehat{M}_3^2) - \frac{1}{2}\widehat{\gamma}_1, \quad (25)$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{2}(\widehat{k}_+ \widehat{k}_- + \widehat{k}_- \widehat{k}_+) + 4(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2), \quad (26)$$

где $\widehat{k}_{\pm} = (\widehat{M}_1 \pm i\widehat{M}_2)^2 + \widehat{\gamma}_1 \pm i\widehat{\gamma}_2$. Переход к представлению (22) дает следующие коммутирующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} 2\widehat{H}_D &= x^2 D_x^2 + (4xy - x^2 - y^2)D_x D_y + y^2 D_y^2 + \\ &+ \frac{1}{a}((a+l)x - ly)D_x + \frac{1}{a}(lx + (a-l)y)D_y + a\frac{xy-1}{x-y}, \\ \widehat{K}_D &= \left[f^2 - \frac{2axy}{x-y}, g^2 + \frac{2a}{x-y} \right]^+ + 4[f, gfg]^+ - 2[fg, gf]^+ - 2[f^2, g^2]^+, \end{aligned}$$

где

$$f = x^2 D_x + y^2 D_y - \frac{l}{a}(x-y), \quad g = D_x + D_y.$$

Отметим, что гамильтонианы (25), (26) допускают следующее обобщение (гиростат Ковалевской) [23]:

$$\begin{aligned} 2\widehat{H} &= \widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2 + 2\widehat{M}_3^2 - \widehat{\gamma}_1 + c\widehat{M}_3, \\ \widehat{K} &= \frac{1}{2}(\widehat{k}_+ \widehat{k}_- + \widehat{k}_- \widehat{k}_+) + 4(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2) - 2c(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2)\widehat{M}_3 + \\ &+ 2c^2\widehat{M}_3^2 + c(c^2 + 1)\widehat{M}_3 - 2c\widehat{M}_1\widehat{\gamma}_3 - c^2\widehat{\gamma}_1 - ic\widehat{\gamma}_2. \end{aligned}$$

3.4. Случай Горячёва–Чаплыгина. Квантование данной системы рассматривалось в работе [21]. Гамильтонианы

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2 + 4\widehat{M}_3^2 - \widehat{\gamma}_1 + c\widehat{M}_3, \\ \widehat{K} &= 4(\widehat{M}_1^2 + \widehat{M}_2^2)\widehat{M}_3 + 2\widehat{M}_1\widehat{\gamma}_3 - 4c\widehat{M}_3^2 + (1 - c^2)\widehat{M}_3 + c\widehat{\gamma}_1 + i\widehat{\gamma}_2\end{aligned}$$

удовлетворяют соотношению $[\widehat{H}, \widehat{K}] = 4il\widehat{M}_2$, где $l = (\widehat{\gamma}, \widehat{M})$ – оператор Казимира на $e(3)$. Таким образом, при $l = 0$ мы имеем интегрируемый случай. Переходя к операторам при помощи представления (22) (при $l = 0$), получаем коммутирующую пару

$$\begin{aligned}\widehat{H}_D &= 3x^2D_x^2 - (x^2 - 8xy + y^2)D_xD_y + 3y^2D_y^2 + \\ &\quad + (c + 3)(xD_x + yD_y) + a\frac{xy - 1}{x - y}, \\ -\widehat{K}_D - 4\left(\frac{c}{3} + 1\right)\widehat{H}_D &= 4x^3D_x^3 + 4(x^2 + xy + y^2)(xD_x + yD_y)D_xD_y + 4y^3D_y^3 + \\ &\quad + \left(\frac{c}{3} + 3\right)(4(x - y)^2D_xD_y - (c + 3)(xD_x + yD_y)) + \\ &\quad + \frac{a}{x - y}\left((x + y)((x^2 - 1)D_x + (y^2 - 1)D_y) - \left(\frac{c}{3} + 5\right)xy + \frac{c}{3} + 3\right).\end{aligned}$$

4. СПЕКТРЫ

Квантование в генераторах алгебры Ли является универсальным, но постановка граничной задачи и вычисление спектров зависят от выбора конкретного представления. В качестве приложения рассмотрим вопрос о спектре волчка Эйлера на $so(3)$ в представлении (8). Напомним, что квантование этой модели было проведено в работах [30]. В случае представления (8) естественно определять спектр из условия полиномиальности собственных функций. Для сравнения отметим работу [22], где указан спектр для матричного представления, и недавнюю работу [31], где изучен спектр для представления в эллиптических координатах и установлено, что коэффициенты характеристического многочлена на заданном уровне $j = s$ выражаются через так называемые эллиптические многочлены Бернулли. Для волчков на $so(4)$ задача о спектре довольно сложна, и мы ограничимся выводом уравнений для собственных функций волчка Шоттки–Манакова.

