Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Калоджеро, О методе нахождения решаемых задач
многих тел с дискретным временем, *ТМФ*, 2012, том 172,
номер 2, 198–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:21:16

© 2012 г.

Ф. Калоджеро^{*†}

О МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ МНОГИХ ТЕЛ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Нашей исходной точкой является $(N \times N)$ -матрица $U \equiv U(\ell)$, которая изменяется в дискретном времени (независимой переменной $\ell = 0, 1, 2, \dots$) согласно решаемому матричному эволюционному уравнению. Исследована эволюция ее N собственных значений $z_n(\ell)$. В общем случае эта эволюция включает также $N(N-1)$ дополнительных переменных. В некоторых случаях посредством согласованной подстановки эти дополнительные переменные можно выразить в терминах N переменных $z_n(\ell)$. Получена система эволюционных уравнений по дискретному времени с N зависимыми переменными $z_n(\ell)$, которую часто интерпретируют как задачу многих тел с дискретным временем. Исследуются различные особенности такого подхода, включая возможность производства нетривиальных изохронных моделей (все решения которых являются периодическими с одинаковыми периодами). Эти свойства проиллюстрированы на конкретных примерах. В этом процессе проявляются новые задачи многих тел с дискретным временем.

Ключевые слова: интегрируемые динамические системы с дискретным временем, решаемые динамические системы с дискретным временем, интегрируемые задачи многих тел с дискретным временем, решаемые задачи многих тел с дискретным временем, изохронная эволюция по дискретному времени.

Настоящая работа посвящается моим более молодым коллегам и друзьям Марко Бойти и Флоре Пемпинелли в честь их семидесятилетия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько десятков лет назад было показано, что задача многих тел для N одинаковых частиц в одномерном пространстве с парным взаимодействием, задаваемым силой, пропорциональной кубу обратного расстояния между ними, *решаема* с помощью алгебраических операций. Такую модель многих тел, вообще говоря, связывают с именами двух авторов, показавших ее *решаемый* характер, сначала в

^{*}Physics Department, University of Rome “La Sapienza”, Rome, Italy.
E-mail: francesco.calogero@roma1.infn.it

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Rome, Italy.
E-mail: francesco.calogero@uniroma1.it

квантовом контексте (уравнение Шредингера) [1], а затем – в классическом контексте (ньютоновские уравнения движения) [2]; соответственно, здесь и далее мы будем ссылаться на нее как на модель Калоджеро–Мозера (КМ). Ньютоновские уравнения движения такой прототипической модели имеют вид

$$\ddot{z}_n = g^2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \left(\frac{1}{z_n - z_m} \right)^3, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1)$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. Здесь N координат $z_n \equiv z_n(t)$ являются зависимыми переменными, точки сверху обозначают дифференцирование по независимой переменной t (“времени”), N – произвольное положительное целое число, а g^2 – произвольная константа взаимодействия. Здесь и ниже индексы n, m, k, ℓ в общем случае пробегает значения от 1 до N , если не оговорено другое; в любом случае, область их значений почти всегда выписана явно для удобства читателя.

Эта модель была прототипом многих развитых впоследствии моделей в теории интегрируемых динамических систем: литература по этому вопросу довольно обширна, количество работ насчитывает несколько сотен, возможно даже несколько тысяч, статей и десятки книг, которые в наше время легко найти в Интернете. На ранних этапах определяющий вклад внесли Ольшанецкий и Переломов [3], которые объяснили *решаемый* характер модели КМ в классическом контексте через возможность отождествить N координат движущихся частиц с N собственными значениями $(N \times N)$ -матрицы, которая сама эволюционирует во времени исключительно просто (линейно). Поэтому временную эволюцию этой $(N \times N)$ -матрицы можно установить явно, и решение задачи КМ многих тел, таким образом, редуцируется к чисто алгебраической задаче вычисления N собственных значений z_n известной явно зависящей от времени $(N \times N)$ -матрицы, или, что эквивалентно, к нахождению N нулей z_n известного явно зависящего от времени многочлена степени N по аргументу z .

Чуть позже был отождествлен другой прототипический класс решаемых задач многих тел [4], и в конце концов, возможно несколько самонадеянно, было предложено простейшую модель, принадлежащую к данному классу, рассматривать как “золотую рыбку” [5]. Ньютоновские уравнения движения для этой прототипической модели многих тел имеют вид

$$\ddot{z}_n = 2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2a)$$

при этом решение соответствующей задачи на начальные значения дается N корнями следующего лаконичного уравнения для z :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0)}{z - z_n(0)} = \frac{1}{t}, \quad (2б)$$

которое принимает вид многочлена степени N по z после умножения на многочлен $\prod_{m=1}^N [z - z_m(0)]$. Заметим, что такая процедура отождествления решения приводит

к N значениям для N координат $z_n(t)$, без связывания каждой из них с соответствующими начальными данными; чтобы связать каждую конкретную координату с соответствующими ей начальными данными, скажем $z_1(t)$ с конкретными начальными данными $z_1(0)$, $\dot{z}_1(0)$, следует руководствоваться непрерывностью временной эволюции, прослеживая, как именно эти начальные данные непрерывно эволюционируют во времени от начальных данных при $t = 0$.

Затем было открыто нетривиальное обобщение класса интегрируемых динамических систем КМ [6], включающее модель золотой рыбки (2) как простейший пример. С течением времени из этого последовали интересные результаты – слишком многочисленные, чтобы можно было привести конкретные ссылки (которые, впрочем, легко найти в Интернете, используя, например, ключевые слова “Руджинарс–Снайдер”).

Развитие обобщенной версии подхода Олшпанецкого–Переломова (ОП) и его систематическое использование привели с течением времени к отождествлению нескольких новых *решаемых* моделей многих тел типа модели КМ и золотой рыбки, причем эти два отождествления ассоциировались с присутствием в правой (“силовой”) части ньютоновских уравнений движения, характеризующих данные модели многих тел (в дополнение, разумеется, к другим вкладам), парных сил модели КМ или модели золотой рыбки – соответственно сил, пропорциональных кубу обратного расстояния между двумя частицами (см. (1)), или сил, равных произведению двойного обратного расстояния между двумя частицами на их скорости (см. (2a)) (см., например, книгу [7], в частности п. 2.1.3.2, которая называется “Метод решения Олшпанецкого и Переломова”, и книгу [8], в частности п. 4.2.2, которая называется “Метод золотой рыбки”, а также ссылки в этих книгах и недавние работы [9]–[13]).

Опишем вкратце обобщенный подход ОП. Исходной точкой является $(N \times N)$ -матрица $U \equiv U(t)$, изменяющаяся во времени согласно *решаемому* матричному эволюционному уравнению второго порядка (или согласно системе двух матричных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, при этом одна из двух эволюционирующих матриц – это $U(t)$). Затем исследуется эволюция N собственных значений $z_n(t)$ $(N \times N)$ -матрицы $U(t)$. Эта эволюция в общем случае включает также $N(N - 1)$ дополнительных зависимых переменных. В некоторых случаях – как будто бы “чудесным образом” – можно выразить эти дополнительные переменные в терминах N переменных $z_n(t)$, используя подходящий анзац, согласованный с уравнениями, описывающими их временную эволюцию, так что в результате получается система эволюционных уравнений, в которую входят только N зависимых переменных $z_n(t)$. Эту систему нелинейных ОДУ второго порядка в общем случае можно интерпретировать как ньютоновские уравнения движения задачи многих тел, разумеется, также *решаемой*. Оказалось, что такое обобщение подхода ОП, где бы оно ни применялось, приводит к модели, принадлежащей к одному из двух классов *решаемых* задач многих тел – КМ и “золотой рыбки” – соответственно выбору подстановки одного из двух различных типов, позволяющих устранить $N(N - 1)$ дополнительных зависимых переменных. Более того, отметим, что подстановка, которая чаще всего работает, – это подстановка, ведущая к моделям типа золотой рыбки.

В завершение нашего краткого обзора предыдущих результатов, относящихся к стандартному контексту *непрерывного времени*, напомним простой прием, позволяющий для некоторых классов *автономных* динамических систем создавать вариан-

ты этих систем, которые также являются *автономными* и, более того, *изохронными*. А именно, одно из их свойств состоит в том, что они имеют *открытую* область в своем фазовом пространстве, в котором почти все решения являются периодическими с одинаковыми периодами (см., например, главу 2 работы [8], которая называется “Изохронные системы не так уж и редки”, и, в частности, ее подраздел 2.1, который называется “Фокус”: краткое изложение, приведенное ниже, иногда дословно списано из этого источника).

Исходной точкой нашего рассмотрения является довольно общая (однако здесь, для простоты, *автономная*) динамическая система, которую мы запишем как

$$\zeta' = F(\zeta). \quad (3)$$

Здесь $\zeta \equiv \zeta(\tau)$ – зависимая переменная, которая может быть скаляром, вектором, тензором, матрицей, как скажете; штрих обозначает, разумеется, дифференцирование по независимой переменной τ , и мы предполагаем, что эту переменную разрешено трактовать как *комплексное* число. Величина F в правой части (3), которая, разумеется, носит тот же самый (скалярный, векторный, тензорный, матричный) характер, что и ζ , может зависеть (произвольным образом, но аналитично) от ζ .

Стандартный результат гарантирует тогда существование круглого диска на *комплексной* τ -плоскости с центром в точке $\tau = 0$ (где заданы начальные данные) и с *положительным* радиусом ρ , $\rho > 0$, где решения $\zeta(\tau)$, соответствующие этим начальным данным, являются *голоморфными* функциями комплексной переменной τ (если $\zeta(\tau)$ является *многокомпонентным* объектом, то свойство *голоморфности*, разумеется, демонстрирует *каждая* из его компонент). Значение ρ зависит от функции $F(\zeta)$ и от начального значения $\zeta(0) = \zeta_0$, которые, разумеется, предполагаются такими, чтобы функция $F(\zeta)$ не была в этой точке сингулярной.

