Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, Интегрируемые решетки, *ТМФ*, 1999, том 118, номер 2, 217–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:26:47

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ РЕШЕТКИ

Предлагается метод построения интегрируемых решеток исходя из наличия у некоторых динамических систем двух различных параметризаций канонических переменных и как следствие двух независимых бэклундовских потоков. Построены интегрируемые решетки, соответствующие обобщениям нелинейного уравнения Шредингера. Подробно обсуждаются модели Тоды, Вольтерра и Гейзенберга. Для этих систем, а также для модели Ландау–Лифшица получены полностью дискретные лагранжианы. Обсуждается связь этих систем с уравнениями Хироты.

1. ВВЕДЕНИЕ

В развитии теории интегрируемых решеток четко прослеживаются две тенденции. Первая связана с полностью дискретными уравнениями Хироты [1]. Хорошо известные интегрируемые модели, такие как уравнение Кортевега–де Вриза, уравнение синус-Гордона, цепочка Тоды и т.д., получаются из уравнений Хироты предельным переходом от одной или более дискретной переменной к непрерывным и наложением связей.

Второй подход, основанный на наличии нескольких неэквивалентных преобразований Бэклунда, приводит к тому, что динамическую систему можно алгебраически привести к чисто дискретному виду. Сопоставляя преобразованию Бэклунда соответствующий сдвиг на решетке, можно получить интегрируемую модель на решетке, динамика которой определяется первоначальной гамильтоновой системой.

Целью нашей работы является построение на основе развитой в [2, 3] теории преобразований Бэклунда интегрируемых решеток, соответствующих гамильтонианам

$$H = p_x q_x + V(p, q_x, q),$$

где V — квадратичный полином по p и q_x . Точнее говоря, в силу результатов работы [3] нас интересуют только два случая:

$$H = p_x q_x + q_x^2 (\varepsilon p^2 + \alpha p + \beta) + p^2 (\gamma q_x + \delta), \quad (1)$$

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvg@itp.ac.ru; shabat@itp.ac.ru

где $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные параметры, и

$$H = p_x q_x - q_x^2 p^2 - p^2 r(q) - \frac{1}{2} p r'(q) - \frac{1}{12} r''(q), \quad (2)$$

где $r(q)$ — произвольный полином четвертой степени от q . К виду (1) приводится любой гамильтониан H , не зависящий от q , т.к. добавление члена $p q_x$ несущественно. Различному выбору параметров в гамильтониане (1) отвечают (рассматриваемые в разделе 3) многочисленные интегрируемые обобщения (4) нелинейного уравнения Шредингера. Соответствующие интегрируемые решетки связаны преобразованиями типа Милура [4], которые также рассматриваются в разделе 3. Дополнительный случай (2) соответствует, как будет показано в разделе 4, известной модели Ландау—Лифшица.

Используемая в данной работе схема построения интегрируемых решеток основана на том, что гамильтонианы (1), (2) допускают несколько параметризаций импульса:

$$q = v, \quad p = a(u, v) u_x + b(u, v),$$

приводящих динамическую систему

$$q_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H}{\delta q} \quad (3)$$

к “диагональной” (ср. [5]) форме

$$u_t - u_{xx} = F(u, v, u_x, v_x), \quad v_t + v_{xx} = G(u, v, u_x, v_x). \quad (4)$$

Мы покажем, следуя работе [3], что каждой такой параметризации импульса отвечает преобразование Бэклунда

$$(p, q) \mapsto (\hat{p}, \hat{q}), \quad H = p_x q_x + V(p, q_x, q) \mapsto \hat{H} = -\hat{p}_x \hat{q}_x + \hat{V}(\hat{p}, \hat{q}_x, \hat{q}), \quad (5)$$

допускаемое гамильтонианами (1), (2). Будучи сопоставлены различным направлениям плоской решетки, эти преобразования определяют согласованную динамику всей решетки. Дискретные уравнения на решетке возникают при этом как условия совместности преобразований Бэклунда.

Близкий метод построения решеток, основанный на инвариантности относительно преобразований Лежандра связанных с (4) обобщенных цепочек Тоды, был предложен недавно в работе [2]. Отметим также работы [6, 7], в которых были получены дискретные лагранжианы для некоторых из рассматриваемых ниже решеток.

2. ГАМИЛЬТОНОВ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕТОК

Рассмотрим преобразования Бэклунда для интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера, в которых гамильтониан (1) зависит явно только от q_x , но не от q . Модель Ландау–Лифшица, не относящаяся к этому классу, будет рассмотрена позднее.

