Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Булычева, Монопольные решения как трехмерные обобщения рядов Кронекера, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 403–414

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:26:29

© 2012 г.

К. М. Булычева^{*†}

МОНОПОЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КАК ТРЕХМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ РЯДОВ КРОНЕКЕРА

Исследуется монополяр Дирака на трехмерном торе как решение уравнений Богомольного с нетривиальными граничными условиями. Показано, что подходящее аналитическое продолжение полученного решения является трехмерным обобщением ряда Кронекера, удовлетворяет соответствующему функциональному уравнению и инвариантно относительно модулярных преобразований.

Ключевые слова: уравнение Богомольного, монополи, ряды Кронекера, модулярная инвариантность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Богомольного. В самой общей формулировке монополярное решение в теории Янга–Миллса можно определить как обобщение монополя Дирака [1], [2] в электродинамике на неабелеву калибровочную группу, являющееся классическим решением в четырехмерной теории, инвариантным относительно трансляций вдоль одной из координат [3]–[7]. В своей знаменитой работе [8] Богомольный предложил описание монополей в терминах решений системы уравнений первого порядка в трехмерном пространстве. В общем случае это пространство заменяется на трехмерное многообразие $\mathcal{M}$ (возможно, с краем), снабженное метрикой. На $\mathcal{M}$ задано G -расслоение, а также ассоциированное с ним векторное расслоение E_V и присоединенное расслоение $\text{End } E_V$ со связностью $A \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{Lie}(G))$. Полем Хиггса ϕ называется сечение присоединенного расслоения: $\phi \in \Omega^0(\mathcal{M}, \text{End } E_V)$. Тогда уравнения Богомольного имеют следующий вид:

$$F = \star D\phi, \quad (1)$$

где $F = dA + A \wedge A$ – кривизна связности, $\star$ – оператор Ходжа, а D – ковариантная производная, т.е. $D = d + A$ в присоединенном представлении. Эта система инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$A \rightarrow f^{-1}Af + f^{-1}df, \quad \phi \rightarrow f^{-1}\phi f. \quad (2)$$

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: bulychева@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Хорошо известно, что уравнение Богомольного может быть получено с помощью размерной редукции из уравнения самодуальности $F = \star F$. Так, в работе [3] монополь рассматривается как инстантон, инвариантный относительно $U(1)$ -преобразований. Заметим, что в случае $G = U(1)$ и $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ уравнения Богомольного воспроизводят обычный монополь Дирака. Действительно, применение производной D к обеим частям уравнения (1) приводит (в силу тождества Бьянки) к уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = c_0\delta^{(3)}(\vec{r}). \quad (3)$$

Появление дельта-функции в правой части связано лишь с тем, что мы рассматриваем решения, имеющие особенность типа $1/r$ в данной точке (мы выбираем в качестве этой точки начало отсчета $\vec{r} = 0$)¹⁾. Таким решением, убывающим на бесконечности, является $\phi = c_0/r$, а $D\phi = \text{grad } \phi$ описывает магнитное поле.

Операторы Гекке и монополи. Настоящая работа мотивирована результатами работ [9] и [10]. В работе [9] обсуждается связь между геометрической программой Ленглендса и четырехмерной теорией Янга–Миллса, компактифицированной на комплексную кривую C . Результаты, приведенные в [9], в частности, означают, что в случае $\mathcal{M} = C \times \mathbb{R}$ появление монопольного решения уравнений (1) можно интерпретировать как применение оператора Гекке на сечениях (голоморфного) расслоения $\tilde{E}_V = E_V|_{C \times \{0\}}$ над C . Пусть $z, \bar{z}$ – локальные комплексные координаты на C , а y – координата на $\mathbb{R}$. Выпишем систему (1) в компонентах:

$$\begin{aligned} \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z + [A_z, A_{\bar{z}}] &= \frac{ig}{2}(\partial_y \phi + [A_y, \phi]), \\ \partial_y A_z - \partial_z A_y + [A_y, A_z] &= i(\partial_z \phi + [A_z, \phi]), \\ \partial_y A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_y + [A_y, A_{\bar{z}}] &= -i(\partial_{\bar{z}} \phi + [A_{\bar{z}}, \phi]). \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя работе [10], выберем следующую калибровку²⁾: $A_{\bar{z}} = 0$, $A_y = i\phi$. Окончательно получаем

$$\partial_{\bar{z}} A_z = -\frac{ig}{2}\partial_y \phi, \quad \partial_y A_z = 2i\partial_z \phi - 2i[A_z, \phi]. \quad (5)$$