Теперь введем следующие замены зависимой и независимой переменных:

$$z(t) = e^{i\lambda\omega t} \zeta(\tau), \quad (4a)$$

$$\tau \equiv \tau(t) = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}, \quad (4б)$$

где ω – произвольная *положительная* постоянная (имеющая размерность обратного времени), а λ – априори произвольное *рациональное* число, $\lambda = q/p$, p и q – *взаимно простые целые числа*, $p > 0$. Такое преобразование носит название “фокус”. Его основная часть – замена *независимой* переменной (4б): еще раз подчеркнем, что здесь и далее новая *независимая* переменная t рассматривается как *вещественная* переменная – “физическое время”. Заметим, что из (4) следует

$$\tau(0) = 0, \quad z(0) = \zeta(0) = \zeta_0, \quad \dot{z}(0) - i\lambda\omega z(0) = \zeta'(0), \quad (5)$$

и, что наиболее важно, $\tau(t)$ является *периодической* функцией t с периодом $T = 2\pi/\omega$. Более конкретно, при увеличении времени t от нуля *комплексная* переменная $\tau \equiv \tau(t)$ совершает круговое движение против часовой стрелки, делая полный оборот за временной интервал T , по окружности C , диаметр которой, равный $2/\omega$, лежит на мнимой оси в *комплексной* τ -плоскости с одним концом в начале отсчета, $\tau = 0$, а с другим – в точке $\tau = 2i/\omega$. Поэтому, если $\rho > 2/\omega$ (условие,

справедливость которого всегда можно гарантировать, положив величину ω достаточно большой), так что $\zeta(\tau)$ является *голоморфной* по τ в диске D на комплексной τ -плоскости, границей которого является окружность C , то из фокуса (4), очевидно, следует, что $z(t)$ является *полностью периодической* (а именно, все ее компоненты являются периодическими) с периодом pT :

$$z(t + pT) = z(t). \quad (6)$$

“ ω -Модифицированная” динамическая система представляет собой систему, которая получается из (3) путем замены переменных (4). Очевидно, она имеет вид

$$\dot{z} = i\lambda\omega z + e^{i(\lambda+1)\omega t} F(e^{-i\lambda\omega t} z). \quad (7)$$

Поэтому на основании приведенных выше аргументов ясно, что эта система является *изохронной*. Более того, ясно, что условие, достаточное для того, чтобы гарантировать, чтобы эта система была также и *автономной*, заключается в том, чтобы функция $F(\zeta)$ удовлетворяла свойству *скейлинга*

$$F(c\zeta) = c^\mu F(\zeta), \quad (8)$$

где μ – *рациональное* число ($\mu \neq 1$). Тогда действительно ясно, что ω -модифицированная система (7) становится *автономной*, при этом она принимает лаконичный вид

$$\dot{z} = i\lambda\omega z + F(z) \quad (9a)$$

при условии, что мы положили

$$\lambda = \frac{1}{\mu - 1} \quad (9b)$$

(и, разумеется, мы предполагаем *рациональный* характер μ , откуда следует, что λ также *рационально*).

В заключение отметим, что с помощью фокуса (4) мы установили соотношение между двумя системами: справедливому в общем случае свойству *голоморфности* решений $\zeta(\tau)$, рассматриваемых как функции *комплексной* независимой переменной τ , немодифицированной системы (3) в окрестности значения $\tau = 0$, где заданы начальные данные, отвечает свойство *изохронности* ω -модифицированной системы (9a) (см. (6)).

Подчеркнем, что, как ясно следует из нашего обсуждения, вовсе не требуется, чтобы (немодифицированные) динамические системы, которые составляют исходную точку нашего рассмотрения, были *интегрируемыми*, для того чтобы заключить, что временная эволюция (разумеется, по *вещественной* переменной – “физическому времени” t) “ ω -модифицированных” систем, полученных из них с помощью фокуса (4), была *изохронной*. Еще раз повторим, что единственное существенное требование к исходной системе (3) действительно заключается в том, что имеет смысл рассматривать ее для *комплексных* значений независимой переменной τ . Дополнительное требование (8) должно быть добавлено, если мы хотим, чтобы соответствующая ω -модифицированная система (9a) была *автономной*.

Однако если исходная немодифицированная система (3) сама является *интегрируемой*, то аналитическая зависимость ее решений от независимой переменной τ

в общем случае довольно проста: действительно, широкий класс *интегрируемых* динамических систем демонстрирует “свойство Пенлеве”, в соответствии с которым требуется, чтобы все их решения были *мероморфными* функциями их независимых переменных τ в их *полном* (естественном) фазовом пространстве. Тогда из приведенных выше рассуждений становится ясно, что каждая ω -модифицированная система, полученная с помощью фокуса (4) из такой системы (демонстрирующей свойство Пенлеве), является *полностью периодической* с периодом pT (см. (6)) при произвольных начальных данных во всем ее (естественном) фазовом пространстве, возможно за исключением набора начальных данных *низкой размерности* таких, что полюс решения немодифицированной системы попадает точно на окружность C на *комплексной* τ -плоскости, так что соответствующее решение ω -модифицированной системы становится *сингулярным* за конечное время $t_s < pT$ (в действительности даже временную эволюцию такого типа следует рассматривать как периодическую, в таком же смысле, в котором функцию $\operatorname{tg}(\pi t/T)$ можно рассматривать как периодическую функцию времени с периодом T , хотя она и становится сингулярной в точке $t = T/2$). Из аналогичных аргументов следует возникновение *изохронности*, даже если исходная система демонстрирует только обобщенное свойство Пенлеве, допуская существование конечного числа рациональных точек ветвления.

Отметим еще интерес, который возник главным образом в течение двух последних десятилетий, к динамическим системам с *дискретным временем*, допускающим точную интерпретацию, что подтверждается обширным списком книг и обзоров [14]–[18]. Эти модели характеризуются заменой переменной *непрерывного времени* t , в общем случае являющейся *вещественным* числом, на переменную *дискретного времени* ℓ , принимающую *целочисленные* значения. Важную категорию таких динамических систем представляют собой системы (здесь и далее мы будем называть их *решаемыми*), решения которых можно получить чисто алгебраическими методами, а именно вычислением собственных значений матрицы, явно известной в терминах начальных данных, и переменной *дискретного времени* ℓ . Поскольку в общем случае можно с помощью подходящей предельной процедуры редуцировать динамическую систему с *дискретным временем* к динамической системе с *непрерывным временем*, каждой решаемой динамической системе с дискретным временем в общем случае соответствует одна или, возможно, целое семейство динамических систем с непрерывным временем, которые, разумеется, также являются решаемыми. Особый интерес представляют случаи, когда получаемые таким образом модели с непрерывным временем характеризуются ньютоновскими уравнениями движения, так что их можно интерпретировать как задачи многих тел; тогда такие динамические системы с дискретным временем сами относятся к задачам многих тел с дискретным временем, что отражено в названии настоящей статьи. В частности, в конце концов были найдены интегрируемые динамические системы с дискретным временем, которые редуцируются к моделям КМ и типа моделей Рейсенарса–Снайдера [19], [20], а также модели, связанные именно с динамической системой золотой рыбки (2) [21].

Представляется естественным исследовать вопрос, насколько далеко можно расширить подход ОП в контексте *дискретного времени*. Недавно это было проделано и были найдены новые решаемые модели многих тел с дискретным временем [22].

Например, была сформулирована задача многих тел, в которой эволюция по дискретному времени характеризуется следующими тремя наборами уравнений движения (они эквивалентны, хотя этот факт и далеко не очевиден):

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_n - a_+^2 z_j}{\tilde{z}_n - a_+ \tilde{z}_j} = \frac{a_- + a_+}{a_-}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (10a)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_j - a_+^2 z_n}{\tilde{z}_j - a_+ \tilde{z}_n} = (a_- + a_+)(a_+)^{N-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (10б)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_j - a_+ \tilde{z}_n}{a_+ z_j - \tilde{z}_n} = -a_- (a_+)^{N-1}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (10в)$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Здесь и ниже $\ell = 0, 1, 2, \dots$ – независимая переменная *дискретного времени*, $z_n \equiv z_n(\ell)$ – зависимые переменные задачи многих тел с *дискретным временем*, знак тильды сверху обозначает сдвиг дискретного времени на единицу, т. е. $\tilde{z}_n \equiv z_n(\ell + 1)$, $\tilde{\tilde{z}}_n(\ell) \equiv z_n(\ell + 2)$, a_+ и a_- – произвольные постоянные.

Было показано, что решение задачи на начальные значения для данной модели доставляется следующим правилом: N координат $z_n(\ell)$ представляют собой N собственных значений $(N \times N)$ -матрицы

$$U(\ell) = (a_+)^{\ell} C_+ + (a_-)^{\ell} C_-, \quad (11a)$$

$$C_{\pm} = \pm(a_+ - a_-)^{-1} [U(1) - a_{\mp} U(0)], \quad (11б)$$

$$U(0) = \text{diag}[z_n(0); n = 1, \dots, N], \quad [U(0)]_{nm} = \delta_{nm} z_n(0), \quad (11в)$$

$$\begin{aligned} [U(1)]_{nm} &= (a_+)^{1-N} \left\{ a_+ z_n(0) + \sum_{k=1}^N [z_k(1) - a_+ z_k(0)] \right\} \times \\ &\times \prod_{j=1, j \neq m}^N \frac{a_+ z_m(0) - z_j(1)}{z_m(0) - z_j(0)}, \quad n, m = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (11г)$$

где δ_{nm} – стандартный символ Кронекера, $\delta_{nm} = 1$, если $n = m$, $\delta_{nm} = 0$, если $n \neq m$.

