Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Денисов, И. П. Денисова, В. А. Соколов, Использо-
вание концепции естественной геометрии в нелиней-
ной электродинамике вакуума, *ТМФ*, 2012, том 172, но-
мер 3, 505–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:53:15

© 2012 г. В. И. Денисов*, И. П. Денисова[†], В. А. Соколов*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЦЕПЦИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВАКУУМА

Обсуждается концепция естественной геометрии для физического поля. Показано, что использование этой концепции при решении задач нелинейной электродинамики позволяет достаточно просто исследовать основные нелинейно-электродинамические эффекты, возникающие при распространении слабых электромагнитных волн во внешних электромагнитных полях.

Ключевые слова: физическое поле, естественная геометрия, метрический тензор, уравнения лучей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Логунова (см., например, монографию [1]) неоднократно указывалось, что "... любому физическому полю соответствует некоторая геометрия, называемая естественной, именно такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезической естественного пространства-времени.

Распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик)

$$G^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (1)$$

а также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона–Якоби)

$$G^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 1 \quad (2)$$

определяются метрическим тензором G^{ik} естественной для этих процессов геометрии.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vid.msu@yandex.ru, sokolov.sev@inbox.ru

[†]Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва, Россия. E-mail: pm@mati.ru

Вопрос о выборе естественной геометрии – это вопрос о том, посредством какого эффективного метрического тензора G^{ik} свертываются старшие производные в плотности лагранжиана. Вполне возможна отмечавшаяся еще Лобачевским [2] ситуация, когда различные физические явления будут описываться в терминах различных естественных геометрий. . . ”.

Такая формулировка концепции естественной геометрии для физического поля является развитием идеи Гильберта о связи физики и геометрии. Из этой концепции следует, что если некоторое физическое поле удовлетворяет линейным уравнениям, то метрический тензор G^{ik} естественной для этого поля геометрии совпадает с метрическим тензором g^{ik} псевдориманова пространства-времени, получаемым из уравнений гравитационного поля. В случае же нелинейных уравнений поля, когда нелинейность содержится при старших производных, метрический тензор G^{ik} естественной для этого поля геометрии отличается от метрического тензора g^{ik} на члены, содержащие функции поля. Таким образом, самодействие поля в нелинейной теории, если оно затрагивает старшие производные, изменяет геометрию пространства-времени для этого поля и в силу уравнений (1) или (2) управляет законами распространения возмущений этого поля.

Все это в полной мере относится и к нелинейной электродинамике вакуума.

Уравнения электромагнитного поля в нелинейной электродинамике, как известно [3], [4], представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, общие методы интегрирования которых в настоящее время отсутствуют. Поэтому в ранних работах по нелинейной электродинамике вакуума [5], [6] авторы пытались тем или иным способом заменить нелинейное воздействие внешних полей введением тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей и перейти тем самым к линейной задаче макроскопической электродинамики. Такой подход мог быть применен лишь в случаях с достаточно простой топографией внешних электромагнитных полей.

Использование концепции естественной геометрии в нелинейной электродинамике вакуума позволило существенно расширить круг задач, поддающихся аналитическому решению.

2. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЕСТЕСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ПОСТМАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Параметризованный постмаксвелловский лагранжиан нелинейной электродинамики можно записать [7] в виде

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi} \{ 2J_2 + \xi[(\eta_1 - 2\eta_2)J_2^2 + 4\eta_2 J_4] \} - \frac{1}{c} j^n A_n, \quad (3)$$

где g – определитель метрического тензора g_{ik} , описывающего гравитационное поле, $J_2 = F_{ik}F^{ki}$, $J_4 = F_{ik}F^{km}F_{ml}F^{li}$ – инварианты тензора электромагнитного поля, $\xi = 1/B_q^2$, $B_q = 4,41 \cdot 10^{13}$ Гс, а величина безразмерных постмаксвелловских параметров η_1 и η_2 зависит только от выбора модели нелинейной электродинамики вакуума.

Как показано в работе [8], согласно уравнениям нелинейной электродинамики вакуума, получаемым из лагранжиана (3), распространение электромагнитной волны

в гравитационном и электромагнитном полях при $\eta_1 \neq \eta_2$ зависит от поляризации волны и происходит по геодезическим естественного пространства-времени, метрический тензор которого имеет вид

$$G_{ik}^{(1,2)} = g_{ik} - 4\eta_{1,2}\xi F_{ip}F_{\cdot k}^p, \quad (4)$$

где индексы у тензора электромагнитного поля F_{pi} поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора g_{ik} .

