Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кляцкин, Стохастическое динамо в критических ситуациях, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 415–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:32:08

© 2012 г.

В. И. Кляцкин*

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИНАМО В КРИТИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ

На основе функционального метода последовательных приближений рассмотрена задача о возбуждении магнитного поля (стохастическое динамо) случайным полем скоростей с конечным временным радиусом корреляции. В критических ситуациях в первом (диффузионном) приближении ляпуновский характеристический параметр энергии магнитного поля обращается в нуль. Это означает отсутствие структурообразования (кластеризации) в реализациях магнитного поля в рамках этого приближения. Критические ситуации возникают в задачах диффузии магнитного поля в равновесном тепловом, а также в случайных псевдоравновесном и акустическом (при отсутствии поглощения) полях скоростей. Знак ляпуновского характеристического параметра во втором приближении определяет возможность кластеризации энергии магнитного поля. Показано, что в тепловом поле скоростей кластеризация энергии не происходит. В случаях псевдоравновесного и акустического полей скоростей кластеризация происходит с вероятностью единица, т.е. почти в каждой отдельной реализации. Вычислено характерное время установления кластеризации.

Ключевые слова: ляпуновский характеристический параметр, стохастическое динамо, кластеризация, критическая ситуация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузия магнитного поля является одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике. В рамках кинематического приближения (что справедливо на начальных этапах развития динамики) исходным стохастическим уравнением для бездивергентного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ($\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$) является уравнение индукции [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu_H \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}),$$

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва, Россия.
E-mail: klyatskin@yandex.ru

где μ_H – динамический коэффициент диффузии магнитного поля, связанный с проводимостью среды. Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – поле турбулентных скоростей, которое мы считаем гауссовым случайным полем, однородным и изотропным в пространстве, а также стационарным по времени с заданными статистическими характеристиками.

Для динамической системы (1) выполняются условия динамической причинности независимости решения уравнения (1) от поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)$ при $\tau < 0$ и $\tau > t$, т. е. при $t' < 0$ и $t' > t$ имеет место равенство для вариационной производной

$$\frac{\delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = 0. \quad (2)$$

Динамическая система (1) консервативна, и для нее сохраняется поток магнитного поля $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Для задачи с однородным начальным условием $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$, которую мы и будем рассматривать далее, вместо интеграла сохранения имеем условие сохранения статистического среднего $\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0$, где через $\langle \cdot \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ случайного поля скоростей. В этом случае все одноточечные статистические характеристики магнитного поля, не зависящие от переменной $\mathbf{r}$, являются приходящимися на единицу объема удельными интегральными величинами, которые характеризуют динамику стохастической системы (1) в целом (см., например, работы [2], [3]).

Особенностью уравнения (1) является параметрическое возбуждение во времени энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ в каждой ее случайной реализации, что и называется *стохастическим динамо*. Такое параметрическое возбуждение сопровождается ростом со временем всех статистических характеристик решения задачи типа моментных и корреляционных функций магнитного поля любого порядка. Эти характеристики интенсивно изучались и изучаются в настоящее время в многочисленных работах начиная с основополагающей работы [4].

Наряду с этим в отдельных реализациях магнитного поля могут происходить и такие стохастические нестационарные явления, как перемешивание, перемежаемость и кластеризация энергии магнитного поля в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация энергии представляет собой частный случай стохастического структурообразования в случайной среде и соответствует возникновению в отдельных реализациях компактных пространственных областей повышенного содержания этого поля, окруженных областями с относительно пониженным содержанием этого же поля. При статистическом усреднении вся информация о кластеризации, очевидно, пропадает, так как в разных реализациях эти структуры возникают в различных областях пространства. В ряде работ 80-х гг. прошлого столетия интенсивно обсуждались вопросы перемежаемости случайных процессов и полей (см., например, работы [5]–[7]). Перемежаемость случайных процессов – это более или менее “равномерное” чередование выбросов процесса как в сторону больших, так и в сторону меньших значений этого процесса относительно некой детерминированной кривой, называемой кривой типичной реализации. Для гауссова случайного процесса кривая типичной реализации совпадает со средним значением, а для простейшей модели параметрически возбуждаемого случайного процесса, логнормального процесса, кривая типичной реализации совпадает со *статистической ляпуновской экспонентой* (обсуждение этого вопроса см., например, в работе [3]). При этом в упомянутых выше работах перемежаемость случайных параметрически возбуждаемых полей,

а именно наличие больших, но редких выбросов, отождествлялась со структурообразованием в пространстве этого поля. Однако это не соответствует действительности, так как перемежаемость реализуется всегда, а структурообразование (в виде кластеризации) имеет место лишь при определенных условиях (обсуждение этого вопроса см. в конце п. 1.1 настоящей статьи).

Обнаружить и описать явление кластеризации теоретически удастся с помощью анализа одновременной и одноточечной плотности вероятностей энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ на основе идей статистической топографии [8]–[11], в частности, изучая ляпуновскую экспоненту $E^*(t) = E_0 e^{-\alpha t}$ для энергии магнитного поля, где параметр

$$\alpha = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (3)$$

есть ляпуновский характеристический показатель [12].