Эти формулы детализируют в терминах $2N$ начальных данных $z_n(0)$, $z_n(1)$ модели N тел, характеризующейся тремя эквивалентными наборами уравнений движения второго порядка (10) – явный вид эволюции $(N \times N)$ -матрицы $U(\ell)$ по *дискретному времени* ℓ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнения (10a) – первый из трех эквивалентных наборов уравнений движения (10) – эквивалентны утверждению, что подвергнутые двойному сдвигу координаты $\tilde{\tilde{z}}_n(\ell) \equiv z_n(\ell + 2)$ выражаются в терминах несдвинутых координат $z_j \equiv z_j(\ell)$ и однократно сдвинутых координат $\tilde{z}_j \equiv z_j(\ell + 1)$, как N корней следующего полиномиального уравнения степени N по переменной z :

$$a_- \prod_{j=1}^N (z - a_+^2 z_j) = (a_- + a_+) \prod_{j=1}^N (z - a_+ \tilde{z}_j). \quad (12a)$$

Отсюда с очевидностью следует замечательное свойство подобных задач многих тел, которым в общем случае обладают эволюции всех типов *по дискретному времени*: они детерминистичны лишь в том смысле, что два *неупорядоченных* набора данных в моменты времени ℓ и $\ell + 1$ единственным образом определяют *неупорядоченный* набор данных в момент времени $\ell + 2$. Действительно, возможно, лучший способ охарактеризовать эти эволюции заключается в том, чтобы сказать, что они единственным образом определяют в момент дискретного времени $\ell + 2$ монический, зависящий от времени многочлен степени N по переменной z , скажем $P_N(z; \ell + 2)$ (однозначно определяемый набором своих N нулей $z_n(\ell + 2)$), в терминах двух таких многочленов в моменты времени ℓ и $\ell + 1$, скажем $P_N(z; \ell)$ и $P_N(z; \ell + 1)$. Поэтому они также единственным образом определяют, шаг за шагом, такой многочлен в момент времени ℓ , скажем $P_N(z; \ell)$, в терминах двух таких многочленов, определенных в “начальные” моменты времени $\ell = 0$ и $\ell = 1$, скажем $P_N(z; 0)$ и $P_N(z; 1)$. Отметим сходство этой феноменологии с той, которая характеризует решение (см. (26)) модели золотой рыбки с непрерывным временем (2a). Однако в этом случае, как было отмечено выше, *непрерывность* по времени допускает преобладание более сильной формы детерминизма, при которой значение каждой координаты определяется в каждый момент в соответствии с тем фактом, что уравнения движения в случае *непрерывного времени* единственным образом определяют ускорение каждой частицы в терминах сил (см., например, (2a) и (1)). С другой стороны, аргумент непрерывности в случае дискретного времени отсутствует, хотя в некоторых обстоятельствах его следует заменить на аргумент непрерываемости, как это обсуждается в работе [22].

Заметим также, что имеется в некоторой степени аналогичная интерпретация, которую можно дать уравнениям (106) – второму из трех наборов уравнений движения, выписанных выше: N корней полиномиального уравнения степени N по переменной z

$$\prod_{j=1}^N (a_+^2 z - \tilde{z}_j) = (a_- + a_+)(a_+)^{N-1} \prod_{j=1}^N (a_+ z - \tilde{z}_j) \quad (126)$$

дают N значений несдвинутых координат $z_n \equiv z_n(\ell)$ в терминах N однократно сдвинутых координат $\tilde{z}_j \equiv z_j(\ell + 1)$ и N дважды сдвинутых координат $\tilde{\tilde{z}}_j \equiv z_j(\ell + 2)$. Поэтому уравнения движения (106) можно интерпретировать как аналог уравнений (10a) с *обращенным временем*. Аналогично для уравнений (10в) – третьего набора уравнений движения – ясно следует, что N корней полиномиального уравнения степени N по переменной z

$$\prod_{j=1}^N (a_+ z - \tilde{\tilde{z}}_j) = -a_- (a_+)^{N-1} \prod_{j=1}^N (z - a_+ z_j) \quad (12в)$$

дают N значений однократно сдвинутых координат $\tilde{z}_n \equiv z_n(\ell + 1)$ в терминах N несдвинутых координат $z_j \equiv z_j(\ell)$ и N дважды сдвинутых координат $\tilde{\tilde{z}}_j \equiv z_j(\ell + 2)$.

Разумеется, более конкретный детерминизм этих эволюций можно было бы восстановить, если переключить внимание с координат $z_n \equiv z_n(\ell)$ на подходящие “коллективные координаты”, например с N нулей $z_n(\ell)$ монического многочлена $P_N(z; \ell)$

на его N коэффициентов $c_m \equiv c_m(\ell)$, определяемых единственным образом в терминах N нулей $z_n(\ell)$, как следует из стандартной формулы, характеризующей мнимический многочлен:

$$P_N(z; \ell) = \prod_{n=1}^N [z - z_n(\ell)] = z^N + \sum_{m=1}^N c_m(\ell) z^{N-m}. \quad (13)$$

Возможность получить “уравнения движения” для коэффициентов $c_m(\ell)$ сейчас исследуется: о результатах будет сообщено, если они окажутся достаточно ясными, чтобы быть достойными опубликования.

В работе [22] было показано, что, как и в случае непрерывного времени, простейшее применение подхода ОП в *дискретном времени* подразумевает использование подстановки, приводящей к моделям многих тел с *дискретным временем* типа модели золотой рыбки, несомненно обладающим свойством приводить к моделям с *непрерывным временем* типа модели золотой рыбки при предельном переходе от *дискретного* времени к *непрерывному*. На самом деле в работе [22] обсуждались только такие модели с *дискретным временем*, хотя там также упоминалась возможность получить и модели типа моделей КМ с помощью подстановки другого типа. Первая мотивировка представленного здесь исследования заключалась в том, чтобы последовать этому примеру, хотя результат не очевиден. Это направление развития представлено ниже, при этом мы фокусируем наше внимание на конкретном примере, что также позволяет проиллюстрировать некоторые особенности предлагаемого подхода.

Вторая мотивировка настоящей работы – сообщить о возможности так изменить некоторые задачи многих тел с *дискретным временем*, чтобы в результате получились *изохронные* варианты задачи, а именно чтобы они имели решения, почти все из которых являются периодическими с одинаковыми периодами. Простой прием, позволяющий получить подобный результат, – введенный ниже и иллюстрируемый простым примером – обладает поэтому эффектом, аналогичным (в контексте *дискретного времени*) тому, о котором мы вкратце упоминали выше в контексте *непрерывного времени*. Поскольку этот прием (см. (4)) существенным образом зависит от замены независимой переменной, его распространение на контекст *дискретного времени* не так уж тривиально, поскольку, как отмечено в самом конце работы [21], “в контексте дискретного времени отсутствует концепция замены независимой переменной”. Поэтому требуется несколько другая методология, однако, как показано в разделе 3, снова используется довольно простая процедура.

Настоящая работа в значительной степени мотивирована результатами, полученными в нашей предыдущей статье [22], однако мы попытаемся так представить настоящую работу, чтобы она была замкнута (действительно, потери за счет повторений для достижения этой цели минимальны). В следующем разделе вводится новый тип модели многих тел с *дискретным временем* и отмечено, как соответствующую ей задачу на *начальные значения* можно решить алгебраически, а также кратко обсуждаются ее поведение и некоторые ее особенности, включая (см. п 2.1) ее предел *непрерывного времени*. В то же время в разделе 3 рассмотрена другая простая решаемая задача многих тел с *дискретным временем* (очень специальный случай (10)) и представлена процедура получения ее *изохронного* варианта. Краткий раздел 4, озаглавленный “Перспективы”, завершает работу.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Исходной точкой нашего рассмотрения является следующая система двух линейных уравнений первого порядка, характеризующая эволюцию в дискретном времени ℓ двух $(N \times N)$ -матриц $U \equiv U(\ell)$ и $V \equiv V(\ell)$:

$$\tilde{U} = aU + \beta V, \quad \tilde{V} = aV. \quad (14)$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3. Смысл знака тильды сверху тот же, что и ранее (см. обозначение 2), так что, например, $\tilde{U} \equiv U(\ell+1)$; a и β – произвольные скалярные постоянные (обе ненулевые, $a \neq 0$, $\beta \neq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Система (14) совпадает с уравнением (3.22а) из работы [22] в специальном случае $a_+ = a_- = a$. Также заметим, что от постоянной a можно было бы избавиться с помощью следующего зависящего от ℓ рескейлинга зависимых переменных:

$$U(\ell) \Rightarrow a^\ell W_1(\ell), \quad V(\ell) \Rightarrow a^{\ell+1} W_2(\ell). \quad (15)$$

Однако мы предпочитаем не делать этого, поскольку присутствие априори произвольной постоянной a допускает более многообразную эволюцию (см. ниже).

Очевидно, что из системы (14) следует эволюция матрицы $U \equiv U(\ell)$ вида

$$U(\ell) = (B + C\ell)a^\ell, \quad (16a)$$

$$B = U(0), \quad C = \frac{U(1) - aU(0)}{a}. \quad (16b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для решения $U(\ell)$ (16) задачи на начальные значения для эволюционного уравнения с дискретным временем для $(N \times N)$ -матрицы (14) характерно наличие постоянной a , но не постоянной β . Действительно, легко видеть, что система двух эволюционных уравнений первого порядка с дискретным временем (14) соответствует одиночному эволюционному уравнению второго порядка

$$\tilde{\tilde{U}} - 2a\tilde{U} + a^2U = 0, \quad (17)$$

из которого исчезла постоянная β (однако заметим, что это матричное ОДУ второго порядка возникает, только если $\beta \neq 0$; действительно, если $\beta = 0$, то U удовлетворяет эволюционному уравнению первого порядка, см. первое из двух уравнений (14)).