Это означает, что если падающая электромагнитная волна имеет произвольную поляризацию, то во внешнем электромагнитном поле из-за двулучепреломления вакуума она разделяется на две нормальные волны, поляризованные ортогонально друг к другу, первая из которых распространяется по геодезическим естественного пространства-времени с метрическим тензором $G_{ik}^{(1)}$, а вторая – по геодезическим естественного пространства-времени с метрическим тензором $G_{ik}^{(2)}$.

Распространение электромагнитных волн в естественном пространстве-времени с метрическим тензором (4) происходит по геодезическим этого пространства и в зависимости от их поляризации описывается уравнениями

$$\frac{dk^m}{d\sigma} + \Gamma_{pn}^m k^p k^n = 0, \quad (5)$$

где σ – некоторый аффинный параметр, $k^m = dx^m/d\sigma$ – волновой четырехвектор, а Γ_{pn}^m – символы Кристоффеля естественного пространства-времени с метрическим тензором $G_{nm}^{(1)}$ для нормальных волн первого типа и $G_{nm}^{(2)}$ для нормальных волн второго типа.

Система уравнений (5) имеет первый интеграл

$$G_{nm}^{(1,2)} k^n k^m = 0. \quad (6)$$

Решая систему уравнений (5) и (6), можно найти лучи, по которым распространяются электромагнитные волны во внешних электромагнитном и гравитационном полях, а также определить законы движения нормальных волн по этим лучам.

Проиллюстрируем это на примере задачи о нелинейно-электродинамическом воздействии магнитодипольного излучения пульсара на распространение слабой электромагнитной волны.

3. ЕСТЕСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПУЛЬСАРА

Рассмотрим пульсар радиуса R с магнитным моментом $\mathbf{m}$, вращающийся с частотой Ω вокруг оси, перпендикулярной вектору $\mathbf{m}$. Будем считать, что вращение релятивистское, в результате чего $\Omega R \approx c$. Таким пульсаром является, например, пульсар в Крабовидной туманности. Предположим далее, что через электромагнитное поле вдоль оси вращения пульсара распространяется слабая плоская электромагнитная волна частоты ω .

Исследуем, какое нелинейно-электродинамическое воздействие оказывает электромагнитное поле вращающегося пульсара на плоскую электромагнитную волну. Из-за наличия у нейтронных звезд магнитосферы, заполненной веществом, это воздействие будем рассматривать для электромагнитной волны, частота которой ω

находится в гамма- или рентгеновской областях спектра. Для этих частот показатель преломления вещества близок к единице, и магнитосфера в определенной степени является прозрачной. Источниками таких электромагнитных волн для рассматриваемой задачи могут служить удаленные от пульсара на большие расстояния астрофизические объекты такие, как ядра активных галактик (блазар, квазар или Сейфертова галактика) или скопления галактик. В этом случае падающую электромагнитную волну в окрестности пульсара можно представлять в виде плоской волны.

Поместим начало отсчета в центр пульсара и ориентируем оси декартовой системы координат так, чтобы волновой вектор падающей плоской электромагнитной волны был направлен вдоль оси z .

Вращающийся пульсар создает электромагнитное поле, изменяющееся с частотой Ω , векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ которого имеют вид [9]

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \dot{\mathbf{m}}(\tau)}{r^5} - \frac{\ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{cr^2} + \frac{3(\ddot{\mathbf{m}}(\tau)\mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} + \\ &\quad + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau)\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2 r^3}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{cr^3} + \frac{[\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^2 r^2},\end{aligned}\quad (7)$$

где точка над вектором означает производную по запаздывающему времени $\tau = t - r/c$, а $\mathbf{m}(\tau) = |\mathbf{m}|\{\cos(\Omega\tau), \sin(\Omega\tau), 0\}$ – вектор магнитного дипольного момента пульсара.