Уравнение (1) довольно сложное и содержит много параметров. Для однородного начального условия явно выделяются два временных интервала, в которых решения задачи отличаются принципиальным образом. На первом (начальном) этапе в каждой конкретной реализации происходит генерация магнитного поля (*турбулентное динамо*). Естественно, что на этом этапе эффекты, связанные с динамической диффузией, не существенны, и соответствующий член в уравнении (1) может быть опущен. Таким образом, на первом этапе мы приходим к уравнению в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0. \quad (4)$$

Ограничения по времени в статистических задачах, связанные с коэффициентом динамической диффузии, приведены, например, в работах [2], [3]. Однако именно в этом интервале времен в реализациях магнитного поля и могут зарождаться пространственные структурные образования. Изучение условий, при которых это может произойти, в простейшем (диффузионном) приближении случайного поля скоростей рассматривалось в работе [8]. Выяснению подобных условий кластеризации для отдельных реализаций энергии магнитного поля в критических ситуациях посвящена настоящая работа.

1.1. О статистических характеристиках поля скорости. Будем полагать, что случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является в общем случае дивергентным ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) гауссовым полем со средним значением, равным нулю, и с корреляционным и спектральным тензорами, задающимися соотношением ($\tau = t - t'$)

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}_1, t') \rangle = \sigma_{\mathbf{u}}^2 B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (5)$$

где $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – дисперсия поля скорости. В общем случае однородного и изотропного в пространстве случайного поля пространственный спектральный тензор имеет вид

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, \tau) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, \tau),$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей записываются как

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, \tau) = E^s(k, \tau) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad E_{ij}^p(\mathbf{k}, \tau) = E^p(k, \tau) \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Здесь через $E^s(k, \tau)$ и $E^p(k, \tau)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Для корреляционной функции (5) пространственные производные нечетного порядка при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ равны нулю, а для второй производной справедливо равенство

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D^s(\tau)}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ + \frac{D^p(\tau)}{d(d+2)} (\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}),$$

где

$$D^s(\tau) = \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, \tau) = \frac{1}{d-1} \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ D^p(\tau) = \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, \tau) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle,$$

d – размерность пространства, а $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – вихрь поля скорости. Введем также параметры, которые описывают статистические свойства решения задачи в диффузионном приближении:

$$D^s = \int_0^\infty d\tau D^s(\tau), \quad D^p = \int_0^\infty d\tau D^p(\tau). \quad (6)$$

Отметим, что при нахождении различных статистических средних, связанных с решением стохастических уравнений, необходимо расщеплять корреляции случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с различными функционалами от него, обладающими свойством динамической причинности, типа $R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]$, где $0 < \tau \leq t$. Для однородного в пространстве и стационарного во времени гауссова поля с корреляционной функцией (5) такое расщепление осуществляется на основе формулы Фурутцу–Новикова (см., например, [9]–[11])

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (7)$$

В частности, ляпуновский характеристический параметр α (3) для энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$, вычисленный в диффузионном приближении, описывается формулой [8]

$$\alpha = 2\sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s),$$

и в этом случае кластеризация в отдельных реализациях энергии магнитного поля происходит с вероятностью единица только в случае $\alpha > 0$, т.е. при условии $D^p > D^s$. При этом характерное время образования кластерной структуры определяется ляпуновским характеристическим показателем: $t \sim 1/\alpha$. В противоположном случае $D^p \leq D^s$ в конкретных реализациях имеет место лишь общий рост со временем энергии магнитного поля во всем пространстве.

В диффузионном приближении одновременная и одноточечная плотность вероятностей энергии магнитного поля является логнормальной. Характерная особенность

этого распределения – наличие длинного пологого “хвоста” при $Dt \gg 1$, означающего усиление роли больших выбросов энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$ в формировании одновременной статистики. Для этого распределения моменты любого порядка n энергии магнитного поля экспоненциально возрастают со временем (как для значений $n > 0$, так и для $n < 0$):

$$\langle E^n(t) \rangle = E_0^n \exp \left\{ -2n \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s)t + 4n^2(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)} t \right\},$$

и, в частности, при $n = 1$ средняя удельная энергия равна

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)}{d} (D^p + D^s)t \right\}.$$

В соответствующие экспоненты спектральные составляющие поля скоростей входят аддитивным образом. Очевидно, что это обстоятельство имеет место также и для любых других корреляций магнитного поля и его энергии. Это, конечно, является следствием линейности уравнений (1) и (4), однако данный факт означает, что все основные (функциональные) закономерности в таком статистическом описании не разделяют влияние соленоидальной и потенциальной компонент случайного поля скоростей. Другими словами, все получаемые закономерности для упомянутых статистических величин имеют одинаковую структуру как для несжимаемого потока ($D^p = 0$), так и для чисто потенциального потока ($D^s = 0$). Для несжимаемого потока кластеризация отсутствует, а для потенциального потока, наоборот, кластеризация происходит, таким образом, абсолютно ясно, что упомянутые статистические характеристики не содержат никакой информации о стохастическом структурообразовании в отдельных реализациях энергии магнитного поля, а именно о кластеризации.

Кроме того, исходное уравнение индукции (1) справедливо в рамках применимости кинематического приближения. При наличии кластеризации, когда в большей части пространства магнитное поле отсутствует, естественно, что его последствие на поле скоростей несущественно. В случае отсутствия кластеризации, когда генерация магнитного поля происходит во всем пространстве, можно ожидать, что кинематическое приближение справедливо лишь на достаточно малом временном интервале, на котором обсуждать влияние динамического коэффициента диффузии на формирование статистики энергии магнитного поля, по нашему мнению, просто несерьезно.

1.2. Равновесные тепловые флуктуации. Для равновесных тепловых флуктуаций в формуле (5) $E^p(k, 0) = E^s(k, 0) = E(k)$ (см., например, работы [13]–[17]). В этом случае одновременная пространственная корреляционная функция поля скоростей имеет вид

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t) \rangle = \frac{\sigma_u^2}{d} \delta_{ij} B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = \frac{\sigma_u^2}{d} \delta_{ij} \int d\mathbf{k} E(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad (8)$$

где спектральная функция $E(k)$ такова, что $\int d\mathbf{k} E(k) = 1$.