Оператор Гекке (или модификация расслоения) изменяет степень расслоения $\deg \tilde{E}_V$, т. е. добавляет к сечениям детерминантного расслоения нули и полюсы. Рассмотрим для простоты абелев случай на $\mathcal{M} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Тогда голоморфное калибровочное преобразование (2), где $f = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, действует на связность как $A_z \rightarrow A_z + m/z$. С другой стороны,

$$\phi = \frac{c_0}{r} = \frac{c_0}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}},$$

¹⁾Также можно сказать, что монополь Дирака – это решение уравнения Лапласа $\Delta\phi = 0$ в $\mathbb{R}^3/\{0\}$ с асимптотикой $\phi \sim 1/r$ в точке $\vec{r} = 0$, удовлетворяющее условию $\phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

²⁾Условие $A_{\bar{z}} = 0$ фиксирует не все калибровочные степени свободы, так как голоморфные калибровочные преобразования оставляют это условие неизменным. Система (4) при таком условии содержит соотношение $\partial_{\bar{z}}(A_y - i\phi) = 0$. Это значит, что с помощью голоморфных калибровочных преобразований можно добиться выполнения равенства $A_y = i\phi$.

а из соотношений (5) следует, что решение для A_z , удовлетворяющее граничному условию $A_z|_{\infty} = 0$, имеет вид

$$A_z = \begin{cases} -ic_0 \left(\frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}} - \frac{1}{z} \right), & y > 0, \\ -ic_0 \left(\frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z\bar{z}}} + \frac{1}{z} \right), & y < 0. \end{cases}$$

Связность испытывает скачок $-2ic_0/z$ при $y = 0$. Таким образом, $c_0 = im/2$, $m \in \mathbb{Z}$, что соответствует “квантованию” заряда монополя [9], [10]. Тем самым мы продемонстрировали связь между монопольным решением и оператором Гекке. В общем случае модификация расслоения параметризуется элементами решетки ковесов группы G [9]–[11]. Согласно работам [3] монополь – это инстантон в $\mathbb{C}^2$, инвариантный относительно действия группы $U(1)$. Группа $U(1)$ действует на $\mathbb{C}^2$ следующим образом: $(z_1, z_2) \rightarrow (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$. У этого действия есть неподвижная точка, $z_1 = z_2 = 0$. Если действие группы $U(1)$ поднять на G -расслоение над $\mathbb{C}^2$, то $U(1)$, в частности, будет действовать в слое над неподвижной точкой, задавая тем самым гомоморфизм $U(1) \rightarrow G$, т. е. кохарактер G . Таким образом, действие группы $U(1)$, которая осуществляет редукцию инстантона к монополю, порождает набор ковесов, определяющих модификацию [9]–[11].

Системы Хитчина и монополи. В подходе Хитчина к интегрируемым системам [12] последние естественным образом возникают на пространствах модулей голоморфных расслоений. Модификация меняет степень (а точнее, характеристический класс [11]) расслоения и связывает системы различных типов таких, например, как системы Калоджеро и волчки Эйлера–Арнольда [13]. В случае пространства модулей плоских связностей аналогичные результаты позволяют установить взаимосвязь между различными неавтономными обобщениями систем Хитчина – нелинейными уравнениями типа Пенлеве [14]. В свете описанного выше соответствия между монополями и модификациями можно ожидать, что существует неабелево решение, связывающее указанные примеры систем на границах (при $y = \pm\infty$). Известен некоторый класс неабелевых решений. Например, конструкция Нама [15] позволяет решать уравнения Богомольного для группы $SU(N)$. Еще один возможный подход – использование методов теории солитонов [4]. Уравнение Богомольного можно представить как условие нулевой кривизны для некоторых дифференциальных операторов по аналогии с уравнением Янга–Миллса–Хиггса [16]. Однако явное нахождение неабелевых решений с нужными асимптотиками оказывается трудной задачей, и ее решение нам неизвестно.

Цель работы. В настоящей работе предложено обобщение результата, полученного в статье [10], где рассмотрено скалярное уравнение Богомольного на $\Sigma_{\tau} \times \mathbb{R}$ (здесь Σ_{τ} – эллиптическая кривая, реализованная как фактор комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по решетке периодов Γ_{τ} , порождающей фундаментальный параллелограмм).

