Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Решение нелинейного уравнения Шредингера в виде двухфазных странных волн, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 89–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 03:19:34

© 2012 г.

А. О. Смирнов*

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ВИДЕ ДВУХФАЗНЫХ СТРАННЫХ ВОЛН

Построено семейство двухзонных решений фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера. Найдено условие, при котором решения имеют поведение так называемых странных волн, расположенных в узлах двумерной решетки. Исследована зависимость параметров решетки от параметров спектральной кривой.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шредингера, тета-функция, редукция, накрытие.

1. ВВЕДЕНИЕ

Волны-убийцы (rogue waves), или странные волны (freak waves) в настоящее время привлекают к себе внимание не меньше чем солитоны в период их появления, поскольку они представляют большой интерес и с теоретической, и с прикладной точек зрения. В отличие от солитонов, которые являются распространяющимися с постоянной скоростью незатухающими уединенными волнами, странные волны представляют собой локальный кратковременный рост амплитуды или “волны, появляющиеся ниоткуда и исчезающие без следа” [1]. Хотя волны такого типа обнаружены в моделях, относящихся к различным областям физики (см., например, сборник [2]), основные области появления странных волн – это гидродинамика [3], [4] и нелинейная оптика [5], [6].

Обычно при изучении странных волн в главном приближении рассматривают фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\psi_z + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

а при выборе точных решений обращаются к рациональным решениям, получающимся в результате преобразования Дарбу и его обобщений [7]–[11]. Точные решения, отличающиеся от рациональных, упоминаются довольно редко [5], [12]–[14]. При учете более тонких эффектов [3]–[5], [14]–[19] уравнения отличаются от НУШ

* Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: alsmir@guap.ru

дополнительными слагаемыми, приводящими к неинтегрируемости уравнения и, соответственно, к невозможности построения некоторых классов решений. Вместе с тем существуют ситуации, когда этими дополнительными слагаемыми можно пренебречь [5], [14], [19], ограничиться уравнением (1), которое является интегрируемым, и рассмотреть такие присущие интегрируемым уравнениям классы решений, как многофазные периодические решения. В частности, в работах [14], [19] показано, что начальные данные, полученные в рамках Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) могут быть использованы для построения шестифазного решения НУШ.

Естественно, что если рассматривать волны на поверхности воды, то трудно ожидать возникновения периодических волн-убийц. По крайней мере, практических наблюдений таких явлений пока не зафиксировано. В то же время в нелинейной оптике вполне возможно целенаправленное создание ситуаций, приводящих к возникновению периодических странных волн, образующих решетку “световых точек” в планарном волноводе. В этой связи обратим внимание на работы [9], [10], в которых у рациональных решений НУШ параметры выбраны так, что странные волны образуют симметричные конфигурации на плоскости XOZ .

В настоящей работе построено двухфазное решение уравнения (1), выражающееся через эллиптические тета-функции, и указана область параметров, при которых оно ведет себя как периодическая по z странная волна. Для построения решения использован метод конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования, заложенный в 1974 г. в работах [20] и [21]. Становление этого метода связано прежде всего с именами Дубровина, Новикова, Матвеева, Итса и Кричевера (см., например, [22]–[26]). С начала 80-х гг. в рамках метода конечнозонного интегрирования в работах Белоколоса, Энольского, Бабица, Бобенко, Матвеева и автора развивается метод редукции g -зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений к решениям, выражающимся через тета-функции меньшей размерности (см., например, работу [27] и библиографию в ней).

Стремление упростить решения было связано прежде всего со сложностью анализа явных формул для конечнозонных решений, поскольку эти решения, во-первых, выражаются через тета-функции Римана, представляющие собой многомерные ряды Фурье, и, во-вторых, зависят от параметров, которые являются периодами абелевых дифференциалов, определенных на некоторой алгебраической кривой, называемой спектральной. Однако несмотря на упрощение вычислений анализ конечнозонных решений все равно оставался сложным, поэтому активного использования этих решений не произошло. Развитие вычислительной техники все же позволило ввести в активный научный оборот конечнозонные решения различных интегрируемых нелинейных уравнений (как общего вида, так и выражающиеся через эллиптические функции), что отразилось в появлении работ [28]–[34].

Отметим также, что рациональные [7]–[11] и периодические по x гомоклинические решения [13], [14], [19], [35]–[37], которые обычно получают с помощью многократных преобразований Дарбу или Беклунда, можно вывести, используя полное или частичное вырождение многофазных решений [27].