Что касается зависимостей спектральных плотностей $E^s(k, t)$ и $E^p(k, t)$, то они совершенно разные: соленоидальная компонента, связанная с вихревой компонентой

поля скоростей, и потенциальная компонента, связанная с акустическими волнами, имеют вид

$$E^s(k, t) = E(k)e^{-\lambda_s(k)t}, \quad E^p(k, t) = E(k) \cos(ckt)e^{-\lambda_p(k)t},$$

где c – скорость звука, а экспоненциально затухающие члены описываются диссипативными членами в соответствующих гидродинамических (или магнитогидродинамических) уравнениях. Экспонента в $E^s(k, t)$ связана с диссипацией вихревых движений, а экспонента в $E^p(k, t)$ – с диссипацией акустических волн. При этом $\lambda_{s,p}(k) = \lambda_{s,p} k^2$. Следовательно, в этом случае параметры (6) приобретают вид

$$D^s = \frac{1}{\lambda_s}, \quad D^p = \int d\mathbf{k} \frac{\lambda_p k^2 E(k)}{\lambda_p^2 k^2 + c^2},$$

и всегда ляпуновский характеристический параметр $\alpha < 0$, поскольку $\lambda_p > \lambda_s$, таким образом, кластеризация энергии магнитного поля в рамках диффузионного приближения не реализуется.

Однако из этого анализа нельзя сделать однозначный вывод о том, что в равновесном тепловом потоке всегда $\alpha < 0$, т.е. что кластерная структура не может образоваться. Это связано с тем, что при малом затухании акустических волн, а именно при $\lambda_p \ll cl_0$, где l_0 – пространственный радиус корреляции поля скоростей, параметр

$$D^p = \frac{\lambda_p}{c^2} \int d\mathbf{k} k^2 E(k)$$

мал, и $D^p \rightarrow 0$ при $\lambda_p \rightarrow 0$. Следовательно, в этом случае необходимо выйти за рамки диффузионного приближения, когда D^p оказывается величиной порядка σ_u^2 и сопоставима с величиной $1/\lambda_s$ при достаточно большом значении параметра λ_s . Подобную оценку можно сделать на основе метода последовательных приближений, построенного на анализе функциональной зависимости решения динамической задачи (4) от случайного поля скоростей. Общая идея этого метода была предложена в работе [18]. Применение его в астрофизике описывалось, например, в монографии [19].

1.3. Особенности случайного акустического поля скоростей. Рассмотрим теперь статистически однородное и изотропное в пространстве, а также стационарное во времени случайное гауссово акустическое поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (для которого $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) с корреляционным и спектральным тензорами, заданными соотношением ($\tau = t - t'$)

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \sigma_u^2 B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \sigma_u^2 \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau), \quad (9)$$

где $\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – дисперсия поля скоростей и

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau) = e^{-\lambda(k)\tau} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)\tau).$$

Для спектральной функции имеем $\int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}) = 1$, а функция $\omega(k) = ck$ задает дисперсионную кривую для акустических волн. Экспоненциально затухающий член в (8) описывает затухание волнового поля, связанное с диссипативными факторами

уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики. При этом $\lambda(k) = \lambda_p k^2$, а спектральный тензор поля скорости содержит только потенциальную компоненту:

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = E(k) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (10)$$

Отметим, что в работах [20] рассматривался случай акустической турбулентности с такой корреляционной функцией (см. также работы [21]–[23]).

Для спектральной функции (9) при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ временной интеграл равен

$$I(k) = \int_0^\infty dt f(k, \mathbf{0}, t) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 k^2 + c^2} \quad (11)$$

и имеет асимптотики

$$I(k) = \begin{cases} \lambda_p / c^2 & \text{при } \lambda_p \ll cl_0, \\ 1 / \lambda_p k^2 & \text{при } \lambda_p \gg cl_0, \end{cases} \quad (12)$$

где l_0 – пространственный радиус корреляции поля скоростей. Следовательно, интеграл (11), определяющий коэффициент диффузии, обращается в нуль при $\lambda_p \rightarrow 0$.

В общем случае интеграл

$$\int_0^\infty dt \cos(\omega(k)t) = \pi \delta(\omega(k))$$

является интегральным представлением дельта-функции и описывает резонансные свойства акустического поля в высших приближениях теории возмущений.

Для пространственных производных корреляционной функции (9) при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ нечетные производные равны нулю, а для четных производных имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} &= \frac{D^{(2)}(\tau)}{d(d+2)} (\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}), \\ \frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_k \partial r_l \partial r^2} &= \frac{D^{(4)}(\tau)}{d(d+2)} (\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}), \end{aligned} \quad (13)$$

где параметры

$$D^{(2)}(\tau) = \int d\mathbf{k} k^2 E(k) f(k, \mathbf{0}, \tau), \quad D^{(4)}(\tau) = \int d\mathbf{k} k^4 E(k) f(k, \mathbf{0}, \tau)$$

определяют влияние случайного поля скоростей на решение статистических задач, сформулированных выше.