В настоящей статье мы исследуем скалярное уравнение Богомольного на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{T}^3$. Нашей целью является построение функций Грина на указанных многообразиях и определение их модулярных свойств. При исследовании решения на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$ удобно не фиксировать голоморфную калибровку. Найдем сначала

периодическую функцию Грина уравнения Лапласа на $\mathbb{T}^3$. Для этого реализуем $\mathbb{T}^3$ в виде $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$, где Γ_3 – трехмерная решетка с образующими векторами $\vec{\gamma}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда решение данной задачи эквивалентно решению уравнения (3) на $\mathbb{R}^3$ с граничным условием $\phi(\vec{x} + \vec{\gamma}) = \phi(\vec{x})$ при $\vec{\gamma} \in \Gamma_3$. В этом случае дельта-функция является суммой характеров группы решетки Γ_3 (см. формулу (П.1) приложения):

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \chi_3(\vec{x}, \vec{n}).$$

Уравнение (3) имеет решение, которое получается усреднением,

$$\phi(\vec{x}) = c_0 \sum_{\vec{\gamma} \in \Gamma_3} \frac{1}{|\vec{x} + \vec{\gamma}|},$$

однако этот ряд расходится. Чтобы его регуляризовать, введем параметр аналитического продолжения. Рассмотрим обобщенное уравнение Лапласа с псевдодифференциальным оператором Δ^{2s} и соответствующую функцию Грина:

$$\Delta^{2s} \tilde{\phi}_s(\vec{x}) = c_0 \delta^{(3)}(\vec{x}), \quad \tilde{\phi}_s(\vec{x}) = c_0 \sum_{\vec{\gamma} \in \Gamma} \frac{1}{|\vec{x} + \vec{\gamma}|^s}. \quad (6)$$

Введем также в оператор Лапласа метрику $M^T M$ (в случае уравнения (3) мы имеем $M_{ij} = \delta_{ij}$): $\Delta = \vec{\partial}^T (M^{-1})^T M^{-1} \vec{\partial}$, где $\vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T$, и наложим квазипериодические граничные условия

$$R_3(s, M, \vec{x} + \vec{\gamma}_i, \vec{\xi}) = e^{-2\pi i (w \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\xi})} R_3(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}), \quad (7)$$

где $\vec{\alpha}_i$ – образующие векторы дуальной решетки, а матрица $w \in SL(3, \mathbb{Z})$ – параметр квазипериодических граничных условий. Тогда решение уравнения (6) с граничными условиями (7) имеет вид

$$R_3(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{\chi_3(\vec{n}, \vec{\xi})}{|\vec{x} + \vec{\gamma}|^s} = c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{\chi_3(\vec{n}, \vec{\xi})}{\{(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_3) M M^T (\vec{x} + L_3^T \vec{n})\}^s}, \quad (8)$$

где $\vec{n} = w \vec{n}$, а L_3 – матрица решетки (ее явный вид приведен в формуле (П.3) приложения). Представим теперь (8) в интегральной форме, используя определение Γ -функции:

$$I_3(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = \Gamma(s) R_3(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t|\vec{x} + \vec{\gamma}|} \chi_3(\vec{n}, \vec{\xi}). \quad (9)$$

Подобную функцию можно ввести и для двумерного тора:

$$I_2(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2) M^T M (\vec{x} + L_2^T \vec{n})} \chi_2(\vec{n}, \vec{\xi}). \quad (10)$$

Она не является решением двумерного уравнения Лапласа, но понадобится нам при рассмотрении решения в $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Функция Грина обобщенного трехмерного уравнения Лапласа (6) с квазипериодическими граничными условиями (7) имеет вид (8), удовлетворяет функциональному уравнению*

$$R_3(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{\Gamma(3/2 - s)\pi^{2s-3/2}}{\Gamma(s) \det L_3 M} e^{-2\pi i \vec{x}^T (L_3^T L_3)^{-1} \vec{\xi}} R_3(3/2 - s, (L_3^T L_3)^{-1} M, \vec{\xi}, \vec{x}) \quad (11)$$

и является инвариантной относительно модулярных преобразований, задаваемых элементами из $SL(3, \mathbb{Z}) \setminus SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$.

Доказательство этой теоремы вытекает из лемм 1 и 2, приведенных ниже, а также из результатов раздела 3 о модулярных преобразованиях. Мы найдем функции Грина на $\mathbb{T}^3$ и сделаем предельный переход к случаю $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, рассмотренному в работе [10]. Заметим, что по построению наша функция Грина является обобщением рядов Кронекера [17].

2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Из соотношения (8) легко видеть, что R_3 расходится при $s = 1/2$, но сходится при больших s . Чтобы аналитически продолжить I_3 , воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_{\vec{\gamma} \in \Gamma} f(\vec{\gamma} + \vec{x}) = \sum_{\vec{g} \in \Gamma^\vee} \hat{f}(\vec{g}) e^{2\pi i (\vec{x}, \vec{g})}.$$

Здесь $\Gamma^\vee$ – дуальная решетка, $\hat{f}$ – преобразование Фурье для f . Как это следует из интегральной формы (9), все интегралы, которые необходимо взять при преобразовании Фурье, являются гауссовыми, и структура выражения при интегрировании почти не меняется. С помощью этого приема получим аналитическое продолжение от $s = 1/2$ к $s = 1$.