Цель настоящей статьи – пробудить у научного сообщества интерес к использованию метода конечнозонного интегрирования для построения точных общих, эллиптических и вырожденных многофазных решений.

2. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ ФОКУСИРУЮЩЕГО НУШ

Фокусирующее НУШ (1) может быть получено из системы “расщепленного” нелинейного уравнения Шредингера (рНУШ)

$$i\psi_z + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi = 0, \quad i\phi_z - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 = 0 \quad (2)$$

путем редукции $\phi = -\psi^*$. В свою очередь рНУШ может быть получено как условие совместности следующей системы линейных уравнений:

$$Y_x = \mathfrak{U}Y, \quad Y_z = \mathfrak{V}Y, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\psi \\ -i\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V} = 2\lambda\mathfrak{U} + \begin{pmatrix} -i\psi\phi & -\psi_x \\ -\phi_x & i\psi\phi \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1. \end{aligned}$$

Конечнозонные решения системы уравнений (2) строятся по гиперэллиптической кривой $\Gamma = \{(w, \lambda)\}$ рода g [26], [27], [38], [39],

$$\Gamma: w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j).$$

Точки ветвления λ_j , $j = 1, \dots, 2g+2$, этой кривой являются краями зон спектра оператора Дирака $\mathfrak{U}$. Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две различные точки $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ кривой Γ . В случае $\phi = -\bar{\psi}$ кривая Γ имеет вид [26], [27]

$$\Gamma: w^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j), \quad \text{Im } \lambda_j \neq 0. \quad (4)$$

Следуя стандартной процедуре построения конечнозонных решений [27], выберем на кривой Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (5)$$

Хорошо известно, что матрица периодов B кривой Γ с элементами $B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j$, $k, j = 1, \dots, g$, есть симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью. Построим по матрице периодов g -мерную тета-функцию с характеристиками $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^g$ [26], [40]:

$$\begin{aligned} \Theta[\eta^t; \zeta^t](p|B) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \pi i (\mathbf{m} + \eta)^t B (\mathbf{m} + \eta) + 2\pi i (\mathbf{m} + \eta)^t (p + \zeta) \}, \\ \Theta[0^t; 0^t](p|B) &\equiv \Theta(p|B), \end{aligned} \quad (6)$$

где $p \in \mathbb{C}^g$, а суммирование проходит по целочисленной g -мерной решетке.

Определим также на кривой Γ нормированные абелевы интегралы $\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$ второго рода и интеграл $\omega_0(\mathcal{P})$ третьего рода,

$$\oint_{a_k} d\Omega_1 = \oint_{a_k} d\Omega_2 = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

со следующей асимптотикой в бесконечно удаленных точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\mathcal{P}) &= \pm i(\lambda - K_1 + O(\lambda^{-1})), & \Omega_2(\mathcal{P}) &= \mp i(2\lambda^2 + K_2 + O(\lambda^{-1})), \\ \omega_0(\mathcal{P}) &= \mp (\ln \lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), & w &= \pm (\lambda^{g+1} + O(\lambda^g)) \end{aligned}$$

при $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm$. Обозначим через $2\pi i\mathbf{U}$, $2\pi i\mathbf{V}$ векторы b -периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1 [27]. *Функция*

$$Y(\mathcal{P}, x, z) = \begin{pmatrix} y_1(\mathcal{P}, x, z) & y_1(\tau_0\mathcal{P}, x, z) \\ y_2(\mathcal{P}, x, z) & y_2(\tau_0\mathcal{P}, x, z) \end{pmatrix},$$

где τ_0 – гиперэллиптическая инволюция, $\tau_0: (w, \lambda) \rightarrow (-w, \lambda)$, и

$$\begin{aligned} y_1(\mathcal{P}, x, z) &= \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z - \mathbf{X}) \Theta(\mathbf{Z})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} e^{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + i\Phi(x, z)}, \\ y_2(\mathcal{P}, x, z) &= \rho \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{\Delta} - \mathbf{X}) \Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} e^{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z - i\Phi(x, z) + \omega_0(\mathcal{P})}, \end{aligned}$$

при любом $\rho \neq 0$ и при любых z является собственной функцией оператора Дирака $\mathfrak{U}$ с потенциалом

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \frac{2K_0}{\rho} \frac{\Theta(\mathbf{Z}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} e^{2i\Phi(x, z)}, \\ \phi(x, z) &= 2\rho K_0 \frac{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} e^{-2i\Phi(x, z)}, \end{aligned} \tag{7}$$

удовлетворяющим рНУШ (2). Здесь $\mathbf{\Delta} = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-)$ – вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки $\mathcal{P}_\infty^-$ и $\mathcal{P}_\infty^+$ и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\Phi(x, z) = K_1x + K_2z, \quad \mathbf{X} = \mathcal{K} + \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), \quad \mathbf{Z} = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{X},$$

$\mathcal{K}$ – вектор римановых констант [26], [40]–[42], а $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, g$, – неспециальный дивизор.