4.1. Матричное представление алгебры $so(3)$. Введем волновую функцию $|m, j\rangle = x^{j-m}$, тогда представление (8) имеет в этом базисе следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1 \pm i\widehat{U}_2 &= \widehat{U}_{\pm}, & \widehat{U}_3|m, j\rangle &= m|m, j\rangle, \\ \widehat{U}_+|m, j\rangle &= (j - m)|m + 1, j\rangle, & \widehat{U}_-|m, j\rangle &= (j + m)|m - 1, j\rangle.\end{aligned}\tag{27}$$

В этом случае условие, что число $j - m$ целое, следует из требования однозначности базисной функции x^{j-m} . Если есть симметрия по отношению к обращению времени $m \rightarrow -m$, то $j + m$ также должно быть целым, тогда j, m – целые или полуцелые числа одновременно. Из вида матричных элементов следует, что $m = -j, \dots, j$, при

этом условие $j > 0$ вытекает из требования аналитичности базисной функции. Из ее вида также следует, что волновая функция на орбите $j = \text{const}$ есть полином степени $2j$.

Волновую функцию и спектральную задачу на $so(3)$ можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j C(m, j) |m, j\rangle, \quad H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

Волновая функция и спектральная задача на $so(4)$ выглядят аналогично:

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C(m_1, m_2; j_1, j_2) |m_1, m_2, j_1, j_2\rangle, \quad H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

В дифференциальном представлении базисная волновая функция на $so(4)$ выбирается в виде $|m_1, m_2, j_1, j_2\rangle = x^{j_1-m_1} y^{j_2-m_2}$. Тогда общая волновая функция есть произвольный полином степени $2j_1$ по переменной x и степени $2j_2$ по переменной y .

4.2. Спектр волчка Эйлера на $so(3)$. Задача на собственные значения имеет вид

$$\hat{H}\psi_j^\lambda(x) = \lambda\psi_j^\lambda(x), \quad \hat{C}\psi_j^\lambda(x) = j(j+1)\psi_j^\lambda(x),$$

где

$$\hat{H} = \alpha_1 \hat{U}_1^2 + \alpha_2 \hat{U}_2^2 + \alpha_3 \hat{U}_3^2, \quad \hat{C} = \hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2.$$

С точностью до несущественного сдвига спектра можно положить $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Используем представление (27) дифференциальными операторами для алгебры $so(3)$ и запишем волновые функции в виде

$$\psi_j^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{2j} \tilde{C}_j^\lambda(k) x^k.$$

Тогда задачу на собственные значения можно переписать как рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(2j+1-k)(2j+2-k)C_j^\Lambda(k-2) + \\ & + \left(\frac{1}{2}(j(j+1) - 3(j-k)^2)\xi - \Lambda \right) C_j^\Lambda(k) + \frac{1}{4}(k+1)(k+2)C_j^\Lambda(k+2) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad C_j^\Lambda = \tilde{C}_j^\lambda,$$

с граничными условиями на левом конце

$$C_j^\Lambda(-2) = C_j^\Lambda(-1) = 0, \quad C_j^\Lambda(0) = C_j^\Lambda(1) = 1.$$

Задачи для четной и нечетной частей волновой функции $\psi_j^\lambda(x)$ различны: если j – целое число, то граничное условие на правом конце имеет вид $C_j^\Lambda(2j+2) = 0$ для четной части и $C_j^\Lambda(2j+1) = 0$ для нечетной; если j – полуцелое число, то,

наоборот, на правом конце имеем $C_j^\Lambda(2j+1) = 0$ для четной части и $C_j^\Lambda(2j+2) = 0$ для нечетной.