1.4. Псевдоравновесное поле скоростей. Наряду с рассматриваемой проблемой непосредственный интерес представляет простейшая модель поля скоростей, когда ляпуновский характеристический показатель (3) равен нулю в рамках диффузионного приближения, $\alpha \equiv 0$. В этом случае корреляционная функция поля скоростей имеет вид ($\tau = t - t'$)

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \frac{\sigma_u^2}{d} \delta_{ij} B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \frac{\sigma_u^2}{d} \delta_{ij} \int d\mathbf{k} E(k) e^{-\lambda(k)\tau + i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (14)$$

где $\lambda(k) = \lambda k^2$, и анализ этой модели естественно назвать задачей о кластеризации энергии магнитного поля в псевдоравновесном поле скоростей. Вычисления для

корреляционной функции (14), связанные с пространственными производными при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, в этом случае существенно упрощаются. Так, мы имеем равенства

$$\frac{\partial^2 B(\mathbf{0}; \tau)}{\partial r_n \partial r_l} = -\frac{D^{(2)}(\tau)}{d} \delta_{nl}, \quad \frac{\partial^4 B(\mathbf{0}; \tau)}{\partial r_n \partial r_l \partial r_q \partial r_q} = \frac{D^{(4)}(\tau)}{d} \delta_{nl},$$

где

$$D^{(2)}(\tau) = \int d\mathbf{k} k^2 E(k) e^{-\lambda(k)\tau}, \quad D^{(4)}(\tau) = \int d\mathbf{k} k^4 E(k) e^{-\lambda(k)\tau}.$$

Уравнение для плотности вероятностей энергии магнитного поля, вытекающее из результатов работы [8], для этой модели в рамках диффузионного приближения принимает вид

$$\frac{\partial P(t; E)}{\partial t} = D_E \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} EP(t; E), \quad (15)$$

где

$$D_E = 4\sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{d-1}{d} \int \frac{d\mathbf{k} k^2}{\lambda(k)} E(k) = 4 \frac{d-1}{d} \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2}{\lambda}. \quad (16)$$

В этом случае все моменты энергии экспоненциально растут со временем. Однако с точки зрения теории случайных процессов и полей никакого структурообразования в отдельных реализациях в этом случае не происходит [3], следовательно, для решения вопроса о структурообразовании энергии магнитного поля необходимо установить знак ляпуновского характеристического параметра α во втором порядке функционального метода последовательных приближений.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания локального поведения реализаций магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в случайном поле скоростей $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ нужно знать вероятностное распределение магнитного поля. Для этого введем индикаторную функцию магнитного поля $\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H})$, сосредоточенную на поверхности $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} = \text{const}$. Эта функция описывается уравнением Лиувилля, которое мы запишем в операторном виде [8], [11]

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\partial t} = \hat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \quad (17)$$

где оператор $\hat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})$ задается как

$$\begin{aligned} \hat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= -u_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l + \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial}{\partial H_l} H_l = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_k} u_k(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l + \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Для уравнения (17) начальным является условие

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \mathbf{H}) = \varphi_0(\mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{H}_0).$$

Отметим, что первая форма записи оператора $\widehat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})$ удобна для анализа вариационных производных, в то время как вторая форма более удобна для непосредственного усреднения уравнения (17) по ансамблю $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ реализаций случайного поля.

Перепишем (17) в виде интегрального уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \varphi_0(\mathbf{H}) + \int_0^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{H}) \varphi(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{H}).$$

Для первой вариационной производной индикаторной функции

$$S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) = \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')}$$

при $0 \leq t' \leq t$ с учетом условия динамической причинности (2) получаем стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \varphi(\mathbf{r}, t'; \mathbf{H}) \theta(t - t') + \\ &+ \int_{t'}^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{H}) S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (19)$$

где для упрощения последующих вычислений оператор

$$\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) = \frac{\delta \widehat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')}$$

также будет использоваться в двух формах:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_i} H_l + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial H_l} H_l = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_i} H_l + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогичным образом для второй вариационной производной

$$S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) = \frac{\delta^2 \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\delta u_i(\mathbf{r}', t') \delta u_j(\mathbf{r}'', t'')}$$

получаем стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \theta(t - t') \theta(t' - t'') + \\ &+ \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) S_i(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \theta(t - t'') \theta(t' - t') + \\ &+ \int_{\max\{t', t''\}}^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{H}) S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (21)$$

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (4) совпадает с индикаторной функцией, усредненной по ансамблю реализаций случайного поля скоростей: $P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \rangle$.

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Усредним теперь уравнение (17) по ансамблю $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ реализаций случайного поля с корреляционной функцией (5). С учетом формулы Фурутцу–Новикова (7) получаем для плотности вероятностей, не зависящей от пространственной точки $\mathbf{r}$, уравнение в незамкнутом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Усредняя уравнение (19) по ансамблю $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$ реализаций случайного поля, получаем уравнение для среднего значения вариационной производной:

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle = & \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) P(t'; \mathbf{H}) \theta(t - t') + \\ & + \int_{t'}^t d\tau \langle \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{H}) S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

где операторы $\widehat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})$ и $\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H})$ описываются формулами (18) и (20).

Для корреляции $\langle \widehat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle$ с помощью формулы Фурутцу–Новикова (7) получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle \widehat{N}(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle = & \\ = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - t'')}{\partial r_k} \langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\ & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - t'')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle, \end{aligned}$$

в которое уже входит среднее значение второй вариационной производной. Отсюда, подставляя это выражение в уравнение (23), получаем равенство для среднего значения первой вариационной производной:

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle = & \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) P(t'; \mathbf{H}) \theta(t - t') - \\ & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\ & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \times \\ & \times \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Среднее значение второй вариационной производной согласно формуле (21) описывается выражением

$$\begin{aligned} \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle \theta(\tau - t') \theta(t' - t'') + \\ &+ \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle \theta(\tau - t'') \theta(t'' - t') + \\ &+ \int_{\max\{t', t''\}}^{\tau} d\tau_1 \langle \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau_1; \mathbf{H}) S_{ij}(\mathbf{r}, \tau_1; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