Из соотношений (4), (7) следует, что для фокусирующего НУШ выполняется равенство

$$|\psi|^2 = -4K_0^2 \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta}) \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta^2(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})}, \tag{8}$$

где $\text{Im } \mathbf{U} = \text{Im } \mathbf{V} = \text{Im } \mathbf{Z} = 0$, $K_0^2 < 0$.

3. МАТРИЧНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ АППЕЛЯ И РЕДУКЦИЯ ТЕТА-ФУНКЦИЙ

Пусть алгебраическая кривая Γ обладает голоморфным автоморфизмом τ , который преобразует базис циклов следующим образом:

$$\hat{\tau}\mathbf{a} = M\mathbf{a}, \quad \hat{\tau}\mathbf{b} = (M^t)^{-1}\mathbf{b} + L\mathbf{a}. \quad (9)$$

Тогда матрица периодов B удовлетворяет уравнению

$$B = M^t B M - M^t L. \quad (10)$$

Проведем преобразование подобия $G = T^{-1} M T$ матрицы M с помощью целочисленной матрицы T , выбрав G так, чтобы равенство

$$B' = G^t B' G \quad (11)$$

приводило к блочной структуре матрицы

$$B' = T^t (B - A) T, \quad (12)$$

где $A = \operatorname{Re} B$ – симметрическая рациональная матрица, также удовлетворяющая уравнению (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если автоморфизм τ есть инволюция, то матрицы M и L удовлетворяют соотношениям $M^2 = I$, $M^t L = -LM$ и $L^t = -L$, а G – диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы M .

ТЕОРЕМА 2 [43]. Пусть матрица B' , построенная по формуле (12), удовлетворяет условию (11), а матрица $A' = T^t A T$ является целочисленной. Тогда

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)} \exp \{ -\pi i \boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k})(A' - D) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) \} \Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t \mathbf{p}|B' + D),$$

где D – диагональная матрица, $D_{jj} = A'_{jj}$, суммирование по $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)$ означает конечную сумму по $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g$ таким, что $0 \leq (T^{-1} \mathbf{k})_j < 1$,

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) = T^{-1} \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k}) = (A' - D) T^{-1} \mathbf{k}.$$

При этом, поскольку матрица B' имеет блочную структуру, а матрица D – диагональную структуру, тета-функция $\Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t \mathbf{p}|B' + D)$ может быть представлена в виде произведения тета-функций меньших размерностей.

Доказательство теоремы заключается в переходе в формуле (6) от суммирования по $\mathbf{m}$ к суммированию по $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ таким, что $\mathbf{m} = T\mathbf{n} + \mathbf{k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле для доказательства (и для применения) теоремы достаточно целочисленности матрицы $A' - D$, а не A' .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку определитель матрицы T является якобианом перехода от одной решетки суммирования к другой, число слагаемых в сумме $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)$ равно $|T|$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы имеет место формула

$$\Theta[\boldsymbol{\eta}^t; \boldsymbol{\zeta}^t](\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g(T)} \exp \{ -\pi i \boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k})(A' - D) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) \} \times \Theta[\boldsymbol{\eta}^t(\mathbf{k}); \boldsymbol{\zeta}^t(\mathbf{k})](T^t \mathbf{p}|B' + D),$$

где $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{k}) = T^{-1}(\mathbf{k} + \boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k}) = (A' - D)T^{-1}(\mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}) + T^t \boldsymbol{\zeta}$.

Рис. 1. Канонический базис циклов на кривой Γ_2 .