ЛЕММА 1 [17]. *Для функции (10) выполняется функциональное уравнение*

$$I_2(s, M, \vec{\xi}, \vec{x}) = \frac{\pi^{2s-1}}{\det M \det^{2s} L_2} I_2(1 - s, M^{-1}, \vec{x}, \vec{\xi}) e^{2\pi i \vec{x}^T \sigma \vec{\xi} / \det L_2}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим преобразование Фурье функции (10). После взятия гауссовых интегралов и перемасштабирования t получаем

$$\begin{aligned} \hat{I}_2(s, M, \vec{\xi}, \vec{x}) &= c_0 \int d^2 n \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^2} \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2) M^T M (\vec{x} + L_2^T \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-2\pi i \vec{\nu}^T \vec{n}} = \\ &= \frac{c_0}{\det L_2 M} \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^2} \int \frac{dt}{t} t^s \frac{\pi}{t} e^{2\pi i \vec{\nu}^T (L_2^T)^{-1} \vec{x}} e^{-2\pi i \vec{x}^T L_2^{-1} (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{t} (\vec{\xi}^T L_2^\vee (L_2^T)^{-1} - \vec{\nu}^T (L^T)^{-1}) M^T M (L_2^{-1} (L_2^\vee)^T \vec{\xi} - L_2^{-1} \vec{\nu}) \right\} = \\ &= c_0 \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^2} \int \frac{dt}{t} t^s \frac{\pi}{t} \frac{1}{\det M L_2} e^{2\pi i (-\vec{\nu}^T \sigma^T) (L_2^\vee)^T \vec{x}} e^{-2\pi i \vec{x}^T L^{-1} (L^\vee)^T \vec{\xi}} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{t} \left(\frac{1}{ab} \vec{\xi}^T \sigma^{-1} - \frac{1}{ab} (\vec{\nu}^T \sigma) L_2 \sigma^{-1} \right) (M^{-1})^T M \left(\frac{\sigma}{ab} \vec{\xi} - \frac{\sigma}{ab} L_2^T \sigma^T \vec{\nu} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{2s-1} e^{2\pi i \vec{x}^T \sigma \vec{\xi} / \det L_2}}{\det L_2 M} I_2(1-s, M^{-1} \det L_2, \vec{x}, \vec{\xi}) = \\
&= \frac{\pi^{2s-1} e^{2\pi i \vec{x}^T \sigma \vec{\xi} / \det L_2}}{\det M \det^{2s} L_2} I_2(1-s, M^{-1}, \vec{x}, \vec{\xi}), \quad (13)
\end{aligned}$$

где $L_2^\vee$ и $L_3^\vee$ – матрицы дуальных решеток (см. формулы (П.4) приложения). По формуле Пуассона $\hat{I}_2 = I_2$. Таким образом, верно (12). Лемма доказана.

Чтобы найти функцию Грина на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, добавим непериодическую координату y ,

$$I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, y) = c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \int dp \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{x} + L_2^T \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T L_2^\vee \vec{\xi}} e^{-tp^2} e^{2\pi i p y}, \quad (14)$$

и воспользуемся формулой (13), чтобы получить интегральное уравнение для I_{cont} :

$$I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, y) = \frac{\pi^{2s-3/2}}{\det^{2s-1} L_2} e^{2\pi i \vec{x}^T \sigma \vec{\xi}} \int dp I_{\text{cont}}\left(\frac{3}{2} - s, \vec{x}, \vec{\xi}, \frac{p}{\det L_2}\right). \quad (15)$$

Этот случай подробно рассмотрен в работе [10].

ЛЕММА 2. Для функции Грина уравнения Лапласа на $\mathbb{T}^3$ выполняется функциональное уравнение (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
\hat{I}_3(s, M, \vec{\xi}, \vec{x}) &= c_0 \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^3} \int d^3 n \int \frac{dt}{t} t^s \times \\
&\times e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_3) M^T M (\vec{x} + L_3^T \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_3^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-2\pi i \vec{\nu}^T \vec{n}} = \\
&= c_0 \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^s \left(\frac{\pi}{t}\right)^{3/2} \frac{1}{\det L_3 M} e^{2\pi i \vec{\nu}^T (L_3^T)^{-1} \vec{x}} e^{-2\pi i \vec{x}^T L_3^{-1} (L_3^\vee)^T \vec{\xi}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{\pi^2}{t} (\vec{\xi}^T L_3^\vee (L_3^T)^{-1} - \vec{\nu}^T (L_3^T)^{-1}) (M^{-1})^T M^{-1} (L_3^{-1} (L_3^\vee)^T \vec{\xi} - L_3^{-1} \vec{\nu})\right\} = \\
&= \frac{c_0}{\det L_3 M} e^{-2\pi i \vec{x}^T L_3^{-1} (L_3^\vee)^T \vec{\xi}} \sum_{\vec{\nu} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^s \left(\frac{\pi}{t}\right)^{3/2} e^{2\pi i \vec{\nu}^T (L_3^\vee)^T \vec{x}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{\pi^2}{t} (\vec{\xi}^T - \vec{\nu}^T L_3) (L_3^T L_3)^{-1} M^T M (L_3^{-1} (L_3^T)^{-1}) (\vec{\xi} - L_3^T \vec{\nu})\right\} = \\
&= \frac{\pi^{2s-3/2} e^{-2\pi i \vec{x}^T (L_3^T L_3)^{-1} \vec{\xi}}}{\det L_3 M} I_3(3/2 - s, (L_3^T L_3)^{-1} M, \vec{x}, \vec{\xi}). \quad (16)
\end{aligned}$$