последний член которого (пропорциональный величине $\sigma_{\mathbf{u}}^2$) содержит уже третьи вариационные производные. Мы будем использовать метод последовательных приближений и, ограничиваясь эффектами порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$, пренебрежем последним членом. Таким образом, подставляя выражение (25) в (24), получаем уравнение для среднего значения первой вариационной производной:

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) P(t'; \mathbf{H}) \theta(t - t') - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь отметим, что, интегрируя уравнение (22) по t в интервале значений (t', t) , мы имеем равенство

$$\begin{aligned} P(t'; \mathbf{H}) &= P(t; \mathbf{H}) + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \langle S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \langle S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle, \end{aligned} \quad (27)$$

связывающее плотности вероятностей в разные моменты времени, подстановка которого в (26) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
 \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}) \theta(t - t') + \\
 &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\
 &\times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \langle S_j(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\
 &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \langle S_j(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\
 &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \times \\
 &\times \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\
 &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \times \\
 &\times \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle - \\
 &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\
 &\times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle - \\
 &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\
 &\times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle + \\
 &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{H}) \rangle + \\
 &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений по параметру $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ с точностью до малых членов порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ (при этом все временные аргументы t_i у функций $P(t_i; \mathbf{H})$ можно заменить на t в силу равенства (27)), приходим к выражению, связывающему среднее значение первой вариационной производной с плотностью вероятностей:

$$\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle = \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}) \theta(t - t'),$$

где оператор $\widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H})$ задается как

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) = & \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \times \\
 & \times \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
 & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 & \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
 & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
 & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) - \\
 & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
 & - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) + \\
 & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 & \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) + \\
 & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
 & \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}).
 \end{aligned}$$

Подставляя теперь в это равенство значения операторов $\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H})$ и $\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H})$ из формулы (20), интегрируя по $\mathbf{r}''$ и используя при этом пространственную однородность задачи, приходим к операторному уравнению для плотности вероятностей во втором порядке метода последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = & \\
 = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}) + \\
 & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}), \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial^2 B_{kj}(\mathbf{0}, \tau - t'')}{\partial r_k \partial r_j} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right) \frac{\partial}{\partial H_n} H_n \frac{\partial}{\partial H_m} H_m - \\
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' \frac{\partial^2 B_{kj}(\mathbf{0}, \tau - t'')}{\partial r_k \partial r_m} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right) \frac{\partial}{\partial H_j} H_m \times \\
& \quad \times \left[\frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_n} \frac{\partial}{\partial H_i} H_n - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial H_n} H_n \right] + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' \frac{\partial^2 B_{kj}(\mathbf{0}, \tau - t'')}{\partial r_k \partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right) \frac{\partial}{\partial H_m} H_m \times \\
& \quad \times \left[\frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_n} \frac{\partial}{\partial H_i} H_n - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial H_n} H_n \right].
\end{aligned}$$

Подставляя теперь этот оператор в уравнение (29) и интегрируя по $\mathbf{r}'$, получаем окончательное операторное уравнение для плотности вероятностей магнитного поля:

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = \widehat{M}(t; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}), \quad (30)$$

где $\widehat{M}(t; \mathbf{H}) = \widehat{M}_1(t; \mathbf{H}) + \widehat{M}_2(t; \mathbf{H})$. Оператор $\widehat{M}_1$ соответствует диффузионному приближению и представляет собой член первого порядка по параметру $\sigma_{\mathbf{u}}^2$. Оператор $\widehat{M}_2$ соответствует приближению второго порядка.

Рассмотрим сначала наименее громоздкую задачу о диффузии магнитного поля в псевдоравновесном поле скоростей.

4. ПСЕВДОРАВНОВЕСНОЕ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

В этом случае корреляционный тензор псевдоравновесного поля скоростей имеет вид (14). Будем считать, что дисперсия $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ достаточно мала и определяет основной малый параметр.

Таким образом, для плотности вероятностей, не зависящей от пространственной точки $\mathbf{r}$, из уравнения (22) получаем уравнение в незамкнутом виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_i} H_l \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l\right) \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle. \quad (31)
\end{aligned}$$

Согласно сказанному выше во втором порядке метода последовательных приближений среднее значение первой вариационной производной связано с плотностью вероятностей выражением

$$\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) \rangle = \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}) \theta(t - t'), \quad (32)$$

где оператор $\widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) = & \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau} dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial}{\partial r_k} B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) - \\
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) - \\
& -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}) \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \int d\mathbf{r}'' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{N}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H}) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H}). \tag{33}
\end{aligned}$$

Подставляя теперь среднее значение первой вариационной производной (32) в уравнение (31), получаем замкнутое операторное уравнение для плотности вероятностей:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_i} H_l \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}) + \\
& +\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\partial B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial H_l} H_l \right) \widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}). \tag{34}
\end{aligned}$$

4.1. Второй порядок метода последовательных приближений. Подставляя оператор (33) в уравнение (34), а затем выражения для операторов $\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \mathbf{H})$ и $\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{H})$ из формулы (20), используя пространственную однородность задачи и интегрируя по $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, получаем окончательное операторное уравнение для плотности вероятностей магнитного поля:

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = \widehat{M}(t; \mathbf{H}) P(t; \mathbf{H}), \tag{35}$$

где оператор $\widehat{M}(t; \mathbf{H}) = \widehat{M}_1(t; \mathbf{H}) + \widehat{M}_2(t; \mathbf{H})$ содержит довольно много членов. Первый член $\widehat{M}_1(t; \mathbf{H})$ соответствует приближению первого порядка по параметру $\sigma_{\mathbf{u}}^2$