Теперь предположим, что $(N \times N)$ -матрица $U \equiv U(\ell)$ является диагонализуемой, и пусть $R \equiv R(\ell)$ – диагонализующая ее $(N \times N)$ -матрица:

$$U \equiv RZR^{-1}, \quad U(\ell) \equiv R(\ell)Z(\ell)[R(\ell)]^{-1}, \quad (18a)$$

$$Z = \text{diag}[z_n], \quad Z(\ell) = \text{diag}[z_n(\ell)], \quad (18b)$$

где обозначение $z_n(\ell)$ для N собственных значений $(N \times N)$ -матрицы $U \equiv U(\ell)$ будет оправдано отождествлением этих величин с зависимыми переменными динамической системы с дискретным временем, которую мы получим и обсудим ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из формул (18) следует, что матрица $R(\ell)$ определяется с точностью до умножения справа на произвольную диагональную матрицу $D(\ell)$, $R(\ell) \Rightarrow R(\ell)D(\ell)$.

Теперь введем две $(N \times N)$ -матрицы $M(\ell)$ и $Y(\ell)$, определенные следующим образом:

$$M = R^{-1}\tilde{R}, \quad M(\ell) = [R(\ell)]^{-1}R(\ell+1), \quad (19a)$$

$$V = RY\tilde{R}^{-1}, \quad V(\ell) = R(\ell)Y(\ell)[R(\ell+1)]^{-1}, \quad (19b)$$

так что

$$V = RYM^{-1}R^{-1}, \quad V(\ell) = R(\ell)Y(\ell)[M(\ell)]^{-1}[R(\ell)]^{-1}. \quad (19b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Элемент свободы в определении матрицы $R(\ell)$ (см. замечание 4), ведет к тому, что матрица $M(\ell)$ определяется с точностью до “калибровочного преобразования”, что следует из введения в ее определение (19a) $(N \times N)$ -матрицы $[R(\ell)D(\ell)]^{-1} = [D(\ell)]^{-1}[R(\ell)]^{-1}$ вместо матрицы $[R(\ell)]^{-1}$ (и, разумеется, матрицы $R(\ell+1)D(\ell+1)$ вместо $R(\ell+1)$). Поэтому, как следствие произвольной природы диагональной матрицы $D(\ell)$, из N^2 элементов $(N \times N)$ -матрицы $M \equiv M(\ell)$ существенными оказываются только $N^2 - N$ элементов. Аналогичное утверждение справедливо для матрицы $Y \equiv Y(\ell)$.

Удобнее предполагать, что матрица U *исходно* диагональна:

$$U(0) = Z(0) \equiv \text{diag}[z_n(0)], \quad (20a)$$

откуда следует, что (с точностью до упомянутой выше неопределенности, см. замечание 5)

$$R(0) = I, \quad (20b)$$

здесь и ниже I – единичная $(N \times N)$ -матрица, т.е. покомпонентно $I_{nm} = \delta_{nm}$. Тогда легко видеть, что два матричных эволюционных уравнения (14) принимают вид

$$M\tilde{Z} = aZM + \beta Y, \quad M\tilde{Y} = aY\tilde{M}. \quad (21)$$

Согласно (186) первое из этих двух уравнений имеет покомпонентный вид

$$M_{nm} = \frac{\beta Y_{nm}}{\tilde{z}_m - az_n}, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (22)$$

и, используя эту формулу, легко видеть, что второе уравнение можно покомпонентно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N Y_{nk}\tilde{Y}_{km} \left(\frac{a}{\tilde{z}_m - az_k} - \frac{1}{\tilde{z}_k - az_n} \right) = 0, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Система (23) – система N^2 (алгебраических) уравнений, которые характеризуют эволюцию в дискретном времени N величин $z_n \equiv z_n(\ell)$ и N^2 величин $Y_{nm} \equiv Y_{nm}(\ell)$ (N из которых можно рассматривать как излишние, см. замечание 5). Теперь наша цель заключается в том, чтобы получить из этой системы другую систему из N уравнений, куда входят только N величин $z_n \equiv z_n(\ell)$. Для этого можно воспользоваться подстановкой $Y_{nm}(\ell) = g_m(\ell)$; такой метод использовался в работе [22], что привело к эволюции *по дискретному времени* типа золотой рыбки для N величин

$z_n \equiv z_n(\ell)$ (в рассматриваемом здесь случае это приводит к специальному подслучаю $a_+ = a_- = a$ из приведенного выше примера, см. (10); чтобы получить нужные результаты для этого случая, нужно применить некую простую предельную процедуру, см., например, (116)). Как отмечено в работе [22], нашей цели можно достичь и с помощью другой подстановки, которая имеет вид

$$Y_{nm} = \frac{f_m}{\tilde{z}_m - az_n}, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Первая мотивировка настоящей работы заключается в исследовании вытекающих отсюда результатов.

В самом деле, ясно, что если использовать тождество

$$\frac{1}{(\tilde{z}_k - az_n)(\tilde{z}_m - a\tilde{z}_k)} = \left(\frac{a}{\tilde{z}_m - a\tilde{z}_k} + \frac{1}{\tilde{z}_k - az_n} \right) \frac{1}{\tilde{z}_m - a^2z_n}, \quad (25)$$

то с помощью подстановки (24) система N^2 уравнений (23) примет вид

$$\sum_{k=1}^N f_k \left[\left(\frac{a}{\tilde{z}_m - a\tilde{z}_k} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tilde{z}_k - az_n} \right)^2 \right] = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (26)$$

и поэтому ее можно заменить следующими двумя системами N уравнений:

$$\sum_{k=1}^N f_k \left(\frac{1}{\tilde{z}_k - az_n} \right)^2 = 1, \quad n = 1, \dots, N, \quad (27a)$$

$$\sum_{k=1}^N f_k \left(\frac{a}{\tilde{z}_n - a\tilde{z}_k} \right)^2 = 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (27b)$$

Заметим, что единицу, появляющуюся в правой части этих двух систем, можно заменить на *произвольный* параметр (разумеется, n -независимый и одинаковый для обеих систем); это должно свестись к перенормировке N величин $f_k \equiv f_k(\ell)$.

Дальнейшая стратегия является сейчас стандартной (см. [22]), хотя также имеются некоторые интересные отличия от трактовки из работы [22], и одна из двух главных мотивировок настоящей работы как раз и состоит в том, чтобы их подчеркнуть.

Главное наблюдение, позволяющее продвигаться дальше, заключается в том, что как система (27a), так и система (27b) являются *линейными* системами N алгебраических уравнений для N величин f_k . Поэтому каждую из них можно решить посредством стандартной формулы Крамера, с помощью которой величина f_n выражается как отношение двух определителей. Пусть $f_n = \hat{f}_n(\tilde{z}_n; \underline{z}, \underline{\tilde{z}})$ – решение системы (27a), а $f_n = \check{f}_n(\tilde{z}_n; \underline{\tilde{z}}, \underline{z})$ – решение системы (27b). Заметим, что зависимость этих величин от *дискретного времени* ℓ проявляется только через зависимость от ℓ N независимых переменных $z_m \equiv z_m(\ell)$, $m = 1, \dots, N$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4. Выше и далее везде $\underline{z} \equiv \underline{z}(\ell)$ обозначает *неупорядоченный* набор N компонент $z_n \equiv z_n(\ell)$; аналогично для $\underline{\tilde{z}} \equiv \underline{\tilde{z}}(\ell + 1)$ и $\underline{\tilde{\tilde{z}}} \equiv \underline{\tilde{\tilde{z}}}(\ell + 2)$.

Таким образом, мы получаем три эквивалентных варианта уравнений движения *с дискретным временем* для координат $z_n \equiv z_n(\ell)$. Во-первых, подставляя выражение $\hat{f}_k(\underline{z}, \underline{\tilde{z}})$ в левую часть (276), получаем

$$\sum_{k=1}^N \hat{f}_k(\tilde{z}_k; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}) \left(\frac{a}{\tilde{z}_n - a\tilde{z}_k} \right)^2 = 1, \quad n = 1, \dots, N; \quad (28a)$$

во-вторых, подставляя выражение $f_k = \check{f}_k(\underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{z}})$ в левую часть (27a), получаем

$$\sum_{k=1}^N \check{f}_k(\tilde{z}_k; \underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{z}}) \left(\frac{1}{\tilde{z}_k - a\tilde{z}_n} \right)^2 = 1, \quad n = 1, \dots, N; \quad (28б)$$

и, в-третьих, просто записываем

$$\check{f}_n(\tilde{z}_n; \underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{z}}) = \hat{f}_n(\tilde{z}_n; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (28в)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим возможность реинтерпретировать второй вариант этих уравнений движения (28б), как аналог первого варианта (28a) с обращенным временем; сравним также с аналогичной ситуацией, описанной выше (см. замечание 1).