Используя соотношения (4) и (7), выразим компоненты метрического тензора $G_{ik}^{(1,2)}$ через компоненты электромагнитных полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ вращающегося пульсара:

$$\begin{aligned}G_{00}^{(1,2)} &= g_{00} - 4\xi\eta_{1,2}\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, \tau), \\ G_{0\alpha}^{(1,2)} &= g_{0\alpha} - 4\xi\eta_{1,2}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{B}(\mathbf{r}, \tau)]_{\alpha}, \\ G_{\alpha\beta}^{(1,2)} &= g_{\alpha\beta} - 4\xi\eta_{1,2}\{\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, \tau)\delta_{\alpha\beta} - E_{\alpha}E_{\beta} - B_{\alpha}B_{\beta}\},\end{aligned}\quad (8)$$

где g_{ik} – метрический тензор решения Керра, описывающего гравитационное поле вращающегося массивного аксиально-симметричного тела:

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \\ g_{rr} &= -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r_g r + a^2}, \quad g_{\theta\theta} = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta), \\ g_{\varphi\varphi} &= -\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta, \quad g_{0\varphi} = \frac{2r_g r a}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким образом, у нас имеется все необходимое для исследования нелинейно-электродинамического влияния электромагнитного поля (7) на распространение слабой электромагнитной волны.

4. НЕЛИНЕЙНО-ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ ИСКРИВЛЕНИЕ ЛУЧЕЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПУЛЬСАРА

Перейдем в уравнениях (5) и (6) от дифференцирования по параметру σ к дифференцированию по координате z в соответствии с равенством

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dx^3}{d\sigma} \frac{d}{dz} = k^3 \frac{d}{dz}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^0 - \frac{dx^0}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^1 - \frac{dx}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^2 - \frac{dy}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \quad g_{nm}^{(1,2)} \frac{dx^n}{dz} \frac{dx^m}{dz} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В рассматриваемой нами задаче имеются два малых параметра r_g/r и a/r , характеризующих гравитационное поле вращающегося пульсара, и малый параметр $\eta_{1,2} \xi \mathbf{B}^2(r)$, характеризующий его электромагнитное поле.

В линейном приближении по этим параметрам и гравитационное поле пульсара, и его электромагнитное поле по порядку величины оказывают примерно равное воздействие на распространение слабых электромагнитных волн. Так как детальные расчеты движения фотонов в метрике Керра в научной литературе имеются [10], то в настоящей работе мы их приводить не будем, а сосредоточим основное внимание только на исследовании нелинейно-электродинамического воздействия.

Подставляя выражения (8) в систему уравнений (10), опуская все слагаемые, описывающие гравитационное воздействие, и усредняя уравнения по периоду вращения пульсара для того, чтобы исключить быстроосциллирующие члены, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ct}{dz^2} + \frac{\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2}{r^{12}} \{ & 2k^4 r^4 [4r^4(z-r) + (10r^3 - 8r^2 z)(x^2 + y^2) + (3z - 5r)(x^2 + y^2)^2] + \\ & + 24k^2 r^2 z(x^2 + y^2)^2 + 6z[2r^4 - 8r^2(x^2 + y^2) + 15(x^2 + y^2)^2] \} = 0, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2}{r^{12}} \{ & 2k^4 r^4 x[2r^3(r-z) + 3z^2(x^2 + y^2)] - \\ & - 4k^3 r^5 y[4r(z-r) + 5(x^2 + y^2)] + 6k^2 r^2 x[5r^2(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2)^2] - \\ & - 24kr^4 yz + 18x[7r^2(x^2 + y^2) - 5(x^2 + y^2)^2 - r^4] \} = 0, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\xi \eta_{1,2} |\mathbf{m}|^2}{r^{12}} \{ & 2k^4 r^4 y[2r^3(r-z) + 3z^2(x^2 + y^2)] + \\ & + 4k^3 r^5 x[4r(z-r) + 5(x^2 + y^2)] + 6k^2 r^2 y[5r^2(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2)^2] + \\ & + 24kr^4 xz + 18y[7r^2(x^2 + y^2) - 5(x^2 + y^2)^2 - r^4] \} = 0, \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Интегрируя эти уравнения с учетом последнего из соотношений (10), получим уравнения лучей