Снова применяя формулу Пуассона, получаем (11). Лемма доказана.

Проследим, как при предельном переходе $s \rightarrow \infty$ функциональное уравнение (11) переходит в интегральное (15). Для удобства возьмем $c_x = c_y = 0$, $M = \delta_{ij}$ и совершим преобразование $L^\vee \rightarrow w_2 L^\vee$ (где w_2 задана в формуле (П.5) приложения), воспользовавшись свободой определения вектора $\vec{n}$. Тогда

$$L_3^{-1} L_3^\vee = \begin{pmatrix} 0 & -1/ab & 0 \\ 1/ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix},$$

и выражение (16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, z) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ c_0 \frac{\pi^{2s-3/2}}{\det L_2 c} e^{2\pi i \vec{\xi}^T \sigma \vec{x} / \det L_2} e^{-2\pi i z \zeta / c^2} \times \right. \\
 &\quad \times \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \sum_k e^{2\pi i z k / c} \int \frac{dt}{t} t^{3/2-s} e^{-t(\vec{\xi}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{\xi} + L_2 \vec{n}) / \det^2 L_2} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-t(\zeta + kc)^2 / c^4} \Big\} = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ c_0 \frac{\pi^{2s-3/2} e^{2\pi i \vec{\xi}^T \sigma \vec{x} / \det L_2}}{\det^{2s-4} L_2} \sum_k \frac{\Delta k}{c} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^{3/2-s} e^{-t(\vec{\xi}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{\xi} + L_2 \vec{n})} \times \right. \\
 &\quad \times e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} \exp \left[-\frac{t}{\det^2 L_2} \left(\frac{\zeta}{c^2} + \frac{k}{c} \right)^2 \right] e^{2\pi i z k / c} e^{-2\pi i z \zeta / c^2} \Big\} = \\
 &= c_0 \frac{\pi^{2s-3/2}}{\det^{2s-4} L_2} e^{2\pi i \vec{\xi}^T \sigma \vec{x} / \det L_2} \times \\
 &\quad \times \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int dp \int \frac{dt}{t} t^{3/2-s} e^{-t(\vec{\xi}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{\xi} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-tp^2 / \det^2 L_2} e^{2\pi i z p} = \\
 &= c_0 \frac{\pi^{2s-1} e^{2\pi i \vec{\xi}^T \sigma \vec{x} / \det L_2}}{\det^{2s-5} L_2} \times \\
 &\quad \times \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^{3/2-s} e^{-t(\vec{\xi}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{\xi} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-\pi^2 z^2 \det^2 L_2 / t}.
 \end{aligned}$$

Здесь трехмерный параметр $\vec{\xi} = \langle \xi, \zeta \rangle$, где ξ – двумерный вектор и ζ – координата вдоль непериодической оси. Выполним также предельный переход $I_3 \rightarrow I_{\text{cont}}$ (при этом заменяя z^2/c на y):

$$\begin{aligned}
 I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, y) &= \\
 &= c_0 \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \sum_k \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{x} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-t(z+kc)^2} e^{2\pi i z k / c} = \\
 &= c_0 \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \sum_{kc} \frac{\Delta kc}{c} \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{x} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-t(z+kc)^2} e^{2\pi i z kc / c^2} = \\
 &= c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int dp \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{x} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-tp^2} e^{2\pi i p y} = \\
 &= c_0 \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \int \frac{dt}{t} t^s e^{-t(\vec{x}^T + \vec{n}^T L_2)(\vec{x} + L_2 \vec{n})} e^{2\pi i \vec{n}^T (L_2^\vee)^T \vec{\xi}} e^{-\pi^2 y^2 / t}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы не можем буквально использовать формулу Пуассона $I = \hat{I}$, поскольку вдоль оси z нет решетки. Это означает, что мы выполнили лишнее преобразование Фурье по p , вычисляя (16) в пределе $c \rightarrow \infty$. Принимая это во внимание и собирая вместе два последних выражения для $\hat{I}_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, z)$ и $I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, y)$, получаем интегральное уравнение

$$\int dp I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, p) e^{-2\pi i p y} = \frac{e^{2\pi i \vec{\xi}^T \sigma \vec{x} / \det L_2}}{\sqrt{\pi} \det L_2} \frac{\pi^{2s-1}}{\det^{2s-5} L_2} I_{\text{cont}}(3/2 - s, \vec{x}, \vec{\xi}, y \det L_2).$$