Из способа, которым были получены эти эволюционные уравнения, следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Решение задачи на начальные значения для модели многих тел с дискретным временем, характеризующейся тремя эквивалентными наборами эволюционных уравнений (28), обеспечивается N собственными значениями $z_n(\ell)$ матрицы $U(\ell)$ (16a), где теперь*

$$B = \text{diag}[z_n(0)], \quad C = \frac{U(1) - a \text{diag}[z_n(0)]}{a}, \quad (29a)$$

так что

$$U(\ell) = (1 - \ell) \text{diag}[z_n(0)] a^\ell + U(1) \ell a^{\ell-1}, \quad (29б)$$

где

$$U(1) = Q \text{diag}[z_n(1)] Q^{-1}, \quad (29в)$$

$$Q_{nm} = [z_m(1) - a z_n(0)]^{-2}, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (29г)$$

Заметим, что из (29a) следуют (16б) и (20a), в то время как из (29в) с учетом (29г) следуют (18a) при $\ell = 1$, (19a) при $\ell = 0$, (20б), а также (22) и (24) при $\ell = 0$ (и благодаря тому, что умножение $(N \times N)$ -матрицы Q справа на произвольную диагональную матрицу D , а следовательно, и введение некоторых произвольных множителей в правой части определения (29г) этой матрицы, не влияет на определение $U(1)$ в (29в)).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Очевидно, что из записанных выше эволюционных уравнений (см., в частности, (27)) следует

$$\check{f}_n(y_n; \underline{x}, \underline{y}) = \hat{f}_n(y_n; a^2 \underline{x}, \underline{y}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Поэтому три эквивалентных уравнения движения с *дискретным временем* (28) (см., в частности, (28в)) удовлетворяются тривиальным образом, если

$$\ddot{z} = a^2 z, \quad (31a)$$

откуда следует

$$z_n(\ell) = b_n^{(+)} a^\ell + b_n^{(-)} (-a)^\ell, \quad n = 1, \dots, N, \quad (31б)$$

где $2N$ постоянных $b_n^{(+)}$, $b_n^{(-)}$ можно назначить произвольным образом (или их легко связать с $2N$ начальными данными $z_n(0)$, $z_n(1)$). Однако ясно (см. (17) и (16a) и, в частности, случай $N = 1$, рассматриваемый ниже в замечании 8), что это следует рассматривать как *ложное* решение трех эквивалентных систем (28), а именно, решение, не согласующееся в общем случае с предложением 1 (хотя ясно, что подкласс решений (31б), где $b_n^{(-)} = 0$, соответствующий решению набора уравнений первого порядка с *дискретным временем* $\tilde{z}_n = az_n$, из которых следует уравнение второго порядка (31a), но не наоборот, в самом деле принадлежит классу решений, описываемых предложением 1, см. специальный случай (16a) при $C = 0$, что дает матрицу $U(\ell)$, собственные значения которой, очевидно, изменяются согласно (31б) при $b_n^{(-)} = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При $N = 1$ из приведенного выше рассмотрения с очевидностью следует (см. (28a))

$$\hat{f}_1(\tilde{z}_1; z_1, \tilde{z}_1) = (\tilde{z}_1 - az_1)^2, \quad \check{f}_1(\tilde{z}_1; \tilde{z}_1, \tilde{z}_1) = \left(\tilde{z}_1 - \frac{\tilde{z}_1}{a} \right)^2, \quad (32)$$

поэтому все три уравнения (28) принимают вид

$$a^2(\tilde{z}_1 - az_1)^2 = (\tilde{z}_1 - a\tilde{z}_1)^2, \quad (33)$$

что для $\tilde{z}_1$ дает два значения

$$\tilde{z}_1 = a^2 z_1, \quad (34a)$$

$$\tilde{z}_1 = 2a\tilde{z}_1 - a^2 z_1. \quad (34б)$$

Значение (34a) воспроизводит *ложное* решение (31a), а решение (34б), очевидно, согласуется с предложением 1 (см., в частности, (17)), что при $N = 1$ дает

$$z_1(\ell) = \left[z_1(0) + \frac{z_1(1) - az_1(0)}{a} \ell \right] a^\ell. \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. При $N = 2$ приведенные выше рассуждения дают

$$\hat{f}_1(\tilde{z}_1; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}) = \frac{(\tilde{z}_1 - az_1)^2 (\tilde{z}_1 - az_2)^2 [2\tilde{z}_2 - a(z_1 + z_2)]}{(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) [2\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 - a(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)(z_1 + z_2) + 2a^2 z_1 z_2]}, \quad (36a)$$

$$\hat{f}_2(\tilde{z}_2; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}) = \frac{-(\tilde{z}_2 - az_2)^2 (\tilde{z}_2 - az_1)^2 [2\tilde{z}_1 - a(z_1 + z_2)]}{(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) [2\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 - a(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)(z_1 + z_2) + 2a^2 z_1 z_2]}. \quad (36б)$$

Путем несколько утомительных вычислений (включающих устранение ложных решений, см. замечание 7) находим, что уравнения движения в *дискретном времени*

можно сформулировать следующим образом: дважды сдвинутые координаты $\tilde{z}_n \equiv z_n(\ell + 2)$ выражаются в терминах двух несдвинутых координат $z_m \equiv z_m(\ell)$ и двух однократно сдвинутых координат $\tilde{z}_m \equiv z_m(\ell + 1)$ через два корня многочлена по скалярной переменной z

$$P_2(z; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}) = z^2 - 2hz + F, \quad (37a)$$

$$h(\underline{z}, \underline{\tilde{z}}) = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 - \frac{a(z_1 + z_2)}{2}, \quad F = h^2 - H^2, \quad (37б)$$

$$\begin{aligned} [H(\underline{z}, \underline{\tilde{z}})]^2 &= \frac{1}{4} [2\tilde{z}_1 - a(z_1 + z_2)] [2\tilde{z}_2 - a(z_1 + z_2)] \times \\ &\times \left[1 + \frac{2(\tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2)}{2\tilde{z}_1\tilde{z}_2 - a(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)(z_1 + z_2) + 2a^2 z_1 z_2} \right], \end{aligned} \quad (37в)$$

откуда следует

$$\tilde{z}_n \equiv z_n(\ell + 2) = h(\underline{z}, \underline{\tilde{z}}) + (-1)^n H(\underline{z}, \underline{\tilde{z}}), \quad n = 1, 2. \quad (37г)$$

Решением задачи на начальные значения для этих эволюционных уравнений с *дискретным временем* являются, как следует из предложения 1, два собственных значения следующей (2×2) -матрицы:

$$U(\ell) = \begin{pmatrix} z_1(0) & 0 \\ 0 & z_2(0) \end{pmatrix} (1 - \ell)a^\ell + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \frac{a^{\ell-1}}{\Delta}, \quad (38a)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{[z_1(1) - az_1(0)]^2 [z_2(1) - az_2(0)]^2} - \frac{1}{[z_1(1) - az_2(0)]^2 [z_2(1) - az_1(0)]^2}, \quad (38б)$$

$$u_{11} = \frac{z_1(1)}{[z_1(1) - az_1(0)]^2 [z_2(1) - az_2(0)]^2} - \frac{z_2(1)}{[z_1(1) - az_2(0)]^2 [z_2(1) - az_1(0)]^2}, \quad (38в)$$

$$u_{22} = \frac{z_2(1)}{[z_1(1) - az_1(0)]^2 [z_2(1) - az_2(0)]^2} - \frac{z_1(1)}{[z_1(1) - az_2(0)]^2 [z_2(1) - az_1(0)]^2}, \quad (38г)$$

$$u_{12} = \frac{z_2(1) - z_1(1)}{[z_1(1) - az_1(0)]^2 [z_2(1) - az_1(0)]^2}, \quad (38д)$$

$$u_{21} = \frac{z_1(1) - z_2(1)}{[z_2(1) - az_2(0)]^2 [z_1(1) - az_2(0)]^2}. \quad (38е)$$

Завершим данный раздел кратким обсуждением поведения введенной выше модели многих тел с *дискретным временем* (см. уравнения движения (28) с учетом (27) и решения соответствующей им задачи на начальные значения, задаваемой предложением 1). Предполагается, что далее мы будем работать с *комплексными* числами, а именно предположим, что как зависимые переменные $z_n \equiv z_n(\ell)$, так и постоянная a – *комплексные* числа. В частности, запишем

$$a = e^{q+ir}, \quad (39)$$

где q и r – вещественные числа. На самом деле вместо того чтобы рассматривать комплексные числа, мы ограничимся рассмотрением действительных, а на самом

деле неотрицательных целых значений независимой переменной дискретного времени $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

Из (16а) ясно, что если $q < 0$, а значит, $|a| < 1$, то матрица $U(\ell)$ асимптотически обращается в нуль, поэтому все координаты $z_n(\ell)$ также асимптотически обращаются в нуль (по крайней мере, с модулем, пропорциональным $\ell|a|^\ell$ при $\ell \rightarrow \infty$). Наоборот, если $q > 0$, а значит, $|a| > 1$, то все координаты $z_n(\ell)$ асимптотически расходятся (по крайней мере, с модулем, пропорциональным $|a|^\ell$ при $\ell \rightarrow \infty$).

