Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Когомологии пространств обобщенных функций Шварца, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 1, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:03:37

© 2012 г.

В. В. Жаринов*

КОГОМОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ШВАРЦА

Вычисляются когомологии линейных пространств обобщенных функций, рассматриваемых как линейные функционалы над соответствующими алгебрами основных функций.

Ключевые слова: распределения Шварца, когомологии, сферическое представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] (см. также [2], [3]) Шварц ввел ряд пространств основных и обобщенных функций (тест-функций и распределений соответственно). Наиболее известными и употребительными из них являются следующие линейные локально-выпуклые топологические пространства функций на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{F}$:

- пространство $\mathcal{D}$ всех гладких функций с компактным носителем и его сопряженное $\mathcal{D}'$ – пространство всех обобщенных функций;
- пространство $\mathcal{S}$ всех гладких быстроубывающих функций и его сопряженное $\mathcal{S}'$ – пространство обобщенных функций умеренного роста;
- пространство $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ всех гладких функций и его сопряженное $\mathcal{E}'$ – пространство всех обобщенных функций с компактным носителем.

В работе [4] были вычислены линейные пространства когомологий алгебр основных функций Шварца $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и алгебры $\mathcal{M}$ гладких функций умеренного роста на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. В настоящей работе вычисляются линейные пространства когомологий сопряженных пространств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{M}'$, где $\mathcal{M}'$ – пространство быстроубывающих обобщенных функций.

Всюду ниже числовое поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, и все линейные операции выполняются над ним.

2. АЛГЕБРЫ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА $\mathbb{R}^m$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{A}$ – заданная алгебра гладких функций на $\mathbb{R}^m$ со значениями в поле $\mathbb{F}$, снабженная естественной локально-выпуклой топологией. В этом случае (см. п. 5.1):

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

- $\mathfrak{M} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \text{правило } \varphi \mapsto f\varphi \text{ задает эндоморфизм в } \mathfrak{A}\};$
- $\mathfrak{D} = \{X = \sum_{1 \leq \mu \leq m} X^\mu \partial_\mu \mid X^\mu \in \mathfrak{M}\}, \partial_\mu = \partial_{x^\mu} = \partial/\partial x^\mu;$
- $\Omega^q(\mathfrak{A}) = \{\omega = (1/q!) \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \mid \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathfrak{A}\};$
- $d\omega = (1/(q+1)!) \sum_{1 \leq \mu_0, \dots, \mu_q \leq m} (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}, \text{ где } (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} = \sum_{0 \leq k \leq q} (-1)^k \partial_{\mu_k} \omega_{\mu_0 \dots \check{\mu}_k \dots \mu_q}.$

Пусть $\mathfrak{A}' = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A}; \mathbb{F})$ – линейное пространство, дуальное к линейному пространству $\mathfrak{A}$, наделенное слабой топологией. Действие алгебры Ли $\mathfrak{D}$ на пространстве $\mathfrak{A}'$ определяется, как это принято в теории обобщенных функций, правилом $(\partial_\mu \omega, \varphi) = -(\omega, \partial_\mu \varphi)$ для всех $1 \leq \mu \leq m, \omega \in \mathfrak{A}', \varphi \in \mathfrak{A}$. В частности, $(f \partial_\mu \omega, \varphi) = -(\omega, \partial_\mu (f\varphi))$ для всех $f \in \mathfrak{M}, 1 \leq \mu \leq m, \omega \in \mathfrak{A}', \varphi \in \mathfrak{A}$. Таким образом (см. п. 5.2):

- $\Omega^q(\mathfrak{A}') = \{\omega = (1/q!) \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \mid \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathfrak{A}'\};$
- $d\omega = (1/(q+1)!) \sum_{1 \leq \mu_0, \dots, \mu_q \leq m} (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}, \text{ где } (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_q} = \sum_{0 \leq k \leq q} (-1)^k \partial_{\mu_k} \omega_{\mu_0 \dots \check{\mu}_k \dots \mu_q}.$

В свою очередь:

- $\mathcal{C}_q(\mathfrak{A}) = \{\phi = (1/q!) \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \phi^{\mu_1 \dots \mu_q} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_q} \mid \phi^{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathfrak{A}\};$
- $\delta\phi = (1/(q-1)!) \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_{q-1} \leq m} (\delta\phi)^{\mu_1 \dots \mu_{q-1}} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_{q-1}}, \text{ где } (\delta\phi)^{\mu_1 \dots \mu_{q-1}} = -\sum_{1 \leq \mu \leq m} \partial_\mu \phi^{\mu \mu_1 \dots \mu_{q-1}}.$