4. РЕШЕНИЕ, ПОСТРОЕННОЕ ПО КРИВОЙ С ИНВЕРСИЕЙ

Возьмем в качестве спектральной кривую

$$\Gamma_2: w^2 := (\lambda^2 - 2a\lambda \cos \alpha + a^2)(\lambda^2 - 2b\lambda \cos \alpha + b^2)(\lambda^2 - 2c\lambda \cos \beta + c^2), \quad (13)$$

где $0 < a < b$, $c = \sqrt{ab}$. Выберем на ней базис циклов, как показано на рис. 1, и базис нормированных голоморфных дифференциалов

$$d\mathcal{U}_j = \frac{c_{j1}\lambda + c_{j2}}{w} d\lambda. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что при антиголоморфной инволюции $\tau_1: (w, \lambda) \rightarrow (\bar{w}, \bar{\lambda})$ базис циклов преобразуется по правилу

$$\hat{\tau}a_1 = -a, \quad \hat{\tau}b_1 = b + Ka, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Из формул (14), (15) следует, что

$$\overline{c_{jk}} = -c_{jk}, \quad \operatorname{Re} B = -\frac{1}{2}K = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

На кривой Γ_2 (13), кроме антиголоморфной инволюции, определена также голоморфная инволюция $\tau_2: (w, \lambda) \rightarrow (c^3\lambda^{-3}w, c^2\lambda^{-1})$, преобразующая базис циклов по правилу (9), где

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

в результате матрица периодов B кривой Γ_2 удовлетворяет уравнению (10) и, следовательно, имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2i\mathbf{b}_1 & -1/2 + i\mathbf{b}_1 \\ -1/2 + i\mathbf{b}_1 & i\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}.$$

Возьмем G_2 в виде диагональной матрицы, составленной из собственных чисел матрицы M_2 :

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы T_2 , B' и A' имеют вид

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2i\mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из этих равенств и теоремы 2 следует, что тета-функция, построенная по матрице периодов кривой Γ_2 , может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых является произведением одномерных тета-функций:

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \Theta(p_1|2i\mathbf{b}_1) \Theta(2p_2 - p_1|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) + \\ + i\Theta[1/2, -1/2](p_1|2i\mathbf{b}_1) \Theta[1/2, -1/2](2p_2 - p_1|2 + 4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1)$$

или, эквивалентно,

$$\Theta(\mathbf{p}|B) = \vartheta_3(p_1|2i\mathbf{b}_1) \vartheta_3(2p_2 - p_1|4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1) - \\ - \vartheta_1(p_1|2i\mathbf{b}_1) \vartheta_1(2p_2 - p_1|4i\mathbf{b}_2 - 2i\mathbf{b}_1), \quad (17)$$

где

$$\vartheta_3(p|b) = \Theta[0, 0](p|b) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{\pi m^2 i b} \cos(2m\pi p), \\ \vartheta_1(p|b) = \Theta[1/2, -1/2](p|b) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{\pi(2m+1)^2 i b/4} (-1)^m \sin((2m+1)\pi p)$$

суть эллиптические тета-функции Якоби [44].

Инвариантность кривой Γ_2 относительно голоморфных инволюций приводит к наличию накрывающих отображений

$$\sigma_+ : \Gamma \rightarrow \Gamma_+ = \Gamma/\tau_2, \quad \sigma_- : \Gamma \rightarrow \Gamma_- = \Gamma/\tau_2\tau_0,$$

где τ_0 – гиперэллиптическая инволюция. Кривые $\Gamma_{\pm}$ задаются следующими уравнениями:

$$\Gamma_{\pm} : \chi_{\pm}^2 = (t \pm 2c)(t - ae^{i\alpha} - be^{-i\alpha})(t - ae^{-i\alpha} - be^{i\alpha})(t - 2c \cos \beta) = \\ = (t \pm 2c)(t - 2c \cos \beta)P_2(t),$$

где

$$t = \lambda + \frac{c^2}{\lambda}, \quad \chi_{\pm} = \frac{\lambda \pm c}{\lambda^2} w, \quad \frac{dt}{\chi_{\pm}} = \frac{\lambda \mp c}{w} d\lambda, \quad (18)$$

$$P_2(t) = t^2 - 2(a+b)t \cos \alpha + a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha. \quad (19)$$

Рис. 2. Периодическое по z решение (20) фокусирующего НУШ при $a = 10$, $b = 11$, $\beta = \pi/3$, $\varkappa_1 = 0$. Здесь и далее на рис. 3–5 приведены общий вид решения и линии уровня поверхности $\psi(x, z)$ на плоскости XOZ .