Результат содержит больше нюансов, если параметр q обращается в нуль, $q = 0$, и поэтому $|a| = 1$: в этом случае результат существенно зависит от того, является ли $(N \times N)$ -матрица C , определяемая через начальные данные формулами (29), диагонализуемой, и диагонализуема ли она на значениях своих N собственных значений λ_n . Таким образом, в этом случае качественное поведение системы существенно зависит от начальных данных. Оставшаяся часть данного раздела посвящена обсуждению этого случая, однако для простоты мы ограничимся анализом случая диагонализуемой матрицы,

$$C = S \operatorname{diag}[\lambda_k, k = 1, \dots, N] S^{-1}, \quad (40a)$$

причем данная формула вместе с (29а) определяет кроме N собственных значений λ_n еще и диагонализующую матрицу S (разумеется, с точностью до умножения справа на произвольную диагональную матрицу). Тогда, очевидно, из предложения 1 следует, что при $\ell \rightarrow \infty$ имеем

$$z_n(\ell) = \left[\lambda_n \ell + \mu_n + O\left(\frac{1}{\ell}\right) \right] e^{ir\ell}, \quad (40б)$$

где μ_n – диагональные элементы матрицы $SBS^{-1} = S \operatorname{diag}[z_k(0), k = 1, \dots, N] S^{-1}$ (снова см. (29а)), т. е.

$$\mu_n = \sum_{k=1}^N S_{nk} z_k(0) (S^{-1})_{kn}. \quad (40в)$$

Таким образом, в этом случае для начальных данных *общего положения* N координат $z_n(\ell)$ уходят на бесконечность (при этом их модули растут линейно) при $\ell \rightarrow \infty$. Однако если N_0 ($0 < N_0 < N$) собственных значений λ_n обращаются в нуль, что вполне может произойти для N -мерного специального подмножества коразмерности N_0 $2N$ -мерного множества начальных данных $z_n(0)$, $z_n(1)$, то движение N_0 из N координат $z_n(\ell)$ (напомним, что координаты помечаются произвольным образом) остается в пределах *конечной* части комплексной z -плоскости в течение всей временной эволюции, и эта эволюция в самом деле является *асимптотически периодической* (с точностью до поправок, обращающихся в нуль пропорционально $1/\ell$ при $\ell \rightarrow \infty$), если r равно *рациональному* числу, умноженному на 2π ; а именно, если $r = 2\pi j/L$, где j и L – два *взаимно простых целых* числа и, скажем, L – *положительное* число, то имеется N_0 координат, для которых имеет место асимптотическое свойство (при $\ell \rightarrow \infty$)

$$z_n(\ell) = \mu_n e^{2\pi i j \ell / L} + O\left(\frac{1}{\ell}\right), \quad (41a)$$

откуда следует (при $\ell \rightarrow \infty$)

$$z_n(\ell + L) = z_n(\ell) + O\left(\frac{1}{\ell}\right). \quad (416)$$

2.1. Предел непрерывного времени. Чтобы выполнить переход от независимой переменной *дискретного времени* ℓ к переменной *непрерывного времени* t , сделаем формальные замены

$$\ell \Rightarrow \frac{t}{\varepsilon}, \quad \ell + 1 \Rightarrow \frac{t + \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \ell + 2 \Rightarrow \frac{t + 2\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (42a)$$

$$a \Rightarrow 1 + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 \quad (426)$$

и (слегка злоупотребляя обозначениями)

$$z_n(\ell) \Rightarrow z_n(t),$$

$$\tilde{z}_n(\ell) \equiv z_n(\ell + 1) \Rightarrow z_n(t) + \varepsilon \dot{z}_n(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \ddot{z}_n(t) + O(\varepsilon^3), \quad (42b)$$

$$\tilde{\tilde{z}}_n(\ell) \equiv z_n(\ell + 2) \Rightarrow z_n(t) + 2\varepsilon \dot{z}_n(t) + 2\varepsilon^2 \ddot{z}_n(t) + O(\varepsilon^3),$$

где ε инфинитезимально. Тогда посредством стандартных алгебраических вычислений можно проверить, что эта подстановка дает следующие формулы:

$$\tilde{z}_n - az_n = \varepsilon(\dot{z}_n - \alpha z_n) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\ddot{z}_n - 2\beta z_n}{\dot{z}_n - \alpha z_n} + O(\varepsilon^2) \right], \quad (43a)$$

$$\tilde{z}_k - az_n = (z_k - z_n) \left[1 + \varepsilon \frac{\dot{z}_k - \alpha z_n}{z_k - z_n} + O(\varepsilon^2) \right], \quad k \neq n, \quad (436)$$

$$\tilde{\tilde{z}}_n - a\tilde{z}_n = \varepsilon(\dot{z}_n - \alpha z_n) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{3\ddot{z}_n - 2\alpha\dot{z}_n - 2\beta z_n}{\dot{z}_n - \alpha z_n} + O(\varepsilon^2) \right], \quad (43b)$$

$$\tilde{\tilde{z}}_n - a\tilde{z}_k = (z_n - z_k) \left[1 + \varepsilon \frac{2\dot{z}_n - \dot{z}_k - \beta z_k}{z_n - z_k} + O(\varepsilon^2) \right], \quad k \neq n. \quad (43g)$$

Таким образом, в рассматриваемом пределе из (27a) получаем

$$\hat{f}_n = \varepsilon^2(\dot{z}_n - \alpha z_n)^2 \left[1 + \varepsilon \frac{\ddot{z}_n - 2\beta z_n}{\dot{z}_n - \alpha z_n} + O(\varepsilon^2) \right] \quad (44a)$$

и аналогично из (276) (поскольку из (426) с очевидностью следует, что $a^{-2} = 1 - 2\varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2)$) имеем

$$\check{f}_n = \varepsilon^2(\dot{z}_n - \alpha z_n)^2 \left[1 + \varepsilon \left(\frac{3\ddot{z}_n - 2\alpha\dot{z}_n - 2\beta z_n}{\dot{z}_n - \alpha z_n} - 2\alpha \right) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (446)$$

Приравнявая эти две формулы (см., например, (28b)), получаем, как предел *непрерывного времени* в уравнениях движения с *дискретным временем* (28), не что иное, как линейные уравнения движения:

$$\ddot{z}_n = 2\alpha\dot{z}_n - \alpha^2 z_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Это согласуется с тем фактом, что в пределе *непрерывного времени* соотношение

$$M_{nm} = \frac{\beta f_m}{(\dot{z}_m - az_n)^2}, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (46)$$

из которого следует формула (22), а подстановка (24) принимает вид (с учетом (44a) и формул (43a) и (43б))

$$M_{nm} = \beta \delta_{nm} + O(\varepsilon^2), \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (47a)$$

а именно, в пределе *непрерывного времени* подстановка (24) просто приводит к

$$M = \beta I[1 + O(\varepsilon^2)]. \quad (47б)$$

С другой стороны, в пределе *непрерывного времени* (снова, с учетом легкого насилия над обозначениями) имеем

$$\tilde{R} \equiv R(\ell + 1) = R(t) + \varepsilon \dot{R}(t) + O(\varepsilon^2), \quad (48)$$

поэтому соотношение (19a), т. е.

$$\tilde{R} = RM, \quad (49)$$

в этом пределе принимает вид

$$R + \varepsilon \dot{R} = RM + O(\varepsilon^2). \quad (50)$$

Отсюда, используя (47б), получаем

$$\dot{R} = \frac{\beta - 1}{\varepsilon} I + O(\varepsilon), \quad (51a)$$

что с учетом (20б) дает

$$R(t) = I \left(1 + \frac{\beta - 1}{\varepsilon} t \right) + O(\varepsilon). \quad (51б)$$

Подстановка в (18a) этого выражения для предела *непрерывного времени* $R(t)$ (который сам следует из предела *непрерывного времени* для подстановки (24)) дает

$$U(t) = Z(t) + O(\varepsilon). \quad (52)$$

Из этой формулы ясно, что (45) согласуется с (17).

Таким образом, мы видим, что в пределе *непрерывного времени* подстановка (24) становится довольно тривиальной. Поэтому она приводит не к нелинейной задаче многих тел типа КМ (в отличие от того, что предполагалось в работе [22]), а к довольно тривиальной модели, которая характеризуется *несвязными* и *линейными* ньютоновскими уравнениями движения (45), общее решение которых, очевидно, имеет вид

$$z_n(t) = (a_n + b_n t) e^{\alpha t}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (53a)$$

Здесь a_n и $b_n - 2N$ произвольных постоянных, связанных с начальными данными следующим образом:

$$a_n = z_n(0), \quad b_n = \dot{z}_n(0) - \alpha z_n(0). \quad (53б)$$

Из этих формул видно, что кроме тривиального *равновесного* случая $z_n(0) = \dot{z}_n(0) = 0$, из которого следует $z_n(t) = 0$, асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ координаты $z_n(t)$ в основном определяется значением *вещественной* части параметра α : если $\operatorname{Re} \alpha$ *положительно*, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, то координата $z_n(t)$ расходится (по меньшей мере) пропорционально (по модулю) $e^{\alpha t}$, а если $\operatorname{Re} \alpha$ *отрицательно*, $\operatorname{Re} \alpha < 0$, то координата $z_n(t)$ обращается в нуль (по меньшей мере) пропорционально (по модулю) $te^{\alpha t}$. Если же α является *мнимым*, $\alpha = i\omega$, где ω – *вещественное* и *ненулевое* число, то для начальных данных *общего положения* $z_n(0), \dot{z}_n(0)$ координата $z_n(t)$ линейно уходит в бесконечность при $t \rightarrow \infty$, в то время как для специальных начальных данных таких, что $\dot{z}_n(0) = \alpha z_n(0)$, это движение, напротив, ограничено *конечной* частью *комплексной* z -плоскости и действительно является периодическим с периодом $T = 2\pi/|\omega|$.

Однако следует подчеркнуть, что из простоты ньютоновских уравнений движения (45), полученных в пределе *непрерывного времени*, не следует, что уравнения движения с *дискретным временем* (28) с учетом (27) сами являются тривиальными; на самом деле это становится очевидным лишь при достаточно подробном анализе случая $N = 2$ (см. замечание 9).

3. ИЗОХРОНИЗАЦИЯ

В настоящем разделе мы покажем, как некоторые (*автономные*) динамические системы с *дискретным временем* можно модифицировать так, чтобы получаемые таким образом их также *автономные* варианты являлись *изохронными*, а именно: чтобы они обладали решениями, *почти все* из которых являются периодически с одинаковыми фиксированными периодами, независимо от начальных данных (однако имеется еще одно соображение по поводу этого утверждения, см. ниже замечание 10). Этот метод мы проиллюстрируем, подробно разобрав принцип его работы для довольно простого случая; мы уверены, что вполне достаточно показать, какая простая идея кроется за его применением и как данный подход можно было бы применить в более общем случае.