3. ИЗОМОРФИЗМ ТИПА ХОДЖА

Обозначим через $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_q}$ знак перестановки $(\mu_1, \dots, \mu_q) \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_q)$, где $0 \leq q \leq m, 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m, 1 \leq \nu_1, \dots, \nu_q \leq m$ (в частности, $\epsilon_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$ – символ Кронекера). Положим $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m}^{1 \dots m}, \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_m} = \epsilon_{1 \dots m}^{\nu_1 \dots \nu_m}$. Имеет место равенство

$$\frac{1}{q!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_q \nu_1 \dots \nu_{m-q}}^{\nu_1 \dots \nu_{m-q}} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_q \lambda_1 \dots \lambda_{m-q}} = \begin{cases} \epsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-q}}^{\nu_1 \dots \nu_{m-q}}, & 0 \leq q < m, \\ 1, & q = m. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место изоморфизмы*

$$\star = \star^q : \mathcal{C}_q(\mathfrak{A}) \simeq \Omega^{m-q}(\mathfrak{A}), \quad \phi \mapsto \omega = \star^q \phi, \quad \phi = (\star^q)^{-1} \omega, \quad 0 \leq q \leq m,$$

где

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{q!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \phi^{\mu_1 \dots \mu_q} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_q}, \\ \omega &= \frac{1}{(m-q)!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_{m-q} \leq m} \omega_{\nu_1 \dots \nu_{m-q}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{m-q}}, \\ \omega_{\nu_1 \dots \nu_{m-q}} &= \frac{1}{q!} \sum_{1 \leq \mu_1, \dots, \mu_q \leq m} \phi^{\mu_1 \dots \mu_q} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_q \nu_1 \dots \nu_{m-q}}, \\ \phi^{\mu_1 \dots \mu_q} &= \frac{1}{(m-q)!} \sum_{1 \leq \nu_1, \dots, \nu_{m-q} \leq m} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_q \nu_1 \dots \nu_{m-q}} \omega_{\nu_1 \dots \nu_{m-q}}, \end{aligned}$$

причем справедливы равенства

$$\star^{q-1} \circ \delta^q = (-1)^q d^{m-q} \circ \star^q, \quad 0 \leq q \leq m.$$

Доказательство проводится путем прямых вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Изоморфизм $\star$ превратится в известный изоморфизм Ходжа, если добавить евклидову метрику на $\mathbb{R}^m$, отождествляющую пространства $\mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$ и $\Omega^q(\mathfrak{A})$ (см., например, монографию [5]).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место изоморфизм комплексов*

$$\star: \{\mathcal{C}_q(\mathfrak{A}); \delta^q\} \simeq \{\Omega^{m-q}(\mathfrak{A}); d^q\}$$

и изоморфизмы линейных пространств

$$\star: H_q(\mathfrak{A}) \simeq H^{m-q}(\mathfrak{A}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место изоморфизмы линейных пространств*

$$H^q(\mathfrak{A}') \simeq H^{m-q}(\mathfrak{A}'), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Для доказательства теоремы достаточно объединить следствие 1 и теорему 2 (см. ниже п. 5.3).

4. КОГОМОЛОГИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ШВАРЦА

В работе [4] были вычислены линейные пространства когомологий алгебр основных функций Шварца $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и алгебры $\mathcal{M}$ гладких функций умеренного роста на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. А именно, было установлено, что

$$H^q(\mathcal{E}) = H^q(\mathcal{M}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0, \end{cases} \quad H^q(\mathcal{D}) = H^q(\mathcal{S}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = m, \\ 0, & q \neq m. \end{cases}$$

В силу теоремы 1 отсюда следует, что

$$H^q(\mathcal{E}') = H^q(\mathcal{M}') = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = m, \\ 0, & q \neq m, \end{cases} \quad H^q(\mathcal{D}') = H^q(\mathcal{S}') = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Изоморфизмы $H^m(\mathcal{E}') \simeq \mathbb{F}$ и $H^m(\mathcal{M}') \simeq \mathbb{F}$ действуют по правилу: $[\omega] \mapsto (\omega, \partial_1 \wedge \cdots \wedge \partial_m)$, а изоморфизмы $H^0(\mathcal{D}') \simeq \mathbb{F}$ и $H^0(\mathcal{S}') \simeq \mathbb{F}$ представляют собой короткую запись того, что для данной обобщенной функции $\omega \in \mathcal{D}'$ равенства $\partial_\mu \omega = 0$ для всех $1 \leq \mu \leq m$ справедливы тогда и только тогда, когда ω – постоянная.