При определении первого из преобразований Бэклунда можно ограничиться точечными заменами

$$q = v, \quad p = h(u - v); \quad \hat{q} = \hat{u}, \quad \hat{p} = \hat{h}(\hat{u} - \hat{v}), \quad (6)$$

приводящими соответствующие гамильтоновы уравнения (3) к виду (4). Нетрудно проверить, что обе функции $h, \hat{h}$ определяются одним и тем же уравнением

$$h' = \varepsilon h^2 + \alpha h + \beta, \quad (7)$$

если гамильтониан $\hat{H}$ выбирается в виде

$$\hat{H} = -\hat{p}_x \hat{q}_x + \hat{q}_x^2 (\varepsilon \hat{p}^2 + \alpha \hat{p} + \beta) + \hat{p}^2 (\gamma \hat{q}_x + \delta).$$

Для простоты мы полагаем в дальнейшем $\hat{h} = h$. Отметим еще, что замены (6) переводят (3) в уравнения (4) специального вида, в которых $F = F(u, v, u_x)$, $G = G(u, v, v_x)$.

Очевидно, что в силу гамильтоновых уравнений (3)

$$q_t + q_{xx} = 2p\rho(q_x) + \alpha q_x^2, \quad \hat{q}_t - \hat{q}_{xx} = 2\hat{p}\rho(\hat{q}_x) + \alpha \hat{q}_x^2, \quad (8)$$

где $\rho(z) = \varepsilon z^2 + \gamma z + \delta$. Уточняя изложенную во введении общую схему, определим преобразование Бэклунда, соответствующее параметризации (6), соотношениями

$$\hat{q} = q, \quad q_{xx} = \rho(q_x)(p - \hat{p}). \quad (9)$$

Второе из уравнений (9), где $p = h(u - v)$, $\hat{p} = h(\hat{u} - \hat{v})$, $q = v = \hat{u}$, гарантирует совпадение динамики q и $\hat{q}$ в (8) т.е. равенство

$$q_t = \hat{q}_t = \rho(q_x)(p + \hat{p}) + \alpha q_x^2.$$

Аналогично перепараметризация импульсов $p, \hat{p}$, о которой говорилось во введении,

$$\begin{aligned} p &= f(u - v)u_x + g(u - v), \quad q = v; \\ \hat{p} &= \hat{f}(\hat{u} - \hat{v})\hat{v}_x + \hat{g}(\hat{u} - \hat{v}), \quad \hat{q} = \hat{u}, \end{aligned} \quad (10)$$

приводит ко второму преобразованию Бэклунда (5), определяемому, как и выше, соотношениями (9), (8). Функции (f, g) , $(\hat{f}, \hat{g})$ находятся здесь из одной и той же системы уравнений

$$f' = -\gamma f^2 + 2\varepsilon fg + \alpha f, \quad g' = \varepsilon g^2 + \alpha g + \beta - \delta f^2. \quad (11)$$

Уравнения (11) обеспечивают связанную с (10) диагонализацию (4) гамильтоновых систем (3) для H и $\hat{H}$, соответственно. Для простоты в этом разделе мы будем (ср. с разделом 3) выбирать $\hat{f} = f$, $\hat{g} = g$.

Дискретные уравнения на решетке возникают как условия совместности определенных выше двух преобразований Бэклунда. А именно, условия согласования динамических уравнений (8) для указанных двух параметризаций импульса приводят к уравнениям

$$p(u, v) = P(U, V), \quad \hat{p}(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{P}(\hat{U}, \hat{V}), \quad v = \hat{u} = V = \hat{U}, \quad (12)$$

где прописные буквы относятся ко второму преобразованию Бэклунда $(P, Q) \mapsto (\hat{P}, \hat{Q})$. Уравнения (12) получаются из (8) так же просто, как и (9).