$$\begin{aligned}
 x(z) = & zC_1 + C_2 + \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 \left\{ k^4 x_0 \left[\frac{z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^2} - \frac{4z}{3r_0^2 \sqrt{z^2 + r_0^2}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{19z}{8r_0^3} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right] - k^3 y_0 \left[\frac{2z}{r_0^2(z^2 + r_0^2)} + \frac{2}{r_0^3} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \frac{4}{3\sqrt{(z^2 + r_0^2)^3}} \right] + \right. \\
 & + k^2 x_0 \left[\frac{3z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^3} - \frac{45z}{16r_0^5} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \frac{15}{16r_0^2(z^2 + r_0^2)} \right] - \\
 & - \frac{k y_0}{r_0^5} \left[\frac{z r_0(5r_0^2 + 3z^2)}{2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{3}{2} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right] - \frac{855z x_0}{128r_0^7} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \\
 & + \frac{57x_0}{64r_0^2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{285x_0}{128r_0^4(z^2 + r_0^2)} + \frac{3x_0(5z^2 - r_0^2)}{16(z^2 + r_0^2)^4} \Big\}, \\
 y(z) = & zC_3 + C_4 + \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 \left\{ k^4 y_0 \left[\frac{z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^2} - \frac{4z}{3r_0^2 \sqrt{z^2 + r_0^2}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{19z}{8r_0^3} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right] + k^3 x_0 \left[\frac{2z}{r_0^2(z^2 + r_0^2)} + \frac{2}{r_0^3} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \frac{4}{3\sqrt{(z^2 + r_0^2)^3}} \right] + \right. \\
 & + k^2 y_0 \left[\frac{3z^2 - r_0^2}{8(z^2 + r_0^2)^3} - \frac{45z}{16r_0^5} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \frac{15}{16r_0^2(z^2 + r_0^2)} \right] + \\
 & + \frac{k x_0}{r_0^5} \left[\frac{z r_0(5r_0^2 + 3z^2)}{2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{3}{2} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right] - \frac{855z y_0}{128r_0^7} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) + \\
 & + \frac{57y_0}{64r_0^2(z^2 + r_0^2)^2} + \frac{285y_0}{128r_0^4(z^2 + r_0^2)} + \frac{3y_0(5z^2 - r_0^2)}{16(z^2 + r_0^2)^4} \Big\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

и закон движения электромагнитных импульсов по этим лучам

$$\begin{aligned}
 ct(z) = & \xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2 \left\{ k^4 \left[\frac{r_0^2 z}{4(r_0^2 + z^2)^2} + \frac{19}{8r_0} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) - \frac{13z}{8(r_0^2 + z^2)} + \right. \right. \\
 & + \frac{4}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} - \frac{2r_0^2}{3\sqrt{(r_0^2 + z^2)^3}} \Big] + k^2 \left[\frac{15z}{16r_0^2(r_0^2 + z^2)} + \frac{5z}{8(r_0^2 + z^2)^2} + \right. \\
 & + \frac{r_0^2 z}{2(r_0^2 + z^2)^3} + \frac{15}{16r_0^3} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \Big] + \frac{171z}{128r_0^4(r_0^2 + z^2)} + \frac{57z}{64r_0^2(r_0^2 + z^2)^2} + \\
 & + \frac{5z}{16(r_0^2 + z^2)^3} + \frac{9zr_0^2}{8(r_0^2 + z^2)^4} + \frac{171}{128r_0^5} \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \Big\} + z + C_5,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – постоянные интегрирования, а r_0 – прицельное расстояние луча.

Для определения постоянных интегрирования потребуем, чтобы лучи обеих нормальных волн начинались в одной и той же точке $x = x_0, y = y_0, z = -L$ в момент времени $t = t_0$ и проходили через точку $x = x_0, y = y_0, z = L$, в которой помещен детектор рентгеновского или гамма-излучения.

Так как пульсары расположены на расстояниях от Земли, превышающих 10 кпс, то для дальнейших вычислений нам необходима только асимптотически главная часть выражений (11) и (12) при $L \rightarrow \infty$. Определяя константы интегрирования из