Из равенств (8) и (17) вытекает, что квадрат абсолютной величины амплитуды решения фокусирующего НУШ равен

$$|\psi|^2 = -4K_0^2 \left(\vartheta_4(\varphi_1 + i\delta_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_4(\varphi_2 + i\delta_2 |i\mathbf{b}_-) - \vartheta_2(\varphi_1 + i\delta_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_2(\varphi_2 + i\delta_2 |i\mathbf{b}_-) \right) \times \\ \times \left(\vartheta_4(\varphi_1 - i\delta_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_4(\varphi_2 - i\delta_2 |i\mathbf{b}_-) - \vartheta_2(\varphi_1 - i\delta_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_2(\varphi_2 - i\delta_2 |i\mathbf{b}_-) \right) \times \\ \times \left(\vartheta_3(\varphi_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_3(\varphi_2 |i\mathbf{b}_-) - \vartheta_1(\varphi_1 |i\mathbf{b}_+) \vartheta_1(\varphi_2 |i\mathbf{b}_-) \right)^{-2}, \quad (20)$$

где $\vartheta_4(p) = \vartheta_3(p + 1/2)$, $\vartheta_2(p) = \vartheta_1(p + 1/2)$,

$$\varphi_1 = k_1 x + \varkappa_1 z + Z_1, \quad \varphi_2 = k_2 x + \varkappa_2 z + 2Z_2 - Z_1 \quad (21)$$

и

$$\varkappa_1 = -2(c(\cos \beta - 1) + (a + b) \cos \alpha) k_1, \\ \varkappa_2 = -2(c(\cos \beta + 1) + (a + b) \cos \alpha) k_2. \quad (22)$$

Вычисление параметров решения через параметры эллиптических кривых вынесено в приложение.

Из равенств (21) следует, что, не теряя общности, можно положить $Z_j = 0$, и что амплитуда решения является периодической по z , если один из коэффициентов $\varkappa_j$ обращается в ноль. Из (22) вытекает, что, поскольку $c = \sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, существуют значения угла α_j такие, что выполняются равенства

$$\cos \alpha_1 = -\frac{c}{a+b}(\cos \beta - 1), \quad \cos \alpha_2 = -\frac{c}{a+b}(\cos \beta + 1).$$

При этом обращаются в ноль коэффициенты $\varkappa_j$, и, следовательно, амплитуда решения является периодической по z . Некоторые из периодических по z решений фокусирующего НУШ изображены на рис. 2, 3. В общем случае решение (20) является периодическим по φ_j с периодами $T_j = 1$, образующими решетку периодов

Рис. 3. Периодическое по z решение (20) фокусирующего НУШ при $a = 10$, $b = 11$, $\beta = 29\pi/30$, $\varkappa_2 = 0$.

Рис. 4. Решение (20) фокусирующего НУШ при $a = 10$, $b = 10.1$, $\beta = \pi/3$, $b \cos \alpha = c \cos \beta$.

на плоскости XOZ . Нетрудно понять, что эта решетка будет ортогональной при выполнении условия $k_1 k_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 = 0$ или при

$$\cos \alpha = -\frac{c}{a+b} \left(\cos \beta \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4c^2}} \right), \quad c \geq \frac{1}{2}.$$

Анализируя решение (20), можно понять, что крутизна фронта решения зависит от значений δ_j : чем меньше δ_j , тем круче фронт. Другими словами, чем ближе друг к другу точки ветвления, находящиеся в верхней полуплоскости, тем больше решение похоже на странные волны (см. рис. 4). Соответственно удаление точек ветвления друг от друга ведет к уменьшению локализации решения (см. рис. 5). Естественно, надо учитывать, что решение, изображенное на рис. 4, скорее всего не имеет физического смысла, поскольку нелинейное уравнение Шредингера выводится в приближении слабой нелинейности. Таким образом, при использовании построенных решений в практических задачах необходимо каждый раз проводить их отбор на соответствие модели, предварительно перейдя от безразмерных функций и переменных к размерным.

Рис. 5. Решение (20) фокусирующего НУШ при $a = 6$, $b = 14$, $\beta = 5\pi/6$, $\alpha = \pi/6$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поведение точных решений, построенных в настоящей работе, полностью согласуется с результатами, полученными в работах [14], [19]. В этих работах по итогам нескольких тысяч численных симуляций НУШ сделан вывод, что чем ближе друг к другу точки ветвления λ_j , тем более модуляционно нестабильно решение, тем ближе орбита периодического решения к гомоклинической и тем более вероятен переход в хаотический режим при численном моделировании.