5. ДОПОЛНЕНИЕ

5.1. Формальный комплекс де Рама, ассоциированный с алгеброй. Напомним [4], что с каждой алгеброй ассоциирован формальный комплекс де Рама (см. также работу [6]). А именно, пусть дана алгебра $\mathfrak{A}$ над полем $\mathbb{F}$, наделенная локально-выпуклой топологией. Тогда определены:

- $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ – унитарная ассоциативная алгебра всех мультипликаторов алгебры $\mathfrak{A}$,
- $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$,

причем выполнены условия согласования:

- определено левое действие $\mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D})$ правилом $\mu X = \mu \circ X$ для всех $\mu \in \mathfrak{M}$ и $X \in \mathfrak{D}$; другими словами, на $\mathfrak{D}$ определена структура левого $\mathfrak{M}$ -модуля;
- определено действие $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ правилом $X\mu = [X, \mu]$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $\mu \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{M}$; другими словами, на $\mathfrak{M}$ определена структура Ли модуля над $\mathfrak{D}$.

Далее предполагаем, что алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}$ коммутативна. Для этого достаточно, чтобы исходная алгебра $\mathfrak{A}$ имела тривиальный аннулятор, т.е. $\text{ann } \mathfrak{A} = \{f \in \mathfrak{A} \mid f \cdot g = g \cdot f = 0 \ \forall g \in \mathfrak{A}\} = 0$.

Определена внешняя алгебра $\wedge \mathfrak{D} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \wedge^q \mathfrak{D}$ над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули

$$\wedge^q \mathfrak{D} = \begin{cases} \wedge_{\mathfrak{M}}^q \mathfrak{D}, & q > 0, \\ \mathfrak{M}, & q = 0, \\ 0, & q < 0, \end{cases}$$

внешние тензорные степени берутся в категории $\mathfrak{M}$ -модулей. Определена внешняя алгебра $\Omega(\mathfrak{A}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}; \mathfrak{A}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\mathfrak{A})$ над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули $\Omega^q(\mathfrak{A}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}; \mathfrak{A})$. В частности, на $\wedge \mathfrak{D}$ и $\Omega(\mathfrak{A})$ определены структуры $\mathfrak{M}$ -модулей.

Внешний дифференциал $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathfrak{A}))$ определен формулой Картана:

$$\begin{aligned} d^q &= d|_{\Omega^q(\mathfrak{A})} : \Omega^q(\mathfrak{A}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathfrak{A}), \quad \omega \mapsto d^q \omega, \\ d^q \omega(X_0, \dots, X_q) &= \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq q} (-1)^k X_k(\omega(X_0, \dots, \check{X}_k, \dots, X_q)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq k < l \leq q} (-1)^{k+l} \omega([X_k, X_l], X_0, \dots, \check{X}_k, \dots, \check{X}_l, \dots, X_q) \right\}, \end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Omega^q(\mathfrak{A})$ и $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, где значок $\check{}$ означает, что аргумент под ним пропущен. Композиция $d \circ d = 0$, так что определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathfrak{A}); d^q\}$ – формальный комплекс де Рама, ассоциированный с алгеброй $\mathfrak{A}$, с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathfrak{A}) = \text{Ker } d^q / \text{Im } d^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

5.2. Комплекс де Рама, ассоциированный с пространством линейных функционалов над алгеброй. Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$, наделенная локально-выпуклой топологией, и $\mathfrak{A}' = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A}; \mathbb{F})$ – линейное пространство всех линейных непрерывных функционалов на линейном пространстве $\mathfrak{A}$, наделенное слабой топологией (топологией поточечной сходимости).

На линейном пространстве $\mathfrak{A}'$ определено действие $\mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A}')$ правилом $(\mu\chi, \varphi) = (\chi, \mu\varphi)$ для всех $\mu \in \mathfrak{M}$, $\chi \in \mathfrak{A}'$ и $\varphi \in \mathfrak{A}$, так что на $\mathfrak{A}'$ определена структура $\mathfrak{M}$ -модуля.

Всюду ниже считаем, что определено действие $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A}')$, где $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A}')$ – алгебра Ли всех дифференцирований $\mathfrak{M}$ -модуля $\mathfrak{A}'$ (в частности, $X(\mu \cdot \nu) = (X\mu) \cdot \nu + \mu \cdot (X\nu)$ и $X(\mu \cdot \chi) = (X\mu) \cdot \chi + \mu \cdot (X\chi)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ и $\chi \in \mathfrak{A}'$).