Множитель $(\sqrt{\pi} \det L_2)^{-1}$ возникает из обратного преобразования Фурье. Совершим замену $s \rightarrow 3/2 - s$, тогда

$$I_{\text{cont}}(s, \vec{\xi}, \vec{x}, y) = \frac{\pi^{2s-3/2}}{\det^{2s-1} L_2} e^{2\pi i \vec{x}^T \sigma \vec{\xi}} \int dp I_{\text{cont}}\left(\frac{3}{2} - s, \vec{x}, \vec{\xi}, \frac{p}{\det L_2}\right).$$

Это выражение совпадает с (15). Таким образом, мы получили хорошо определенное выражение для функции Грина уравнения Лапласа на трехмерном торе:

$$R_3(1, (L_3^T L_3)^{-1} \vec{\xi}, \vec{x}) = e^{-2\pi i \vec{x}^T L_3^{-1} (L_3^\vee)^T \vec{\xi}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i \vec{n}^T (L_3^\vee)^T \vec{x}}}{(\vec{\xi}^T + \vec{n}^T L_3)((L_3^\vee)^T L_3^\vee)^2 (\vec{\xi} + L_3^T \vec{n})}.$$

3. МОДУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА

3.1. Комплексный случай. Рассмотрим изменение функции Грина на трехмерном торе под действием элемента из $SL(3, \mathbb{Z}) \setminus SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$. Действие группы $SL(3, \mathbb{Z})$ выражается в модулярных преобразованиях решетки Γ_3 . Группа $SO(3, \mathbb{R})$ позволяет выбирать ортонормированный базис векторов решетки, т. е. в нашем случае приводить матрицу решетки к нижнетреугольному виду. Для примера рассмотрим действие на функцию Грина, заданную на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, элемента из двойного косета $SL(2, \mathbb{Z}) \setminus SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$. Запишем нерегуляризованное решение в комплексной форме. Пусть $a = 1$, $\tau = b_x + ib$, а $\gamma = n + m\tau$ – векторы решетки. Площадь элементарной ячейки $S = \text{Im } \tau$. Тогда формула для характера может быть записана в виде $\chi(\gamma, \xi) = e^{\pi(\gamma \bar{\xi} - \bar{\gamma} \xi)/S}$, а аналогом формулы (8) будет следующая:

$$R(s, \xi, w, y) = c_0 \sum_{\gamma} \frac{\chi(\gamma, \xi)}{((yS)^2 + |w + \gamma|^2)^s} = c_0 \sum_{m, n} \frac{\chi(n + m\tau, \xi)}{((y \cdot \text{Im } \tau)^2 + (w + n_m \tau)^2)^s}. \quad (17)$$

Чтобы изучить модулярные свойства решения (17), достаточно проследить, как оно изменится при преобразованиях $\tau \rightarrow \tau + 1$ и $\tau \rightarrow -1/\tau$. В первом случае в решении (17) сдвигается индекс суммирования по n : $n \rightarrow n + m$. В результате решение остается неизменным. Второе преобразование действует несколько сложнее:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow -\frac{1}{\tau} = -\frac{\bar{\tau}}{\tau \bar{\tau}}, & S &\rightarrow \frac{S}{\tau \bar{\tau}}, \\ e^{\pi(\gamma \bar{\xi} - \bar{\gamma} \xi)/S} &\rightarrow e^{\pi((n\tau - m)\bar{\tau} \bar{\xi} - (n\bar{\tau} - m)\tau \xi)/S}, \\ (pS)^2 + |w + \gamma|^2 &\rightarrow \frac{1}{\tau \bar{\tau}} \left(\left(\frac{p}{\sqrt{\tau \bar{\tau}}} S \right)^2 + |w\tau + n\tau - m|^2 \right). \end{aligned}$$

Произведя суммирование по $n\tau - m$ вместо $n + m\tau$, находим

$$R\left(\frac{1}{2}, \xi, w, p\right) \rightarrow \sqrt{\tau \bar{\tau}} R\left(\frac{1}{2}, \tau \xi, \tau w, \frac{p}{\sqrt{\tau \bar{\tau}}}\right).$$