Отметим также, что несмотря на столь сильные различия в виде решений, изображенных на рис. 3–5, они принадлежат к одному классу двухфазных решений (20), представляющих собой нелинейную суперпозицию двух фаз φ_1 и φ_2 , заданных равенствами (21). Используя другие гиперэллиптические кривые рода $g = 2$ с большим числом прообразов накрывающего отображения, можно получить решения с большим числом пиков на параллелограмме периодов на плоскости XOZ . При этом, выбирая параметры решения, можно практически всегда построить периодическое по z и, в очень редких случаях, периодическое по x решения фокусирующего НУШ [45]–[47]. Некоторые из конструкций, дающие периодические и по x , и по z решения, приведены в статье автора [48] и в книге [5].

С помощью процедуры вырождения эллиптических функций в тригонометрические, гиперболические и рациональные (см., например, [27], [44]) можно получить уже непериодические решения с поведением странных волн. Поскольку эти вырождения равносильны предельным переходам $2\omega_j \rightarrow \infty$, где $2\omega_j$ – один из периодов эллиптической функции, решения будут выглядеть соответственно. Одна из пока нерешенных задач – получение компактных формул для рациональных странных волн большого порядка (т.е. с большим количеством пиков в окрестности некоторой точки) методом вырождения многофазных решений. Для решения этой задачи следует рассматривать многофазные решения, построенные по кривым высоких родов. В частности, можно рассмотреть решения, построенные по модификациям кривых, предложенных автором в статье [49]. Основная проблема при построении рациональных странных волн порядка n заключается в том, что в текущей параметризации выражения для соответствующих многочленов от двух переменных уже при $n = 5$ занимают несколько страниц. Несмотря на то что Гайард построил ра-

Рис. 6. Канонический базис циклов на кривой Γ_+ . Рис. 7. Канонический базис циклов на кривой Γ_- .

циональное решение порядка $n = 9$ (частное сообщение В.Б. Матвеева), вопрос о более компактной записи остается открытым.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление параметров решения

Нетрудно проверить, что накрывающие отображения $\sigma_{\pm}$ порождают следующие отображения между базисами циклов (см. рис. 6, 7):

$$\hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Из равенств (18) и (П.1) следует, что матрица коэффициентов нормированных голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_j$ (14) равна

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2A_+} & \frac{ic}{2A_+} \\ -\frac{i(A_+ + A_-)}{4A_+A_-} & \frac{ic(A_- - A_+)}{4A_+A_-} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2})$$

где

$$A_- = \int_{2c \cos \beta}^{2c} \frac{dt}{\sqrt{(2c-t)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}},$$

$$A_+ = \int_{-2c}^{2c \cos \beta} \frac{dt}{\sqrt{(t+2c)(2c \cos \beta - t)P_2(t)}}.$$

Вычисляя матрицу периодов B кривой Γ_2 , получаем

$$\mathbf{b}_1 = \frac{B_+}{2A_+}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{B_+}{4A_+} + \frac{B_-}{4A_-}$$

и

$$\mathbf{b}_+ = 2\mathbf{b}_1 = \frac{B_+}{A_+}, \quad \mathbf{b}_- = 4\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 = \frac{B_-}{A_-},$$

где $B_+ = B_+^1 + B_+^2$, $B_- = B_-^1 + B_-^2$,

$$\begin{aligned} B_+^1 &= \int_{-\infty}^{-2c} \frac{dt}{\sqrt{(t+2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}}, \\ B_+^2 &= \int_{2c \cos \beta}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t+2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}}, \\ B_-^1 &= \int_{-\infty}^{2c \cos \beta} \frac{dt}{\sqrt{(t-2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}}, \\ B_-^2 &= \int_{2c}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях координаты вектора Δ и связанные с ним сдвиги фаз решения δ_j равны

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{1}{2} + i \frac{B_+^1 - B_+^2}{2A_+}, & \Delta_2 &= -\frac{1}{2} + i \frac{B_+^1 - B_+^2}{4A_+} + i \frac{B_-^1 - B_-^2}{4A_-}, \\ \delta_1 &= \frac{B_+^1 - B_+^2}{2A_+}, & \delta_2 &= \frac{B_-^1 - B_-^2}{2A_-}. \end{aligned}$$

Абелевы дифференциалы второго рода на Γ_2 задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= i \frac{\lambda^3 + w_1 \lambda^2 + f_{11} \lambda + f_{12}}{w} d\lambda, \\ d\Omega_2 &= -4i \frac{\lambda^4 + w_1 \lambda^3 + w_2 \lambda^2 + f_{21} \lambda + f_{22}}{w} d\lambda, \end{aligned}$$

где w_j – коэффициенты асимптотики функции w в окрестности бесконечно удаленных точек,

$$w = \pm(\lambda^3 + w_1 \lambda^2 + w_2 \lambda + \dots), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_{\infty}^{\pm},$$

а коэффициенты f_{ij} определяются из условий нормировки.