Определен $\mathfrak{M}$ -модуль $\Omega(\mathfrak{A}') = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}; \mathfrak{A}') = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\mathfrak{A}')$ над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули $\Omega^q(\mathfrak{A}') = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}; \mathfrak{A}')$.

Внешний дифференциал $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega(\mathfrak{A}'))$ определен приведенной выше формулой Картана, где дифференциальные формы $\omega \in \Omega^q(\mathfrak{A}')$. Композиция $d \circ d = 0$, так

что определен комплекс линейных пространств $\{\Omega^q(\mathfrak{A}'); d^q\}$ – *формальный комплекс де Рама, ассоциированный с линейным пространством $\mathfrak{A}'$ линейных функционалов на алгебре $\mathfrak{A}$* , с линейными пространствами когомологий $H^q(\mathfrak{A}') = \text{Ker } d^q / \text{Im } d^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$.

5.3. Гомологии алгебры $\mathfrak{A}$ и двойственность. Пусть по-прежнему $\mathfrak{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$. Определена градуированная алгебра

$$\mathcal{C}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \bigotimes_{\mathfrak{M}} \mathfrak{D} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$$

над полем $\mathbb{F}$, где $\mathfrak{M}$ -модули $\mathcal{C}_q(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \bigotimes_{\mathfrak{M}} \wedge^q \mathfrak{D}$. Элементы $\mathfrak{M}$ -модуля $\mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$ называются *q-цепями с коэффициентами в алгебре $\mathfrak{A}$* .

Правило $(\omega, \varphi \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_q) = (\omega(X_1, \dots, X_q), \varphi)$ для всех $\Omega^q(\mathfrak{A}')$, $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, $\varphi \in \mathfrak{A}$, $q \in \mathbb{N}$, дает альтернативное описание $\mathfrak{M}$ -модуля $\Omega(\mathfrak{A}')$, а именно

$$\Omega^q(\mathfrak{A}') = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}; \mathfrak{A}') = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}_q(\mathfrak{A}); \mathbb{F}) = \mathcal{C}_q(\mathfrak{A})', \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Правило $(\chi, X' \varphi) = (X\chi, \varphi)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $\chi \in \mathfrak{A}'$ и $\varphi \in \mathfrak{A}$ определяет *дуальное действие (сопряжение по Лагранжу) $\mathfrak{D} \ni X \mapsto X' \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{A})$* , причем равенство $X \circ \mu = X\mu + \mu \circ X$ переходит в равенство $\mu \circ X' = X\mu + X' \circ \mu$, так что $X\mu = [X, \mu] = [\mu, X']$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $\mu \in \mathfrak{M}$.

Правило $(\omega, \delta\phi) = (d\omega, \phi)$ для всех $\phi \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$, $\omega \in \Omega^{q-1}(\mathfrak{A}')$ определяет *граничный оператор $\delta \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}(\mathfrak{A}))$* . Подробнее,

$$\begin{aligned} \delta_q &= \delta|_{\mathcal{C}_q(\mathfrak{A})} : \mathcal{C}_q(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}(\mathfrak{A}), \quad \phi \mapsto \delta_q \phi, \\ \delta_q(\varphi \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_q) &= \frac{1}{q} \left\{ \sum_{1 \leq k \leq q} (-1)^{k-1} X'_k \varphi \otimes X_1 \wedge \dots \wedge \check{X}_k \wedge \dots \wedge X_q + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq k < l \leq q} (-1)^{k+l} \varphi \otimes [X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \check{X}_k \wedge \dots \wedge \check{X}_l \wedge \dots \wedge X_q \right\} \end{aligned}$$

для всех $\phi = \varphi \otimes X_1 \wedge \dots \wedge X_q \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$, $q \in \mathbb{N}$. Композиция $\delta \circ \delta = 0$, так что определен комплекс линейных пространств $\{\mathcal{C}_q(\mathfrak{A}); \delta_q\}$ с линейными пространствами $H_q(\mathfrak{A}) = \text{Ker } \delta_q / \text{Im } \delta_{q+1}$ *гомологий алгебры $\mathfrak{A}$* , $q \in \mathbb{Z}$. Подчеркнем, что *эта конструкция зависит от определения действия алгебры Ли $\mathfrak{D}$ на пространстве $\mathfrak{A}'$* .