В итоге получаем, что собственные значения гамильтониана $\hat{H}$ являются корнями следующего полинома:

$$P_j(\Lambda) = C_j^\Lambda(2j+1)C_j^\Lambda(2j+2), \quad \deg P_j(\Lambda) = 2j+1.$$

Выпишем в явном виде несколько полиномов $P_j(\Lambda)$, нормированных так, чтобы коэффициент при старшей степени Λ^{2j+1} был равен единице:

$$\begin{aligned} P_0(\Lambda) &= \Lambda, & P_{1/2}(\Lambda) &= \Lambda^2, \\ P_1(\Lambda) &= \frac{1}{4}(\Lambda - \xi)(2\Lambda + \xi + 1)(2\Lambda + \xi - 1), & P_{3/2}(\Lambda) &= \frac{1}{16}(4\Lambda - 9\xi^2 - 3)^2, \\ P_2(\Lambda) &= \frac{1}{4}(\Lambda + 3\xi)(2\Lambda - 3\xi + 3)(2\Lambda - 3\xi - 3)(\Lambda - 9\xi^2 - 3)^2, \\ P_{5/2}(\Lambda) &= (\Lambda^3 - 7\Lambda(3\xi^2 + 1) + 20\xi(\xi^2 - 1))^2. \end{aligned}$$

В силу теоремы Крамерса [28] о двукратном вырождении систем с общим полуцелым спином все полиномы $P_j(\Lambda)$ с полуцелыми j являются полными квадратами.

4.3. Матричное представление для волчка Шоттки–Манакова. В случае волчка Шоттки–Манакова мы имеем две совместные задачи на собственные значения: $\hat{H}\psi = \lambda\psi$ и $\hat{K}\psi = \mu\psi$. Волновая функция записывается как

$$\psi_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(x, y) = \sum_{k=0}^{2j_1} \sum_{l=0}^{2j_2} C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) x^k y^l.$$

В решеточном представлении возникает пятиточечное уравнение для собственных значений μ ,

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \alpha_2)(2j_1 + 1 - k)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l - 1) + \\ &+ (\alpha_1 - \alpha_2)(k + 1)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l + 1) + \\ &+ 2(2(j_1 - k)(j_2 - l)\alpha_3 - \mu)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) + \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_2)(2j_1 + 1 - k)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l + 1) + \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_2)(k + 1)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l - 1) = 0, \end{aligned}$$

и девятиточечное для собственных значений λ ,

$$\begin{aligned} &(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(k + 1)(k + 2)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 2, l) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(l + 1)(l + 2)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l + 2) + \\ &+ 2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(k + 1)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l + 1) + \\ &+ 2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_1)(k + 1)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k + 1, l - 1) + \\ &+ \{(\alpha_1 - \alpha_2)^2((2j_1 + 1 - k)^2 + (2j_2 + 1 - l)^2 - \\ &- 2(j_1 + j_2 + 1 - k)(j_1 + j_2 + 1 - l) - \\ &- (j_1 - j_2)^2 - j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)) - 4\alpha_3^2((j_1 - k)^2 + (j_2 - l)^2) + \\ &+ (\alpha_2 + \alpha_1)^2((j_1 + j_2 - k - l)^2 - j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1))\}C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(2j_1 + 1 - k)(2j_1 + 2 - k)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 2, l) + \\
& + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(2j_2 + 1 - l)(2j_2 + 2 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l - 2) + \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_1)(2j_1 + 1 - k)(l + 1)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l + 1) + \\
& + 2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(2j_1 + 1 - k)(2j_2 + 1 - l)C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k - 1, l - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия имеют следующий вид: $C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l) = 0$, если пара (k, l) лежит вне прямоугольника с вершинами $(0, 0)$, $(j_1, 0)$, (j_1, j_2) , $(0, j_2)$.

Решения $C_{j_1, j_2}^{\lambda, \mu}(k, l)$ распадаются на решения на двух подрешетках: будем называть решение *четным*, если оно равно нулю при нечетном $k + l$, и *нечетным*, если оно равно нулю при четном $k + l$.

На самом деле нет необходимости разрешать девятиточечное соотношение: достаточно определить волновые функции из пятиточечного соотношения, подставить в девятиточечное и определить зависимость λ_i от μ_i . Есть основания считать, что пары (λ_i, μ_i) должны лежать на одной алгебраической кривой.