Из билинейных соотношений Римана следует, что b -периоды нормированных абелевых дифференциалов второго рода равны

$$\begin{aligned} U_m &= \left(\frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_-} \Big|_{\xi_- = 0} - \frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_+} \Big|_{\xi_+ = 0} \right) = 2ic_{m1}, \\ V_m &= -2i \left(\frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_-^2} \Big|_{\xi_- = 0} - \frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_+^2} \Big|_{\xi_+ = 0} \right) = 4i(c_{m1}w_1 - c_{m2}), \end{aligned} \tag{П.3}$$

где $\xi_{\pm} = \lambda^{-1}$ – локальные параметры в окрестности бесконечно удаленных точек $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$, c_{mj} – коэффициенты голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_m$ (II.2) и

$$w_1 = -(a + b) \cos \alpha - c \cos \beta.$$

С помощью соотношений (II.3) находим волновые числа $k_1 = 1/A_+$, $k_2 = 1/A_-$ и параметры $\varkappa_j$ (22). Для вычисления K_0^2 обратимся к абелеву дифференциалу третьего рода

$$d\omega_0 = -\frac{\lambda^2 + f_{01}\lambda + f_{02}}{w} d\lambda.$$

Из условий нормировки следует, что

$$f_{01} = -\frac{1}{2} \left(\frac{D_+}{A_+} + \frac{D_-}{A_-} \right), \quad f_{02} = c^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{D_+}{A_+} - \frac{D_-}{A_-} \right),$$

где

$$D_- = \int_{2c \cos \beta}^{2c} \frac{t dt}{\sqrt{(2c-t)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}},$$

$$D_+ = \int_{-2c}^{2c \cos \beta} \frac{t dt}{\sqrt{(t+2c)(2c \cos \beta - t)P_2(t)}}.$$

Выражая гиперэллиптический интеграл $\omega_0(\mathcal{P})$ через эллиптические интегралы и вычисляя его асимптотику, получаем, что выполняется следующее равенство:

$$K_0^2 = \exp \left\{ \pi i + \frac{D_+(B_+^2 - B_+^1)}{2A_+} + \frac{D_-(B_-^2 - B_-^1)}{2A_-} - \frac{F_+^1 + F_+^2 + F_-^1 + F_-^2}{2} \right\},$$

где

$$F_+^1 = \int_{2c}^r \frac{t dt}{\sqrt{(t-2c)(t+2c \cos \beta)P_2(-t)}} +$$

$$+ \int_r^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{(t-2c)(t+2c \cos \beta)P_2(-t)}} - \frac{1}{t} \right) dt - \ln r,$$

$$F_+^2 = \int_{2c \cos \beta}^r \frac{t dt}{\sqrt{(t+2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}} +$$

$$+ \int_r^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{(t+2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}} - \frac{1}{t} \right) dt - \ln r,$$

$$F_-^1 = \int_{-2c \cos \beta}^r \frac{t dt}{\sqrt{(t+2c)(t+2c \cos \beta)P_2(-t)}} +$$

$$+ \int_r^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{(t+2c)(t+2c \cos \beta)P_2(-t)}} - \frac{1}{t} \right) dt - \ln r,$$

$$F_-^2 = \int_{2c}^r \frac{t dt}{\sqrt{(t-2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}} +$$

$$+ \int_r^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{(t-2c)(t-2c \cos \beta)P_2(t)}} - \frac{1}{t} \right) dt - \ln r;$$

здесь r – произвольное число, большее $a + b$.

Благодарности. Автор благодарит профессора В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках заявки на грант РФФИ № 12-01-00355.