и диффузионному приближению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = & \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{1}{d} \int_0^t dt' D^{(2)}(t') \left[\frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_l} H_i H_l - \frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_i} H_l H_l \right] P(t; \mathbf{H}) + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{d-1}{d} \int_0^t dt' D^{(2)}(t') \frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_l} H_i H_l P(t; \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Это приближение дает нулевой вклад в ляпуновский характеристический показатель энергии магнитного поля. Остальные 15 членов, содержащиеся в операторе $\widehat{M}_2(t; \mathbf{H})$, имеют порядок $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ и учитывают конечность временного радиуса корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Однако вклад в величину $\langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \ln H_{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ во втором порядке, который нас интересует, могут внести лишь 6 членов. В соответствии с этим запишем оператор $\widehat{M}_2(t; \mathbf{H})$ в виде

$$\begin{aligned} \widehat{M}_2(t; \mathbf{H}) = & \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{1}{d} \int_0^t dt' D^{(4)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' B(\tau-t'') \frac{\partial}{\partial H_i} H_n \frac{\partial}{\partial H_i} H_n + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{d-1}{d} \int_0^t dt' D^{(4)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' B(\tau-t'') \frac{\partial}{\partial H_n} H_n + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{1}{d^2} \int_0^t dt' \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' D^{(2)}(t-t') D^{(2)}(\tau-t'') \left(\frac{\partial}{\partial H_i} H_s \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \right)^2 + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{d-1}{d^2} \int_0^t dt' D^{(2)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' D^{(2)}(\tau-t'') \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \frac{\partial}{\partial H_n} H_n \frac{\partial}{\partial H_k} H_l + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{1}{d^2} \int_0^t dt' D^{(2)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' D^{(2)}(\tau-t'') \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial H_i} H_n \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_k} H_m H_m \frac{\partial}{\partial H_i} H_n + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{d-2}{d^2} \int_0^t dt' D^{(2)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' D^{(2)}(\tau-t'') \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial H_i} H_n \frac{\partial^2}{\partial H_l \partial H_m} H_l H_m \frac{\partial}{\partial H_i} H_n + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Члены, обозначенные многоточием в данном выражении, представляют собой замкнутую по индексам операторную структуру, после которой стоит оператор $\partial/\partial \mathbf{H}$. При интегрировании по частям такие члены тождественно обращаются в нуль.

4.2. Ляпуновская экспонента. Вычислим теперь средний логарифм энергии $\langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \ln H_{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$. Для этого умножим уравнение (35) на $\ln H_{\mathbf{p}}^2$ и проинтегрируем по частям по $\mathbf{H}$. В результате часть членов в равенстве (36) обращается в нуль, и мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} = & -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{2(d-1)(d+2)}{d^2} \int_0^t dt' \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' D^{(2)}(t-t') D^{(2)}(\tau-t'') - \\ & - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{4(d-2)(d+1)}{d^2} \int_0^t dt' D^{(2)}(t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' D^{(2)}(\tau-t''). \end{aligned}$$

Вычисляя далее временные интегралы при $t \rightarrow \infty$, получаем выражение для ляпуновского характеристического показателя:

$$\alpha_2 = -\frac{\partial \langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{2(d-1)(d+2)}{d^2} \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 k_1^2 k_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} E(k_1) E(k_2) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{4(d-2)(d+1)}{d^2} \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 k_1^2 k_2^2}{\lambda_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2)} E(k_1) E(k_2),$$

где $\lambda_1 = \lambda(k_1)$, $\lambda_2 = \lambda(k_2)$.

В заключение этого раздела можно отметить, что во втором порядке метода последовательных приближений (в порядке $\sigma_{\mathbf{u}}^4$) все основные статистические характеристики энергии магнитного поля в “случайном псевдоравновесном поле скоростей” вместо уравнения (15) описываются уравнением

$$\frac{\partial P(t; E)}{\partial t} = \left\{ \alpha_2 \frac{\partial}{\partial E} E + D_E \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} P(t; E)$$

с начальным условием $P(0; E) = \delta(E - E_0)$, где параметр D_E задан равенством (16). Следовательно, по всем своим одноточечным интегральным статистическим характеристикам энергия магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$ статистически эквивалентна логнормальному случайному процессу. Ляпуновская экспонента спадает со временем, $E^*(t) = E_0 e^{-\alpha_2 t}$, таким образом, с вероятностью единица должна происходить кластеризация энергии магнитного поля в отдельных ее реализациях. При этом характерное время t образования кластерной структуры в отдельных реализациях имеет порядок $1/\alpha_2$.

5. СЛУЧАЙНОЕ АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

В разделе 3 было получено уравнение общего вида (30). Рассмотрим теперь это уравнение для случайного акустического поля.