Чтобы понять, как преобразуются связности, подставим $\sqrt{\tau \bar{\tau}} \phi(\tau z, \tau \bar{z}, y/\sqrt{\tau \bar{\tau}})$ вместо $\phi(z, \bar{z}, y)$ в уравнение Богомольного (4). Чтобы система осталась инвариантной, нужно произвести следующие замены:

$$A_z(z, \bar{z}, y) \rightarrow \tau A_z(\tau z, \bar{\tau} \bar{z}, y/\sqrt{\tau \bar{\tau}}),$$

$$A_z(z, \bar{z}, y) \rightarrow \bar{\tau} A_z(\tau z, \bar{\tau} \bar{z}, y/\sqrt{\tau \bar{\tau}}),$$

$$A_y(z, \bar{z}, y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\tau \bar{\tau}}} A_y(\tau z, \bar{\tau} \bar{z}, y/\sqrt{\tau \bar{\tau}}).$$

Отсюда видно, что связности $A_z dz$, $A_{\bar{z}} d\bar{z}$, $A_y dy$ инвариантны относительно модулярных преобразований. Можно было ожидать, что модулярно-преобразованное решение отличается от исходного калибровкой, но это не так: инвариантность решения означает лишь, что не существует голоморфной функции, удовлетворяющей условию квазипериодичности (7).

3.2. Трехмерный случай. Чтобы понять, как преобразуется решение под действием модулярной группы, рассмотрим преобразование матрицы решетки и характеров. Левое действие генераторов $SL(3, \mathbb{Z})$ на матрицу решетки L переставляет строки L и меняет их знаки; таким образом, L перестает быть нижнетреугольной матрицей. Приведем L снова к нижнетреугольному виду, домножив ее справа на матрицу из группы $SO(3, \mathbb{R})$, и далее с помощью домножения на константу восстановим матричный элемент a в верхнем левом углу. Эта процедура показана на рис. 1 для двумерного случая.

Рис. 1. Модулярное преобразование пары векторов в комплексной и матричной формах.

Таким образом, преобразование матрицы L записывается как

$$L \rightarrow \frac{1}{\alpha_i} w_i L O_i, \quad O_i \in SO(3, \mathbb{R}), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Воспользовавшись этим соотношением и представлением (П.2) (см. приложение), выведем закон преобразования для дуальной матрицы: $L^\vee \rightarrow \alpha_i w_i L^\vee O_i$. Модуляр-

ное преобразование решения (8) в общем виде может быть выражено через O_i, α_i :

$$\begin{aligned} c_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i \vec{n}^T L^\vee \vec{\xi}}}{((\vec{x}^T + \vec{n}^T L) M M^T (\vec{x} + L^T \vec{n}))^s} &\rightarrow \\ &\rightarrow c_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i \vec{n}^T w_i L^\vee \alpha_i O_i \vec{\xi}}}{((\vec{x}^T + \vec{n}^T w_i L O_i / \alpha_i) M M^T (\vec{x} + O_i^T L^T w_i^T \vec{n} / \alpha_i))^s} = \\ &= c_0 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^3} \frac{\alpha_i^{2s} e^{2\pi i \vec{\nu}^T L^\vee (\alpha_i O_i \vec{\xi})}}{[(\alpha_i \vec{x}^T O_i^{-1}) + \vec{\nu}^T L] O_i M M^T O_i^T ((\alpha_i O_i \vec{x}) + L^T \vec{\nu})]^s}, \quad \vec{\nu} = w_i^T \vec{n}, \end{aligned}$$

Итак,

$$R(s, M, \vec{x}, \vec{\xi}) = \alpha_i^{2s} R(s, O_i M, \alpha_i O_i \vec{x}, \alpha_i O_i \vec{\xi}).$$

Вычислим α_i и O_i для каждого w_i . Преобразования w_1 и w_3 сдвигают суммирование (аналогично преобразованию $\tau \rightarrow \tau + 1$ в двумерном случае): первое соответствует сдвигу $n \rightarrow n + m$, второе – смене знаков у m и k . Значит, w_1 и w_3 никак не изменяют решение, а w_2 действует сложнее:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_x & b & 0 \\ c_x & c_y & c \end{pmatrix} &\rightarrow \frac{1}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_x & b & 0 \\ c_x & c_y & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b_x}{\sqrt{b^2 + b_x^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2 + b_x^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{b^2 + b_x^2}} & \frac{b_x}{\sqrt{b^2 + b_x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + b_x^2}} \begin{pmatrix} b^2 + b_x^2 & 0 & 0 \\ -ab_x & ab & 0 \\ bc_y + b_x c_x & b_x c_y - bc_x & c\sqrt{b^2 + b_x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{b^2 + b_x^2}}{a} = \frac{|\gamma_2|}{|\gamma_1|}, \quad O_2 = T_z^\alpha, \quad \alpha = \angle(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2).$$