В качестве исходной точки выберем специальный случай $(N \times N)$ -матричного эволюционного уравнения (14) при $a = 1$, которое имеет вид

$$\tilde{U} = U + \beta V, \quad \tilde{V} = V, \quad (54)$$

где β – ненулевая произвольная скалярная постоянная. Решение соответствующей задачи на начальные значения, очевидно, имеет вид

$$V(\ell) = V(0), \quad U(\ell) = U(0) + \beta V(0)\ell, \quad (55a)$$

или, эквивалентно, для матрицы U :

$$U(\ell) = U(0) + [U(1) - U(0)]\ell. \quad (55b)$$

Ясно, что ни $(N \times N)$ -матрица $U \equiv U(\ell)$, ни ее N собственных значений $z_n(\ell)$ не могут изменяться периодически по ℓ (кроме тривиального случая, соответствующего равновесной конфигурации, в котором они вообще не изменяются).

Теперь *модифицируем* матричную эволюционную систему (54), предполагая, что величина β , вместо того чтобы быть *постоянным* параметром, сама изменяется

(подходящим образом) в *дискретном времени*. Тогда *модифицированная* матричная эволюция, которая в дальнейшем будет исходной точкой нашего рассмотрения, примет вид

$$\tilde{U} = U + \beta V, \quad \tilde{V} = V, \quad \tilde{\beta} = \eta\beta, \quad (56)$$

где η – произвольное число, которое мы выбираем удобным для нас образом (см. ниже). Будем считать, что тот факт, что мы сохранили одинаковые обозначения для матриц U и V , не вызовет замешательства; в любом случае, подчеркнем еще раз, что в дальнейшем мы будем предполагать, что две эти матрицы, $U \equiv U(\ell)$, $V \equiv V(\ell)$, а также скаляр $\beta \equiv \beta(\ell)$ изменяются в *дискретном времени* ℓ согласно системе (56). Разумеется, при $\eta = 1$ эта система должна сводиться к системе (54).

Очевидно, что решение задачи на начальные значения, получаемое с помощью такой системы для скаляра β и $(N \times N)$ -матрицы U , имеет вид

$$\beta(\ell) = \beta(0)\eta^\ell, \quad (57a)$$

$$U(\ell) = U(0) + [U(1) - U(0)] \frac{\eta^\ell - 1}{\eta - 1}. \quad (57b)$$

Заметим, что для специального выбора

$$\eta = e^{2\pi i K/L}, \quad (58)$$

где K и L – взаимно простые целые числа, скажем $L \geq 2$, как β , так и U изменяются периодически с фиксированным периодом L :

$$\beta(\ell + L) = \beta(\ell), \quad U(\ell + L) = U(\ell). \quad (59)$$

Далее мы действуем так же, как и выше; следует просто проверить, что это можно сделать, даже если скаляр β теперь зависит от ℓ . Очевидно, что рассмотрение вплоть до (22) тождественно приведенному выше, а вместо системы (23) теперь имеем

$$\sum_{k=1}^N Y_{nk} \tilde{Y}_{km} \left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_k} - \frac{\beta}{\tilde{z}_k - z_n} \right) = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (60a)$$

или, эквивалентно, с учетом (57a)

$$\sum_{k=1}^N Y_{nk} \tilde{Y}_{km} \left[\frac{\eta}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_k} - \frac{1}{\tilde{z}_k - z_n} \right] = 0, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (60b)$$

Теперь воспользуемся подстановкой, которая использовалась в работе [22] для получения задач многих тел с *дискретным временем* типа золотой рыбки, вида

$$Y_{nm} = g_m, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (61)$$

где мы оставляем за собой право назначать значения N величинам g_m . Поэтому следующее построение ближе аналогичному построению в работе [22], чем тому, которое мы подробно рассмотрели выше; приведенное ниже рассуждение является самодостаточным, однако читатели, интересующиеся подробностями, могут обратиться к

аналогичным рассуждениям из разделов 2 и 3 работы [22] (см., в частности, разделы 2.1 и 3.1, если там положить $a = 1$, что в некоторых случаях может потребовать взятия подходящего предела).

Из подстановки (61) следует, что система N^2 уравнений (60a) имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \left[\frac{g_k \eta}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_k} - \frac{g_k}{\tilde{z}_k - z_n} \right] = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (62)$$

поэтому ее можно заменить на следующие две системы, в каждую из которых входят только N уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\tilde{z}_k - z_n} = 1, \quad n = 1, \dots, N, \quad (63a)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{g_k \eta}{\tilde{z}_n - \tilde{z}_k} = 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (63b)$$

Следующий шаг заключается в том, чтобы решить эти два набора N линейных уравнений для N величин g_k . Вследствие их более аккуратного вида по сравнению с аналогичными уравнениями (28) их решения теперь можно получить более явно [22], чем просто как отношение двух определителей. Пусть $g_k = \hat{g}_k(\tilde{z}_k; \underline{z}, \underline{\tilde{z}})$ – решение уравнений (63a), а $g_k = \check{g}_k(\tilde{z}_k; \underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{z}})$ – решение уравнений (63b). Тогда действительно получим

$$\hat{g}_k(\tilde{z}_k; \underline{z}, \underline{\tilde{z}}) = (\tilde{z}_k - z_k) \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\tilde{z}_k - z_j}{\tilde{z}_k - \tilde{z}_j}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (64a)$$

$$\check{g}_k(\tilde{z}_k; \underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{z}}) = \frac{\tilde{z}_k - \tilde{z}_k}{\eta} \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\tilde{z}_j - \tilde{z}_k}{\tilde{z}_j - \tilde{z}_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (64b)$$

Далее, с помощью следующей, на настоящий момент стандартной, процедуры получим три эквивалентных варианта эволюционных уравнений второго порядка с *дискретным временем*, которым удовлетворяют N величин $z_n(\ell)$: 1) подставим выражение (64a) для g_k в (63b); 2) подставим выражение (64b) для g_k в (63a); 3) приравняем друг другу два выражения (64a) и (64b) для g_k .

Первый вариант имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \left[\frac{\tilde{z}_k - z_k}{\tilde{z}_n - \tilde{z}_k} \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\tilde{z}_k - z_j}{\tilde{z}_k - \tilde{z}_j} \right] = \frac{1}{\eta}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (65a)$$

и легко показать [22], что более аккуратный вариант этих уравнений имеет вид

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_n - z_j}{\tilde{z}_n - \tilde{z}_j} = \frac{1 + \eta}{\eta}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (65b)$$

Второй вариант имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \left[\frac{\tilde{z}_k - \tilde{z}_k}{\tilde{z}_k - z_n} \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\tilde{z}_j - \tilde{z}_k}{\tilde{z}_j - \tilde{z}_k} \right] = \eta, \quad n = 1, \dots, N, \quad (66a)$$

и снова легко показать [22], что более аккуратный вариант этих уравнений имеет вид

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_j - z_n}{\tilde{z}_j - \tilde{z}_n} = 1 + \eta, \quad n = 1, \dots, N. \quad (66б)$$

Третий вариант имеет вид

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_j - \tilde{z}_n}{z_j - \tilde{z}_n} = -\eta, \quad n = 1, \dots, N. \quad (67)$$

Для анализа сходства и различия этих трех эквивалентных наборов уравнений движения с дискретным временем, (65б), (66б) и (67), обратимся к обсуждению, приведенному выше, после того, как мы привели три аналогичных набора (10) уравнений движения по дискретному времени, которые в действительности совпадают с (65б), (66б) и (67) при $a_+ = 1$ и $a_- = \eta$. Приведем также вид, который принимают три набора (10) уравнений движения по дискретному времени при $a_+ = a_- = 1$, поскольку очевидно, что эти уравнения движения – это не что иное, как уравнения, получаемые из системы (54) в случае, когда β является ненулевой произвольной скалярной постоянной (они действительно соответствуют трем записанным выше уравнениям (65б), (66б) и (67) при $\eta = 1$):

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_n - z_j}{\tilde{z}_n - \tilde{z}_j} = 2, \quad n = 1, \dots, N, \quad (68а)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{\tilde{z}_j - z_n}{\tilde{z}_j - \tilde{z}_n} = 2, \quad n = 1, \dots, N, \quad (68б)$$

$$\prod_{j=1, j \neq n}^N \frac{\tilde{z}_j - \tilde{z}_n}{z_j - \tilde{z}_n} = -1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (68в)$$

Теперь становится ясно, что если параметру η приписать значение (58), то три эквивалентных набора уравнений движения по дискретному времени (65б), (66б) и (67) будут не чем иным, как изохронизованными вариантами трех эквивалентных наборов уравнений движения. Действительно, нетрудно видеть [22], что теперь имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Решение задачи на начальные значения для модели многих тел с дискретным временем, характеризующейся тремя эквивалентными наборами эволюционных уравнений (65б), (66б) и (67), дается N собственными значениями $z_n(\ell)$ матрицы $U(\ell)$ (57б), где

$$U(0) = \text{diag}[z_n(0)], \quad [U(0)]_{nm} = \delta_{nm} z_n(0), \quad (69а)$$

$$U(1) = U(0) + V(0), \quad (69б)$$

$$[V(0)]_{nm} = v_m = \frac{\prod_{j=1}^N [z_j(1) - z_m(0)]}{\prod_{j=1, j \neq m}^N [z_j(0) - z_m(0)]}, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (69в)$$

Из полученного здесь более аккуратного варианта следует лемма А.4 работы [22] (см. уравнения (А.16) из этой работы), где положено

$$\zeta_n = z_n(0), \quad \eta_m = v_m \frac{\eta^\ell - 1}{\eta - 1}, \quad (70)$$

а v_m определено, как выше (см. (69в)). Здесь утверждается, что N значений $z_n(\ell)$, дающих решение задачи на начальные значения для задачи многих тел с дискретным временем, которая характеризуется тремя эквивалентными наборами эволюционных уравнений (656), (666) и (67), являются N нулями следующих уравнений на переменную z :

$$\sum_{m=1}^N \frac{v_m}{z - z_m(0)} = \frac{\eta - 1}{\eta^\ell - 1}, \quad (71)$$

где v определяется формулой (69в) в терминах начальных данных. После умножения на многочлен $\prod_{k=1}^N [z - z_k(0)]$ это превращается, разумеется, в явно зависящее от ℓ полиномиальное уравнение степени N на z .