5.1. Первое (диффузионное) приближение. В первом порядке метода последовательных приближений уравнение для плотности вероятностей имеет вид

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(\mathbf{0}, t')}{\partial r_l \partial r_n} \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_i} H_l H_n P(t; \mathbf{H}) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(\mathbf{0}, t')}{\partial r_l \partial r_i} \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_n} H_l H_n P(t; \mathbf{H}) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \left(\frac{\partial^2 B_{ki}(\mathbf{0}, t')}{\partial r_k \partial r_n} \frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_l} - \frac{\partial^2 B_{ki}(\mathbf{0}, t')}{\partial r_k \partial r_i} \frac{\partial^2}{\partial H_l \partial H_n} \right) H_l H_n P(t; \mathbf{H}).$$

С учетом равенств (10) и (13) его можно переписать как

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{1}{d(d+2)} \int_0^t d\tau D^{(2)}(\tau) \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_i} H_p H_p + (d^2 - 2) \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_p} H_k H_p \right) P(t; \mathbf{H}).$$

При выполнении условий $t \gg \tau_0$ и $\lambda_{ac} \ll cl_0$, где $\tau_0 = l_0^2/\lambda_{ac}$ и $l_0 = 1/k_0$ – соответственно временной и пространственный радиусы корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и с учетом равенств (12) и (13) это уравнение переходит в уравнение

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{H})}{\partial t} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{D_{\mathbf{H}}^{(1)}}{d(d+2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_i} H_p H_p + (d^2 - 2) \frac{\partial^2}{\partial H_k \partial H_p} H_k H_p \right) P(t; \mathbf{H}),$$

где коэффициент диффузии в $\mathbf{H}$ -пространстве имеет вид

$$D_{\mathbf{H}}^{(1)} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\lambda_p}{c^2} \int d\mathbf{k} k^2 E(k).$$

Плотность вероятностей энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ является лог-нормальной, и ляпуновский характеристический показатель равен

$$\alpha = 2 \frac{d-1}{d+2} D_{\mathbf{H}}^{(1)}, \quad (37)$$

следовательно, кластеризация энергии магнитного поля происходит с вероятностью единица, т. е. почти во всех реализациях энергии. При этом время установления кластерной структуры связано с диссипативным фактором. При отсутствии затухания волнового поля параметр $\alpha = 0$, и для решения вопроса о кластеризации энергии в конкретных реализациях необходимо обратиться ко второму приближению.

5.2. Второе приближение для магнитного поля. Полученное выше уравнение (30) с оператором $\widehat{M}(t; \mathbf{H})$ в общем случае является очень громоздким. Имея в виду, что нас в настоящей работе интересует вопрос, будет ли происходить кластеризация энергии магнитного поля в пространстве в отдельных реализациях или будет общий рост энергии со временем, ограничимся вычислением параметра α во втором приближении. Из структуры оператора $\widehat{M}(t; \mathbf{H})$ ясно, что только небольшое число членов внесут свой вклад в ляпуновский характеристический параметр α . А именно, для оператора $\widehat{M}_2(t; \mathbf{H})$ получаем всего 7 членов:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_2(t; \mathbf{H}) = & -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{1}{d} \int_0^t dt' D^{(4)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' D^{(0)}(\mathbf{0}, \tau - t'') \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial H_p} H_q \left(\frac{\partial}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial}{\partial H_q} H_p \right) + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' D^{(2)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' D^{(2)}(\mathbf{0}, \tau - t'') \times \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial H_p} H_q \frac{\partial}{\partial H_k} H_m \left(\frac{\partial}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial}{\partial H_q} H_p \right) \frac{\partial}{\partial H_k} H_m + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial H_p} H_q \frac{\partial}{\partial H_m} H_k \left(\frac{\partial}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial}{\partial H_q} H_p \right) \frac{\partial}{\partial H_k} H_m \right] + \\ & + 2\sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' D^{(2)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^{\tau} dt'' D^{(2)}(\mathbf{0}, \tau - t'') \frac{\partial}{\partial H_p} H_q \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{\partial}{\partial H_k} H_m \frac{\partial}{\partial H_k} H_m + \frac{\partial}{\partial H_k} H_l \frac{\partial}{\partial H_l} H_k + \frac{\partial}{\partial H_k} H_k \frac{\partial}{\partial H_m} H_m \right) \frac{\partial}{\partial H_p} H_q - \\
& - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{2}{d} \int_0^t dt' D^{(2)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' D^{(0)}(\mathbf{0}, \tau - t'') \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial H_p} H_q \left(\frac{\partial}{\partial H_k} H_k \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial}{\partial H_q} H_p \right] + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{d-1}{d} \int_0^t dt' D^{(2)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' D^p(\mathbf{0}, \tau - t'') \times \\
& \times \left[\frac{\partial}{\partial H_p} H_q \frac{\partial^2}{\partial H_l \partial H_m} H_l H_m \left(\frac{\partial}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial}{\partial H_q} H_p \right) \right] + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{1}{d^2} \int_0^t dt' D^{(4)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' B_{mm}(\mathbf{0}, \tau - t'') \frac{\partial}{\partial H_n} H_n - \\
& - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{d-1}{d} \int_0^t dt' D^{(0)}(\mathbf{0}, t - t') \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' D^{(2)}(\mathbf{0}, \tau - t'') \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial H_k} H_m \frac{\partial}{\partial H_n} H_n \left(\frac{\partial}{\partial H_k} H_m + \frac{\partial}{\partial H_m} H_k \right) + \dots
\end{aligned}$$

Члены, обозначенные многоточием, представляют собой замкнутую по индексам операторную структуру, после которой стоит оператор $\partial/\partial \mathbf{H}$. При интегрировании по частям такие члены тождественно обращаются в нуль.