начальных условий и полагая в выражениях (11) и (12) $|z| \sim L \rightarrow \infty$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} ct(z) &= ct_0 + z + L + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r_0^5} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{15k^2r_0^2}{16} + \frac{171}{128} \right\} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right\}, \\ x(z) &= x_0 + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2x_0}{r_0^7} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{45k^2r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right\} \left\{ \frac{\pi L}{2} - z \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right\} + \\ &\quad + \frac{4\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2k^4x_0}{3r_0^2} \left\{ \frac{z}{L} - \operatorname{sgn}(z) \right\} + \frac{ky_0}{4r_0^5} (4k^2r_0^2 + 3) \left\{ \frac{\pi z}{L} - 2 \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right\}, \quad (13) \\ y(z) &= y_0 + \frac{\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2y_0}{r_0^7} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{45k^2r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right\} \left\{ \frac{\pi L}{2} - z \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right\} + \\ &\quad + \frac{4\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2k^4y_0}{3r_0^2} \left\{ \frac{z}{L} - \operatorname{sgn}(z) \right\} - \frac{kx_0}{4r_0^5} (4k^2r_0^2 + 3) \left\{ \frac{\pi z}{L} - 2 \arctg\left(\frac{z}{r_0}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Полученные соотношения позволяют найти углы $\alpha_{1,2}$ нелинейно-электродинамического искривления лучей нормальных волн после их прохождения через электромагнитное поле вращающегося пульсара. Для этого вычислим компоненты касательных векторов к лучу $\mathbf{N} = (d\mathbf{r}/dz)|_{z=-L}$ в точке $z = -L$ и $\mathbf{n} = (d\mathbf{r}/dz)|_{z=L}$ в точке $z = L$:

$$\begin{aligned} N_x &= -n_x = \frac{\pi\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2x_0}{2r_0^7} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{45k^2r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right\}, \\ N_y &= -n_y = \frac{\pi\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2y_0}{2r_0^7} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{45k^2r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right\}, \quad N_z = n_z = 1. \end{aligned}$$

Составляя векторное произведение этих векторов и определяя из него синус угла между векторами, найдем углы $\alpha_{1,2}$ между асимптотами к лучам обеих нормальных волн:

$$\sin \alpha_{1,2} \approx \alpha_{1,2} = \frac{\pi\xi\eta_{1,2}|\mathbf{m}|^2}{r_0^6} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{45k^2r_0^2}{16} + \frac{855}{128} \right\}. \quad (14)$$

Найдем теперь время нелинейно-электродинамического запаздывания электромагнитного сигнала, переносимого из точки $x = x_0, y = y_0, z = -L$ в точку $x_0, y_0, z = L$ первой нормальной волной, по сравнению с сигналом, переносимым второй нормальной волной:

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{\pi\xi(\eta_2 - \eta_1)|\mathbf{m}|^2}{cr_0^5} \left\{ \frac{19k^4r_0^4}{8} + \frac{15k^2r_0^2}{16} + \frac{171}{128} \right\}. \quad (15)$$

Следует отметить, что как выражение (14), так и выражение (15) справедливы при выполнении условий $|z| \sim L \rightarrow \infty, R < r_0$, где R – радиус пульсара.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты показали, что при решении задач нелинейной электродинамики использование концепции естественной геометрии позволяет легко и просто исследовать нелинейно-электродинамические эффекты, возникающие при распространении слабой электромагнитной волны во внешних полях. Этот метод является

плодотворным и при решении задач в любой нелинейной теории поля, в которой нелинейность содержится при старших производных. В этом случае можно, не решая уравнения поля, представляющие собой систему нелинейных уравнений в частных производных, достаточно просто найти уравнения лучей, по которым во внешнем поле распространяется слабая волна, и определить закон движения квантов поля по этим лучам.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-01060_а).

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, *Лекции по теории относительности и гравитации*, М., 1987.
- [2] Н. И. Лобачевский, *Полное собрание сочинений*, т. 2: *Геометрия. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных*, Гостехиздат, М., Л., 1949.
- [3] M. Born, L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **144**:852 (1934), 425–451.
- [4] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.*, **89**:11–12 (1936), 714–732.
- [5] Н. Б. Нарожный, *ЖЭТФ*, **55** (1968), 714–721.
- [6] И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, Изд-во МГУ, М., 1982.
- [7] В. И. Денисов, И. П. Денисова, *Докл. РАН*, **378**:4 (2001), 463–465.
- [8] V. I. Denisov, S. I. Svertilov, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063002, 13 pp.
- [9] В. И. Денисов, *ЖЭТФ*, **74**:2 (1978), 401–407.
- [10] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, М., 1977.

Поступила в редакцию 3.11.2011