Здесь мы обозначаем через T_z^α матрицу поворота вокруг оси z на угол α . В случае w_4 выражение для матрицы поворота довольно громоздко. Запишем O_4 как композицию трех матриц: $O_4 = T_z^\alpha T_y^\beta T_x^\gamma$, где

$$\alpha = \angle(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3), \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{\gamma}_3, \vec{z}), \quad \text{tg } \gamma = \sin \beta \text{ctg } \angle(\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3), \quad \alpha_4 = \frac{|\gamma_3|}{|\gamma_1|}. \quad (18)$$

В результате модулярных преобразований решение умножается на константу, которая при правильном выборе базиса в $SL(3, \mathbb{Z})$ является отношением длин векторов решетки. Подставив преобразованное решение в (1), получим инвариантность связностей относительно модулярных преобразований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Характером тора называется мультипликативная периодическая функция на плоскости, периодами которой являются образующие векторы решетки $\vec{\gamma}_i \in \Gamma_d$:

$$\chi_d(\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}) = \chi_d(\vec{x}, \vec{n}) \chi_d(\vec{y}, \vec{n}), \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^d, \quad \chi_d(\vec{\gamma}_i, \vec{n}) = 1. \quad (\text{П.1})$$

В общем случае данную функцию можно выразить через векторы дуальной решетки: $\chi_d(\vec{x}, \vec{n}) = e^{2\pi i(\vec{x}\vec{\alpha})}$, $(\vec{\alpha}_i \vec{\gamma}_j) = \delta_{ij}$. Здесь α_i — образующие дуальной решетки. Введем матрицы решетки и дуальной решетки: $\vec{\gamma} = L\vec{n}$, $\vec{\gamma} \in \Gamma_d$, где $\vec{\alpha} = L^\vee \vec{n}$, $\vec{\gamma} \in \Gamma_d^\vee$; здесь $\vec{n} \in \mathbb{N}^d$ и d — размерность многообразия. Матрицы дуальных решеток можно найти по формулам

$$L_2^\vee = L_2^{-1}\sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3^\vee = L_3^{-1}. \quad (\text{П.2})$$

При вычислениях нам понадобится явный вид этих матриц. Выберем матрицы решеток в нижнетреугольном виде:

$$L_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_x & b \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_x & b & 0 \\ c_x & c_y & c \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

Тогда матрицы дуальных решеток имеют вид

$$L_2^\vee = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -a & -b_x \end{pmatrix}, \quad L_3^\vee = \frac{1}{abc} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -b_x c & ac & 0 \\ b_x c_y - bc_x & -ac_y & ab \end{pmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

В качестве генераторов $SL(3, \mathbb{Z})$ можно выбрать [18]

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

однако удобнее использовать другой выбор генераторов:

$$w_1 = U, \quad w_2 = PO, \quad w_3 = O, \quad w_4 = POQ. \quad (\text{П.5})$$

Благодарности. Автор благодарит М. А. Ольшанецкого, А. М. Левина, А. Зотова за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Работа поддержана Федеральным агентством по науке и инновациям РФ (грант № 14.740.11.0347).

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817–830.
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **133**:821 (1931), 60–71.
- [3] P. Kronheimer, *ALE gravitational instantons*, D. Phil. thesis, Oxford Univ., Oxford, 1986 (unpublished); S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-manifolds*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1990.
- [4] M. Atiyah, N. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988.
- [5] М. И. Монастырский, А. Г. Сергеев (ред.), *Монополи: топологические и вариационные методы*, Сб. статей, Мир, М., 1989.
- [6] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2002.
- [7] Y. M. Shnir, *Magnetic Monopoles*, Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, 2005.
- [8] Е. Б. Богомольный, *ЯФ*, **24**:4 (1976), 861–870.

- [9] A. Kapustin, E. Witten, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:1 (2007), 1–236, arXiv: hep-th/0604151.
- [10] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *SIGMA*, **5** (2009), 065, 22 pp., arXiv: 0811.3056.
- [11] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *Characteristic classes and integrable systems. General construction*, arXiv: [1006.0702](#); *Characteristic classes and integrable systems for simple Lie groups*, arXiv: [1007.4127](#).
- [12] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [13] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *Comm. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133, arXiv: [nlin/0110045](#).
- [14] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *Comm. Math. Phys.*, **268**:1 (2006), 67–103, arXiv: [math/0508058](#).
- [15] W. Nahm, *Phys. Lett. B*, **90**:4 (1980), 413–414; E. Corrigan, P. Goddard, *Ann. Phys.*, **154**:1 (1984), 253–279.
- [16] R. Ward, “Integrable systems and twistors”, Integrable Systems (Oxford, September 14–19, 1997), Oxford Graduate Texts in Mathematics, **4**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999, 121–134.
- [17] A. Weyl, *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **88**, Springer, Berlin, New York, 1976.
- [18] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **14**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

Поступила в редакцию 24.11.2011,
после доработки 23.01.2012