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место изоморфизмы*

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa^q : H^q(\mathfrak{A}') \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(H_q(\mathfrak{A}); \mathbb{F}) = H_q(\mathfrak{A})', \quad q \in \mathbb{Z}, \\ \omega &\mapsto \varkappa\omega : H_q(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathbb{F}, \\ \phi &\mapsto (\varkappa\omega, \phi) = (\omega, \phi), \end{aligned}$$

где $\omega = \omega + \text{Im } d^{q-1}$, $\omega \in \text{Ker } d^q$, $\phi = \phi + \text{Im } \delta_{q+1}$, $\phi \in \text{Ker } \delta_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} (\omega + \text{Im } d^{q-1}, \phi + \text{Im } \delta_{q+1}) &= \\ &= (\omega, \phi) + (\text{Im } d^{q-1}, \phi) + (\omega, \text{Im } \delta_{q+1}) + (\text{Im } d^{q-1}, \text{Im } \delta_{q+1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\omega, \phi) + (\Omega^{q-1}(\mathfrak{A}'), \delta\phi) + (d\omega, \mathcal{C}_{q-1}(\mathfrak{A})) + (d\Omega^{q-1}(\mathfrak{A}'), \mathcal{C}_{q+1}(\mathfrak{A})) = \\
&= (\omega, \phi) + 0 + 0 + 0 = (\omega, \phi),
\end{aligned}$$

так что отображения $\varkappa^q: H^q(\mathfrak{A}') \rightarrow H_q(\mathfrak{A})'$ определены корректно.

Далее, ядра $\text{Ker } \varkappa^q = \{\omega \in H^q(\mathfrak{A}') \mid \omega \in \text{Ker } d^q, \omega|_{\text{Ker } \delta_q} = 0\}$. Мы докажем, что $\text{Ker } \varkappa^q = 0$, если для каждого $\omega \in \text{Ker } \varkappa^q$ найдем функционал $\chi \in \Omega^{q-1}(\mathfrak{A}') = \mathcal{C}_{q-1}(\mathfrak{A})'$ такой, что $\omega = d\chi$. Условие $\omega|_{\text{Ker } \delta_q} = 0$ позволяет определить функционал $\bar{\chi}$ на подпространстве $\text{Im } \delta_q \subset \mathcal{C}_{q-1}(\mathfrak{A})$ равенством $(\bar{\chi}, \delta\psi) = (\omega, \psi)$ для всех $\psi \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$. Теорема Хана–Банаха позволяет продолжить этот функционал до непрерывного функционала χ на всем $\mathcal{C}_{q-1}(\mathfrak{A})$, причем по построению будем иметь требуемое равенство $d\chi = \omega$, так что $\text{Ker } \varkappa^q = 0$.

Наконец, образы $\text{Im } \varkappa^q = \{f \in H_q(\mathfrak{A})' \mid f = \varkappa^q \omega, \omega \in \text{Ker } d^q\}$, и мы докажем, что $\text{Im } \varkappa^q = H_q(\mathfrak{A})'$, если для каждого $f \in H_q(\mathfrak{A})'$ найдем функционал $\omega \in \text{Ker } d^q$ такой, что $\varkappa^q \omega = f$, т.е. $(f, \phi) = (\omega, \phi) = (\omega, \phi)$ для всех $\phi \in \text{Ker } \delta_q$. Определим функционал $\bar{\omega}$ на подпространстве $\text{Ker } \delta_q$ правилом $(\bar{\omega}, \phi) = (f, \phi)$ для всех $\phi \in \text{Ker } \delta_q$ и с помощью теоремы Хана–Банаха продолжим его до непрерывного функционала ω на всем $\mathcal{C}_q(\mathfrak{A})$. Тогда для всякого $\phi \in \mathcal{C}_{q+1}(\mathfrak{A})$ будем иметь $(d\omega, \phi) = (\omega, \delta\phi) = (f, 0) = 0$, поскольку $\delta\phi + \text{Im } \delta_{q+1} = 0$. Итак, построенный функционал искомый, $\text{Im } \varkappa^q = H_q(\mathfrak{A})'$, и теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1).

Список литературы

- [1] L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Tome I, Actualites scientifiques et industrielles, **1091**, Hermann & Cie., Paris, 1950; Tome II, **1121**, 1951.
- [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959.
- [3] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.
- [4] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 323–334.
- [5] T. Aubin, *A Course in Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, **27**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [6] V. V. Zharinov, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **6**:1–4 (1998), 347–356.

Поступила в редакцию 10.11.2011