В силу (10) уравнения (12) записываются в виде

$$f(U - V)U_x + g(U - V) = h(u - v), \quad f(\hat{U} - \hat{V})\hat{V}_x + g(\hat{U} - \hat{V}) = h(\hat{u} - \hat{v}).$$

Обозначив

$$q_n^m = v = \hat{u} = V = \hat{U}, \quad q_n^{m+1} = u, \quad q_{n+1}^m = U, \quad q_n^{m-1} = \hat{v}, \quad q_{n-1}^m = \hat{V}, \quad (13)$$

мы получаем

$$q_{n+1,x}^m = \frac{h_n^m - g_n^m}{f_n^m}, \quad q_{n-1,x}^m = \frac{h_n^{m-1} - g_{n-1}^m}{f_{n-1}^m}, \quad (14)$$

где

$$h_n^m = h(q_n^{m+1} - q_n^m), \quad f_n^m = f(q_{n+1}^m - q_n^m), \quad g_n^m = g(q_{n+1}^m - q_n^m).$$

Наконец, рассматривая q_n^m как переменные, заданные в узлах (m, n) дискретной решетки, и приравнявая производные в (14), мы приходим к полностью дискретным уравнениям

$$\frac{h(q_{n-1}^{m+1} - q_{n-1}^m) - g(q_n^m - q_{n-1}^m)}{f(q_n^m - q_{n-1}^m)} = \frac{h(q_{n+1}^m - q_{n+1}^{m-1}) - g(q_{n+1}^m - q_n^m)}{f(q_{n+1}^m - q_n^m)}. \quad (15)$$

Верхние (нижние) индексы соответствуют здесь сдвигам, определяемым первым (вторым) из рассматриваемых двух преобразований Бэклунда. Напомним, что действие этих сдвигов на переменные (13) задается формулами (9), которые в наших новых обозначениях принимают следующий вид:

$$q_{n,xx}^m = \rho(q_{n,x}^m)(h_n^m - h_n^{m-1}), \quad \rho(z) = \varepsilon z^2 + \gamma z + \delta, \quad (16)$$

$$q_{n,xx}^m = \rho(q_{n,x}^m)(q_{n+1,x}^m f_n^m + g_n^m - q_{n-1,x}^m f_{n-1}^m - g_{n-1}^m). \quad (17)$$

Напомним, что функции f, g, h определяются здесь уравнениями (11), (7).

Можно проверить (см. примеры, приведенные в следующем разделе), что соотношения (14) обеспечивают эквивалентность на решетке этих двух уравнений (16) и (17). В отличие от (14) дискретная динамика ограничена в (16), (17) прямыми, заданными уравнениями $n = \text{const}$ и $m = \text{const}$, соответственно. Эти обобщенные цепочки Тоды (16), (17) рассматривались ранее в работах [2, 8].

В заключение этого раздела рассмотрим кратко вопрос о лагранжевости дискретных уравнений (15). В качестве лагранжиана мы выбираем

$$L = \sum_{m,n} (R(q_{n+1}^m - q_n^m) - R(q_n^m - q_{n+1}^{m-1})). \quad (18)$$

Суммирование в (18) идет по всем узлам решетки, варьирование по q_n^m дает уравнение на решетку, которое зависит от q_n^m и четырех ближайших соседей.

Сравнение вариационной производной от (18) с (15) приводит к соотношению

$$Z\left(\frac{h(a+b) - g(a)}{f(a)}\right) = R'(a) + R'(b).$$

Дифференцирование этого соотношения по a дает

$$Z'(t) = \frac{1}{\varepsilon t^2 + \gamma t + \delta}, \quad R''(x) = f(x). \quad (19)$$

Нетрудно проверить теперь, что условие лагранжевости уравнений (15) сводится к дополнительному функциональному уравнению на f, g, h :

$$h(a+b)(f(a) - f(b)) = f(a)g(b) - f(b)g(a), \quad (20)$$

которое выполняется для наиболее интересных моделей, рассматриваемых в следующем разделе. Геометрически соотношение (20) означает, что решетка (15) становится треугольной – ребра (q_n^m, q_{n+1}^m) и (q_{n+1}^m, q_n^{m+1}) теперь эквивалентны.

3. МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА, ВОЛЬТЕРРА, ТОДЫ

Условия совместности (14) динамических уравнений (8), соответствующих двум параметризациям (6), (10), можно заменить на эквивалентные за счет сдвига на решетке (m, n) . Определим элементарную ячейку решетки (см. рисунок).