И даже более аккуратный вариант, получаемый из (71) с учетом выражения (69в) для v_m с помощью тождества (А.10) из работы [22] (где положено $\eta_m = z_m(0)$ и $\zeta_m = z_m(1)$), утверждает, что N значений $z_n(\ell)$, дающих решение задачи на начальные значения для задачи многих тел с дискретным временем, которая характеризуется тремя эквивалентными наборами эволюционных уравнений (656), (666) и (67), являются N нулями следующего многочлена степени N по переменной z :

$$(\eta^\ell - \eta) \prod_{m=1}^N [z - z_m(0)] = (\eta^\ell - 1) \prod_{m=1}^N [z - z_m(1)]. \quad (72)$$

Из полученных результатов видно, что если определить η , как в (58), то все эти решения являются периодическими с периодом L (с учетом следующего замечания 10), а решения трех эквивалентных наборов уравнений движения (68), конечно же, не являются периодическими и ясно выражаются неким предложением, тождественным предложению 2, за исключением того, что там следует положить $\eta = 1$ (заметим, что для такого случая (576) принимает вид (556), а правая часть (71) становится равной просто $1/\ell$).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Мы показали, что задачу многих тел с дискретным временем, которая характеризуется тремя эквивалентными наборами уравнений движения (656), (666) и (67) с учетом (58), можно рассматривать как *изохронизованный* вариант задачи многих тел с дискретным временем, которая характеризуется тремя эквивалентными наборами уравнений движения (68), к которым она редуцируется при $\eta = 1$, коль скоро решения уравнений движения (68), конечно, не являются периодическими, а решения уравнений движения (656), (666) или (67) с учетом (58) почти все являются периодическими с фиксированным периодом L и задаются N собственными значениями $z_n(\ell)$ ($N \times N$)-матрицы $U(\ell)$ (576) с учетом (69), которая сама, разумеется, является периодической с фиксированным периодом L (см. (59)). Однако еще два момента требуют дальнейших исследований.

Во-первых, необходимо исследовать возможность того, что в какой-то момент эволюции матрица $U(\ell)$ по дискретному времени может перестать быть диагонализуемой или ее собственные значения могут приобрести значения, которые делают уравнения движения сингулярными или, скорее, неопределенными вследствие обращения в нуль некоторого знаменателя. Ясно, что это явление, если оно вообще возможно, может возникнуть только для наборов начальных данных не общего положения, $z_n(0), z_n(1)$, имеющих *ненулевую коразмерность* в $2N$ -мерном комплексном пространстве всех возможных начальных данных. Это оправдывает то, что мы предусмотрительно использовали термин *почти все* (а не *все*) при определении периодических решений *изохронизованной* системы.

Во-вторых, напомним, что периодичность связана, разумеется, с *неупорядоченными* наборами N (комплексных) чисел $z(\ell)$, изменяющихся во времени. С другой стороны, если сосредоточиться на временной эволюции каждой координаты $z_n(\ell)$, то временная эволюция, которая описывается уравнениями движения с *дискретным временем* (656), (666) или (67) с учетом (58), *изохронизованной* модели должна быть, например, дополнена правилом *случайного* выбора, которое следует применять на каждом шаге ℓ -эволюции, в том, что касается соотношения их N меток N координатам *неупорядоченного* набора комплексных чисел $z(\ell)$. Это привело бы к внесению элемента *случайности* – в соответствии с уравнениями движения *изохронизованной* модели – в эволюцию каждой отдельной координаты *по дискретному времени*, скажем в эволюцию координаты $z_1(\ell)$, что с очевидностью отрицало бы любую возможность того, что эта эволюция может быть *периодической*: хотя, разумеется, с течением времени координата $z_1(\ell)$ должна быть ограничена так, чтобы принимать не более LN возможных значений, она может перескакивать с одного значения на другое *случайным*, и потому не периодическим образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Редукция уравнений движения (68) к *непрерывному времени* – не что иное, как уравнения движения (2а) стандартной модели золотой рыбки, их *изохронный* вариант, который можно получить, применив подходящим образом процедуру *изохронизации*, описанную в разделе 1, имеет простой вид

$$\ddot{z}_n = i\omega \dot{z} + 2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (73a)$$

Решение $z_n(t)$ задачи на начальные значения для этих *изохронных* уравнений движения дается (см., например, работу [8]) N корнями следующего уравнения на z :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0)}{z - z_n(0)} = \frac{i\omega}{e^{i\omega t} - 1}, \quad (73б)$$

которое представляет собой соответствующим образом *изохронизованный* вариант уравнения (2б) и аналогично принимает вид многочлена степени N по z после умножения на многочлен $\prod_{m=1}^N [z - z_m(0)]$. Ясно, что *неупорядоченный* набор $z(t)$ этих N корней является периодическим с периодом $T = 2\pi/\omega$, как и зависящая от t правая часть (73б). Однако на самом деле в этом случае *непрерывного времени* каждый корень определен индивидуально (*непрерывностью* эволюции во времени) и каждый из них изменяется периодически, хотя и с периодом, который может быть *целым*

множителем ν величины T , из-за возможности того, что различные корни меняют свою роль в течение временной эволюции (подробный анализ этой феноменологии приведен в работе [23], где также объясняется, почему можно ожидать, что целое число ν в общем случае должно быть малым).

Это наблюдение подтверждает, что по крайней мере для данного примера метод *изохронизации* для моделей с *дискретным временем*, как было показано в настоящем разделе, можно рассматривать как естественное расширение до контекста *дискретного времени* хорошо известного метода *изохронизации*, примененного в контексте *непрерывного времени*, рассмотренного исключительно подробно в работе [8] и кратко в разделе 1 настоящей работы.

4. ПЕРСПЕКТИВЫ

Вероятно, есть и другие *решаемые* модели с *дискретным временем*, которые можно отождествить с помощью методов, предложенных здесь и в предшествующей работе [22]. О любой такой модели будет в конце концов сообщено, если она будет признана достаточно новой и ясной, чтобы быть достойной опубликования. Наша модель, которую мы здесь передаем внимательному читателю в качестве несложного упражнения, заключается в том, чтобы взять в качестве исходной точки следующие *решаемые* матричные эволюционные уравнения с *дискретным временем*:

$$\tilde{U} = aU + \beta V, \quad \tilde{V} = V, \quad \tilde{\beta} = \eta\beta, \quad (74)$$

где a и η — два априори произвольных числа. Эта модель совпадает с моделью, которая обсуждается в разделе 3 (см. (56)), если $a = 1$. Заинтересованный читатель обнаружит, что, используя очень похожее на описанное в разделе 3 рассмотрение, легко получить *решаемую* модель многих тел с *дискретным временем*, которая при произвольном a обобщает результаты раздела 3 и, если $|a| < 1$ и η определено, как в (58), демонстрирует свойство *асимптотической изохронности*, а именно (с учетом рассмотрения в духе замечания 10) *почти все* его решения в отдаленном будущем (т. е. если независимая переменная *дискретного времени* ℓ стремится к положительной бесконечности, $\ell \rightarrow \infty$) становятся периодическими с периодом L с точностью до поправок, обращающихся в нуль (по модулю) пропорционально $|a|^\ell$.

Список литературы

- [1] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **12**:3 (1971), 419–436; Erratum, **37**:7 (1996), 3646.
- [2] J. Moser, *Adv. Math.*, **16**:2 (1975), 197–220.
- [3] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Lett. Nuovo Cimento*, **16**:11 (1976), 333–339.
- [4] F. Calogero, *Nuovo Cimento B*, **43**:2 (1978), 177–241.
- [5] F. Calogero, *Physica D*, **152/153** (2001), 78–84.
- [6] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [7] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, **66**, Springer, Berlin, 2001.
- [8] F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [9] F. Calogero, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **17**:3 (2010), 397–414.
- [10] Ф. Калоджеро, *ТМФ*, **167**:3 (2011), 364–376.
- [11] Ф. Калоджеро, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 241–253.

- [12] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **52**:10 (2011), 102702, 5 pp.
- [13] F. Calogero, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **19**:1 (2012), 125006, 19 pp.
- [14] А. П. Веселов, *УМН*, **46**:5(281) (1991), 3–45.
- [15] P. Clarkson, F. Nijhoff (eds.), *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, Proceedings of the 2nd International Conference (SIDE II) (University of Kent at Canterbury, Canterbury, July 1–5, 1996), London Mathematical Society Lecture Notes Series, **255**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [16] Yu. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [17] O. Ragnisco, “Discrete integrable systems”, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, **3**, eds. J.-P. Francoise, G.L. Naber, T.S. Tsun, Elsevier, Oxford, 2006, 59–65.
- [18] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure*, Graduate Studies in Mathematics, **98**, AMS, Providence, RI, 2008.
- [19] F. W. Nijhoff, G. D. Pang, *Phys. Lett. A*, **191**:1–2 (1994), 101–107, arXiv: hep-th/9403052; “Discrete-time Calogero–Moser model and lattice KP equations”, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proceedings and Lecture Notes, **9**, eds. D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 1996, 253–264.
- [20] F. W. Nijhoff, O. Ragnisco, V. B. Kuznetsov, *Commun. Math. Phys.*, **176**:3 (1996), 681–700, arXiv: hep-th/9412170.
- [21] Yu. B. Suris, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 1 (2005), 633–647.
- [22] F. Calogero, *SIGMA*, **7** (2011), 082, 35 pp., arXiv: 1108.4492 .
- [23] D. Gomez-Ullate, M. Sommacal, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 1 (2005), 351–362.