Для примера рассмотрим случай $j_1 = j$, $j_2 = 1/2$. Волновая функция разделяется на четную и нечетную. Четная функция имеет вид

$$\psi = C_0 + C_1xy + C_2x^2 + C_3x^3y + \dots,$$

где коэффициенты удовлетворяют граничным условиям $C_{-2} = C_{-1} = C_{2j+1} = 0$ и рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\alpha_1 + (-1)^k\alpha_2)(2j + 1 - k)C_{k-1} + \\
& + (\alpha_3(j - k)(-1)^k - \mu)C_k + \frac{1}{2}(\alpha_1 - (-1)^k\alpha_2)(k + 1)C_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

С точностью до постоянных множителей

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \mu - j\alpha_3, \quad C_2 = \mu^2 - \alpha_3\mu - \alpha_3^2j(j - 1) - \frac{1}{2}j(\alpha_1 - \alpha_2)^2, \dots$$

Нечетная функция имеет вид

$$\psi = B_0y + B_1x + B_2x^2y + B_3x^3 + \dots,$$

где коэффициенты удовлетворяют граничным условиям $B_{-2} = B_{-1} = B_{2j+1} = 0$ и рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 - (-1)^k\alpha_2)(2j + 1 - k)B_{k-1} + \\
& + 2(\alpha_3(k - j)(-1)^k - \mu)B_k + (\alpha_1 + (-1)^k\alpha_2)(k + 1)B_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

С точностью до постоянных множителей

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \mu + j\alpha_3, \quad B_2 = \mu^2 + \alpha_3\mu - \alpha_3^2j(j - 1) - \frac{1}{2}j(\alpha_1 - \alpha_2)^2, \dots$$

Уравнение на собственное значение записывается как

$$P_{j, 1/2}(\mu) = C(2j + 1)B(2j + 1) = 0, \quad \deg P_{j, 1/2}(\mu) = 2(2j + 1).$$

Полином $P_{j, 1/2}(\mu)$ является полным квадратом при целых j в силу теоремы Крамера, так как в этом случае число $j + 1/2$ полуцелое.

5. ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ И СВОЙСТВО ФАКТОРИЗУЕМОСТИ (3)

Рассмотрим классический гамильтониан с квадратичной главной частью,

$$H = a(x)p_1^2 + 2f(x, y)p_1p_2 + b(y)p_2^2 + \dots, \quad (28)$$

и соответствующую гамильтонову динамику

$$x_t = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad y_t = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad p_{1,t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p_{2,t} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (29)$$

Анализируя возможные особенности решения (тест Пенлеве), получаем, что разложение в ряд Лорана вблизи особенности для этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1(t - t_0) + x_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ y &= y_0 + y_1(t - t_0) + y_2(t - t_0)^2 + \dots, \\ p_1 &= \frac{P_1^-}{t - t_0} + P_1^0 + P_1^1(t - t_0) + \dots, \\ p_2 &= \frac{P_2^-}{t - t_0} + P_2^0 + P_2^1(t - t_0) + \dots. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) &= f^2(x, y) - a(x)b(y), \\ \Gamma_1(x, y) &= \partial_y \Gamma(x, y) + 2a(x)\partial_x f(x, y) - a'(x)f(x, y), \\ \Gamma_2(x, y) &= \partial_x \Gamma(x, y) + 2b(y)\partial_y f(x, y) - b'(y)f(x, y). \end{aligned}$$

При подстановке рядов (30) в уравнения Гамильтона (29) возникают следующие условия: $\Gamma(x_0, y_0) = 0$ и $\Gamma_1(x_0, y_0)\Gamma_2(x_0, y_0) = 0$. При этом

$$P_1^- = -\frac{f(x_0, y_0)}{\partial_{y_0} \Gamma(x_0, y_0)}, \quad P_2^- = \frac{a(x_0)}{\partial_{y_0} \Gamma(x_0, y_0)}$$

или

$$P_1^- = \frac{b(y_0)}{\partial_{x_0} \Gamma(x_0, y_0)}, \quad P_2^- = -\frac{f(x_0, y_0)}{\partial_{x_0} \Gamma(x_0, y_0)}.$$

Таким образом, $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap \Gamma_1 \neq \Gamma$ или $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap \Gamma_2 \neq \Gamma$. Если алгебраические кривые Γ и Γ_i имеют конечное число точек пересечения (x_0, y_0) , то тест Пенлеве не выполняется, так как в этом случае в решении (30) не хватает параметров (начальные условия для координат не произвольны). Другая возможность заключается в том, что хотя бы одно из пересечений $\Gamma \cap \Gamma_1$ или $\Gamma \cap \Gamma_2$ является алгебраической кривой, которая описывается некоторым уравнением $w(x, y) = 0$. В этом случае полином $w(x, y)$ является делителем полинома $\Gamma(x, y)$, что и доказывает формулу (3).