Элементарная ячейка решетки

Для упрощения записи мы будем также пользоваться более компактными обозначениями $u - v$, указанными на рисунке. Тогда условия (14) можно представить в виде, аналогичном (12):

$$p(u, v) = p_1(v', v), \quad p(u', v') = p_2(u', u), \quad (21)$$

где (ср. (6), (10)) $p(u, v) = h(u - v)$ и

$$p_1(v', v) = f(v' - v)v'_x + g(v' - v), \quad p_2(u', u) = f(u' - u)u_x + g(u' - u).$$

Рассматриваемые ниже конкретные примеры решеток будут содержать свободные (спектральные) параметры, наличие которых связано с возможностью выбора различных решений уравнений (11) в первой и второй из формул (10). Важно отметить, однако, что эти параметры фиксированы внутри слоя решетки, образованного соседними параллельными немагнитными цепочками (линии решетки с координатами (m, n) и $(m, n + 1)$ при фиксированном n), и могут меняться при переходе на соседний слой.

Мы хотим проиллюстрировать изложенную выше теорию на примерах, соответствующих следующим важным частным случаям гамильтониана (1):

$$H = p_x q_x - p^2 q_x^2, \quad p_x q_x + p^2 q_x + q_x^2 p, \quad p_x q_x + p^2 + q_x^2 p. \quad (22)$$

Мы рассмотрим также преобразования Миуры, связывающие соответствующие этим гамильтонианам решетки.

3.1. Уравнения для решетки Тоды. Гамильтониан вида (1), соответствующий системе Тоды, имеет вид

$$H_T = p_x q_x + p^2 + p q_x^2, \quad (23)$$

при этом $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$ (см. (1)).

Найдем функции f, g и h из (7) и (11) для системы Тоды:

$$f(x) = c_1 e^x, \quad g(x) = \nu e^x - c_1^2 e^{2x}, \quad h(x) = c_2 e^x. \quad (24)$$

Константы c_1, c_2 являются свободными параметрами, которые можно исключить с помощью сдвигов и растяжений, оставляя только один существенный, спектральный, параметр ν .

Уравнения (21) в этом случае выглядят следующим образом:

$$u_x = e^{u'-u} + e^{u-v'} + \nu, \quad v'_x = e^{u-v'} + e^{v'-v} + \nu. \quad (25)$$

Действительно, из (25) следует

$$u_{xx} = e^{\hat{u}-u} - e^{u-v}, \quad \hat{u} = q_n^{m+2} \quad (26)$$

— обычная цепочка Тоды.

Заметим, что из (25) следует чисто дискретное уравнение для решетки Тоды:

$$e^{q_{n+1}^m - q_n^m} + e^{q_n^m - q_{n+1}^{m-1}} + \nu_n = e^{q_{n-1}^{m+1} - q_n^m} + e^{q_n^m - q_{n-1}^m} + \nu_{n-1}, \quad (27)$$

которое также получается варьированием лагранжиана:

$$L = \sum_{nm} [e^{q_{n+1}^m - q_n^m} - e^{q_n^m - q_{n+1}^{m-1}} + \nu_n (q_n^{m-1} - q_n^m)]. \quad (28)$$

3.2. Уравнения для решетки Вольтерра. Гамильтониан системы Вольтерра имеет вид

$$H_V = p_x q_x + p^2 q_x + p q_x^2, \quad (29)$$

при этом $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = \varepsilon = 0$.

Найдем функции f , g и h из (7) и (11) для системы Вольтерра:

$$f(x) = (1 - c_1 e^x)^{-1}, \quad g(x) = c_2 e^x, \quad h(x) = c_3 e^x. \quad (30)$$

Константы c_1 , c_2 , как и в случае системы Тоды, являются “лишними” параметрами, которые можно исключить с помощью сдвигов и растяжений, а спектральный параметр ν сохраняется под действием преобразования Миуры

$$P = \mathcal{P}_x + \mathcal{P} \mathcal{Q}_x, \quad Q_x = \mathcal{P} + \mathcal{Q}_x, \quad (31)$$

переводящего систему Вольтерра (латинские рукописные прописные буквы) в систему Тоды (латинские прописные буквы).

Уравнения (21) для системы Вольтерра выглядят следующим образом:

$$u_x = (e^{u'-u} - \nu)(e^{u-v'} - 1), \quad v'_x = (e^{v'-v} - \nu)(e^{u-v'} - 1). \quad (32)$$

Действительно, из (32) имеем

$$u_{xx} = u_x (e^{\hat{u}-u} - e^{u-v}), \quad \hat{u} = q_n^{m+2}. \quad (33)$$

Заметим, что из (32) следует чисто дискретное уравнение для решетки Вольтерра

$$(e^{q_{n+1}^m - q_n^m} - \nu_n)(e^{q_n^m - q_{n+1}^{m-1}} - 1) = (e^{q_n^m - q_{n-1}^m} - \nu_{n-1})(e^{q_{n-1}^{m+1} - q_n^m} - 1), \quad (34)$$