Список литературы

- [1] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, M. Taki, *Phys. Lett. A*, **373**:6 (2009), 675–678.
- [2] N. Akhmediev, E. Pelinovsky, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 1–4.
- [3] A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ*, **88**:5 (2008), 356–359.
- [4] В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ*, **91**:2 (2010), 68–71.
- [5] Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, Физматлит, М., 2003.
- [6] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J. M. Dudley, *Nature Physics*, **6**:10 (2010), 790–795.
- [7] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 247–258.
- [8] P. Dubard, V. B. Matveev, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **11** (2011), 667–672.
- [9] A. Ankiewicz, D. J. Kedzora, N. Akhmediev, *Phys. Lett. A*, **375**:28–29 (2011), 2782–2785.
- [10] D. J. Kedzora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **84**:5 (2011), 056611, 7 pp.
- [11] B. Guo, L. Ling, Q. P. Liu, *Phys. Rev. E*, **85** (2012), 026607, 9 pp., arXiv:1108.2867.
- [12] A. R. Osborne, M. Onorato, M. Serio, *Phys. Lett. A*, **275**:5–6 (2000), 386–393.
- [13] A. Calini, C. M. Schober, *Phys. Lett. A*, **298**:5–6 (2002), 335–349.
- [14] C. M. Schober, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **25**:5 (2006), 602–620.
- [15] K. B. Dysthe, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **369**:1736 (1979), 105–114.
- [16] K. Trulsen, K. B. Dysthe, *Wave Motion*, **24**:3 (1996), 281–289.
- [17] K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe, M. G. Velarde, *Phys. Fluids*, **12**:10 (2000), 2433–2437.
- [18] A. Saini, V. M. Vyas, S. N. Pandey, T. S. Raju, P. K. Panigrahi, *Traveling wave solutions to nonlinear Schrödinger equation with self-steepening and self-frequency shift*, arXiv: 0911.2788.
- [19] A. L. Islas, C. M. Schober, *Phys. Fluids*, **17**:3 (2005), 031701, 4 pp.
- [20] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.
- [21] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KdV equations”, *Nonlinear Wave Motion* (Potsdam, NY, 1972), *Lectures in Applied Mathematics*, **15**, ed. A. C. Newell, AMS, Providence, RI, 1974, 85–96.
- [22] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **219**:3 (1974), 19–22.
- [23] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *ТМФ*, **23**:1 (1975), 51–68.
- [24] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [25] И. М. Кричевер, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208.
- [26] Б. А. Дубровин, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [27] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-geometrical Approach to Nonlinear Evolution Equations*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1994.
- [28] C. Klein, O. Richter, *Ernst Equation and Riemann Surfaces. Analytical and Numerical Methods*, *Lecture Notes in Physics*, **685**, Springer, Berlin, 2005.
- [29] К. Клейн, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 304–320.
- [30] A. I. Bobenko, C. Klein (eds.), *Computational Approach to Riemann Surfaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, **2013**, Springer, Berlin, 2011.
- [31] C. Kalla, C. Klein, *On the numerical evaluation of algebro-geometric solutions to integrable equations*, arXiv: 1107.2108.

- [32] C. Kalla, C. Klein, *New construction of algebro-geometric solutions to the Camassa–Holm equation and their numerical evaluation*, arXiv: [1109.5301](#).
- [33] E. G. Amosenok, A. O. Smirnov, *Lett. Math. Phys.*, **96**:1–3 (2011), 157–168.
- [34] А. О. Смирнов, Г. М. Головачев, Е. Г. Амосенок, *Нелинейная динам.*, **7**:2 (2011), 239–256.
- [35] D. W. McLaughlin, C. M. Schober, *Physica D*, **57**:3–4 (1992), 447–465.
- [36] M. J. Ablowitz, C. M. Schober, B. M. Herbst, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:17 (1993), 2683–2686.
- [37] A. Calini, N. M. Ercolani, D. W. McLaughlin, C. M. Schober, *Physica D*, **89**:3–4 (1996), 227–260.
- [38] А. Р. Итс, *Вестник ЛГУ. Сер. Матем. Механ. Астроном.*, **7**:2 (1976), 39–46.
- [39] Б. А. Дубровин, И. М. Кривичев, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–19.
- [40] J. D. Fay, *Theta-functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **352**, Springer, Berlin, 1973.
- [41] H. F. Baker, *Abel’s Theorem and the Allied Theory Including the Theory of Theta Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.
- [42] A. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Teubner, Leipzig, 1903.
- [43] А. О. Смирнов, *Матем. сб.*, **133(175)**:3(7) (1987), 382–391.
- [44] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [45] А. О. Смирнов, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 86–97.
- [46] А. О. Смирнов, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 103–114.
- [47] А. О. Смирнов, *ТМФ*, **107**:2 (1996), 188–200.
- [48] А. О. Смирнов, *Матем. сб.*, **188**:1 (1997), 109–128.
- [49] А. О. Смирнов, *ТМФ*, **78**:1 (1989), 11–21.

Поступила в редакцию 13.01.2012,
после доработки 10.03.2012