Итак, в классическом случае свойство факторизуемости (3) можно доказать при помощи теста Пенлеве. Для дифференциального оператора (1) это рассуждение непосредственно применить нельзя, но, поскольку коэффициенты главной части при переходе к классическому пределу не меняются, свойство факторизуемости можно считать доказанным и для квантового случая.

Следует отметить, что, за исключением волчка Стеклова, для которого $b = 0$, в остальных рассмотренных примерах гамильтонианы имеют вид (28) с $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этих примерах фактически выполняется свойство $\Gamma \cap \Gamma_1 = \Gamma \cap \Gamma_2$, более сильное чем (3).

Благодарности. Авторы благодарны И. М. Кричеверу и В. В. Соколову за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6501.2010.2) и РФФИ (грант № 10-01-00088).

Список литературы

- [1] I. Schur, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **4** (1905), 2–8.
- [2] J. L. Burchall, T. W. Chaundy, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **118**:780 (1928), 557–583.
- [3] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.
- [4] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31.
- [5] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.
- [6] Р. А. Габиев, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **171**:1 (2012), 18–25.
- [7] А. П. Веселов, *Докл. АН СССР*, **270**:6 (1983), 1298–1300.
- [8] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Commun. Math. Phys.*, **105**:3 (1986), 461–472.
- [9] В. В. Соколов, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605.
- [10] V. G. Marikhin, V. V. Sokolov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:1 (2005), 59–70.
- [11] F. Schottky, *Berl. Ber.*, 1891, 227–232.
- [12] С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 93–94.
- [13] W. Stekloff, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), **1** (1909), 145–256.
- [14] M. Adler, P. van Moerbeke, *Adv. Math. Suppl. Stud.*, **9** (1986), 81–96.
- [15] V. V. Sokolov, “Generalized Kowalewski top: new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$,” *The Kowalewski Property*, CRM Proceedings and Lecture Notes, **32**, ed. V. B. Kuznetsov, AMS, Providence, RI, 2002, 307–313, arXiv: nlin/0110022.
- [16] I. V. Komarov, V. B. Kuznetsov, *J. Phys. A*, **24**:13 (1991), L737–L742.
- [17] A. Clebsch, *Math. Ann.*, **3**:2 (1870), 238–262.
- [18] S. V. Kowalevski, *Acta Math.*, **12**:1 (1889), 177–232.
- [19] O. Laporte, *Phys. Rev.*, **43**:7 (1933), 548–551.
- [20] И. В. Комаров, *ТМФ*, **47**:1 (1981), 67–72.
- [21] И. В. Комаров, *ТМФ*, **50**:3 (1982), 402–409.
- [22] И. В. Комаров, В. Б. Кузнецов, *ТМФ*, **73**:3 (1987), 335–347.
- [23] I. V. Komarov, *J. Phys. A*, **34**:11 (2001), 2111–2120.
- [24] A. Ramani, B. Grammaticos, B. Dorizzi, *Phys. Lett. A*, **101**:2 (1984), 69–71.
- [25] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, ИКИ, М., Ижевск, 2005.
- [26] J. Hietarinta, *Phys. Lett. A*, **246**:1–2 (1998), 97–104.
- [27] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rept.*, **94**:6 (1983), 313–404.
- [28] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.
- [29] V. G. Marikhin, V. V. Sokolov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **15**:6 (2010), 652–658.
- [30] H. A. Kramers, G. P. Ittmann, *Z. Physik*, **53**:7–8 (1929), 553–565; **58**:3–4 (1929), 217–231.
- [31] M-P. Grosset, A. P. Veselov, *Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2*, **51**:3 (2008), 635–650.

Поступила в редакцию 27.09.2011