Умножая теперь уравнение (30) для рассматриваемого случая на $\ln E$ и интегрируя по частям по $\mathbf{H}$, с помощью асимптотики при $t \rightarrow \infty$ для временных интегралов

$$\begin{aligned}
I_1(k_1, k_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt' \cos(\omega_1(t - t')) \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' \cos(\omega_2(\tau - t'')) = \\
&= -\frac{\pi}{2\omega_2^2} \delta(\omega_1 - \omega_2), \\
I_2(k_1, k_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt' \cos(\omega_1(t - t')) \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \cos(\omega_2 t'') = \\
&= -\frac{\pi}{2\omega_2^2} \delta(\omega_1 - \omega_2), \\
I_3(k_1, k_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt' \cos(\omega_1(t - t')) \int_{t'}^t d\tau \int_0^{t'} dt'' \cos(\omega_2(\tau - t'')) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_2^2} \delta(\omega_1 - \omega_2)
\end{aligned} \tag{38}$$

получаем для среднего логарифма в трехмерном случае ($d = 3$) отрицательное выражение:

$$\frac{\partial \langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} = -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{76\pi^2}{c^3} \int d\mathbf{k} k^4 E^2(k).$$

Следовательно, ляпуновская экспонента во втором порядке метода последовательных приближений с учетом формулы (37) имеет вид

$$E^*(t) = E_0 e^{(\ln E(\mathbf{r}, t))} = E_0 e^{-\alpha_2 t},$$

где ляпуновский характеристический параметр задается выражением

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_u^2}{c^2} \int d\mathbf{k} k^2 E(k) \left[\frac{4}{5} \lambda_p + 76\pi^2 \frac{\sigma_u^2}{c} k^2 E(k) \right].$$

Таким образом, мы вычислили во втором порядке метода последовательных приближений ляпуновскую экспоненту для энергии магнитного поля в случайном акустическом поле скоростей. В этом приближении ляпуновская экспонента убывает по времени, что свидетельствует о кластеризации энергии магнитного поля с вероятностью единица, т. е. почти в каждой реализации этой энергии. При этом характерное время образования кластерной структуры энергии магнитного поля определяется ляпуновским характеристическим показателем α_2 , а именно $t \sim 1/\alpha_2$.

Обратим внимание на то, что подавляющее число членов, определяющих ляпуновский характеристический показатель во втором приближении, вносят дестабилизирующий вклад с точки зрения возможности кластеризации, и только члены, связанные с временным интегралом $I_3(k_1, k_2)$ в (38), привели к конечному результату о наличии кластеризации в отдельных реализациях.

5.3. Равновесное тепловое поле скорости. Теперь мы можем выписать ляпуновский характеристический показатель во втором порядке теории возмущений для случайного равновесного теплового поля скоростей:

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_u^2}{\lambda_s} \left(76\pi^2 \lambda_s \frac{M^2}{c} \int d\mathbf{k} k^4 E^2(k) - 1 \right),$$

где $M = \sigma_u/c$ – число Маха. Но

$$M^2 \frac{\lambda_s}{c} \int d\mathbf{k} k^4 E^2(k) \sim M^2 \frac{\lambda_s(k_0)}{\omega(k_0)} < M^2 \frac{\lambda_p(k_0)}{\omega(k_0)} \ll 1;$$

здесь k_0 – характерное волновое число, связанное с пространственным радиусом корреляции волнового поля. Следовательно, кластеризация энергии магнитного поля не будет происходить.

Благодарности. Настоящая работа была выполнена в 33-м рейсе научно-исследовательского судна “Академик Иоффе”, и я признателен всем участникам научной экспедиции за создание благоприятных условий для выполнения этой работы. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-05-0005), Программы Президиума РАН № 18 и Программы ГК № 3/ГФ/Н-08.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. VIII: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.
- [2] В. И. Кляцкин, *ЖЭТФ*, **136**:6(12) (2009), 1032–1044.
- [3] В. И. Кляцкин, *УФН*, **181**:5 (2011), 457–482.

- [4] А. П. Казанцев, *ЖЭТФ*, **53** (1967), 1806–1813.
- [5] С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *УФН*, **145**:4 (1985), 593–628.
- [6] Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ*, **89**:6 (1985), 2061–2072; *УФН*, **152**:5 (1987), 3–32.
- [7] Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, *УФН*, **152**:6 (1987), 263–284.
- [8] В. И. Кляцкин, О. Г. Чхетиани, *ЖЭТФ*, **136**:2(8) (2009), 400–413.
- [9] В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения*, Физматлит, М., 2001; *Динамика стохастических систем*, Физматлит, М., 2002.
- [10] В. И. Кляцкин, *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках*, Физматлит, М., 2005; *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике*, Физматлит, М., 2008.
- [11] В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем*, Курс лекций, Физматлит, М., 2002.
- [12] В. И. Кляцкин, *Известия РАН. Физ. атм. и океана*, **44**:1 (2008), 21–35; *УФН*, **178**:4 (2008), 419–431; **178**:4 (2008), 419–431; **179**:5 (2009), 547–553.
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, **32**:2 (1957), 618–619.
- [14] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, часть 2: Теория конденсированного состояния, Наука, М., 1978.
- [15] М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике*, Наука, М., 1967.
- [16] В. И. Кляцкин, *Известия АН СССР. Физ. атм. и океана*, **7**:5 (1971), 486–495.
- [17] В. И. Кляцкин, *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами*, Физматлит, М., 1975.
- [18] В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, *Изв. вузов. Радиофизика*, **14**:9 (1971), 1400–1415.
- [19] С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике*, Наука, М., 1980.
- [20] Н. А. Силантьев, *Письма в ЖЭТФ*, **72**:1–2 (2000), 42–45; *ЖЭТФ*, **111**:3 (1977), 871–881; **114**:3 (1998), 930–945; **116**:1 (1999), 85–104; **122**:5 (2002), 1107–1115; **125**:4 (2004), 831–849.
- [21] С. И. Вайнштейн, *Докл. АН СССР*, **195** (1970), 793–796.
- [22] С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, *УФН*, **106**:6 (1972), 431–457.
- [23] А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ*, **88**:2 (1985), 487–494.

Поступила в редакцию 24.10.2011,
после доработки 3.11.2011