которое также получается варьированием лагранжиана:

$$L = \sum_{nm} [a(q_{n+1}^m - q_n^m) + b_n(q_n^m - q_{n+1}^{m-1})], \quad (35)$$

$$a'(x) = \log(e^x - 1), \quad b'_n(x) = -\log(e^x - \nu_n).$$

Перепишем преобразование Миуры (31) в дискретном виде. Это преобразование переводит решетку Вольтерра в решетку Тоды по формулам

$$e^{V'-V} = e^{\mathcal{U}-\mathcal{V}} - e^{\mathcal{V}'-\mathcal{V}}, \quad e^{U-V'} = e^{\mathcal{U}'-\mathcal{V}'} - \nu e^{\mathcal{U}-\mathcal{V}'}. \quad (36)$$

3.3. Уравнения для решетки Гейзенберга. Обычно модель Гейзенберга вводится как уравнение динамики единичного вектора $\vec{S}$:

$$\vec{S}_t = [\vec{S}_{xx} \times \vec{S}]. \quad (37)$$

Одна из параметризаций вектора $\vec{S}$

$$(S_1, S_2, S_3) = (p(q^2 - 1) + q, i(p(q^2 + 1) + q), 2pq + 1) \quad (38)$$

приводит к следующей гамильтоновой системе вида (1):

$$H_G = p_x q_x - p^2 q_x^2, \quad (39)$$

при этом $\varepsilon = -1$, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Найдем функции f , g и h из (7) и (11) для модели Гейзенберга:

$$f(x) = \frac{-\mu}{(x + c_1)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x + c_1}, \quad h(x) = \frac{1}{x + c_2}. \quad (40)$$

Константы c_1 , c_2 являются свободными параметрами, которые можно исключить с помощью сдвигов, параметр μ является спектральным параметром системы Гейзенберга.

Преобразование Миуры, переводящее систему Гейзенберга (латинские строчные буквы) в систему Вольтерра (латинские рукописные прописные буквы), существует при $\nu = 1$ и имеет вид

$$\mathcal{P} = -pq_x + \frac{p_x}{p}, \quad \mathcal{Q}_x = -pq_x. \quad (41)$$

Уравнения (21) в случае модели Гейзенберга выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{u_x} = \frac{1}{u' - u} + \frac{1}{u - v'}, \quad \frac{1}{v'_x} = \frac{1}{v' - v} + \frac{1}{u - v'}. \quad (42)$$

Действительно, из (42) имеем

$$\partial_x \left(\frac{1}{u_x} \right) = \frac{1}{\hat{u} - u} - \frac{1}{u - v}, \quad \hat{u} = q_n^{m+2}. \quad (43)$$

Заметим, что из (42) следует чисто дискретное уравнение

$$\mu_n \left[\frac{1}{q_{n+1}^m - q_n^m} + \frac{1}{q_n^m - q_{n+1}^{m-1}} \right] = \mu_{n-1} \left[\frac{1}{q_{n-1}^{m+1} - q_n^m} + \frac{1}{q_n^m - q_{n-1}^m} \right], \quad (44)$$

которое также получается варьированием лагранжиана:

$$L = \sum_{nm} \mu_n \log \frac{q_{n+1}^m - q_n^m}{q_n^m - q_{n+1}^{m-1}}. \quad (45)$$

Решетка Гейзенберга преобразуется в решетку Вольтерра по формулам

$$e^{\mathcal{V}' - \mathcal{V}} = \frac{v' - u}{u - v}, \quad e^{\mathcal{U} - \mathcal{V}'} = \frac{u' - u}{u' - v'}. \quad (46)$$

3.4. Представление Хироты для решеток. Следует отметить, что запись интегрируемых решеток в виде (25), (32) и (42) не единственна. С помощью гамильтонова метода, изложенного выше, можно получать интегрируемые системы с калибровкой, фиксирующей полиномиальный вид гамильтониана. При этом никакая система, относящаяся к заданному классу, не потеряна, а различные калибровки, т.е. эквивалентные способы представления, можно легко восстановить. Для некоторых приложений бывает удобно использовать билинейное представление Хироты, поэтому приведем их для некоторых из полученных решеток. Для цепочки Тоды билинейные соотношения имеют вид

$$W_{xx}W - W_x^2 - \widehat{W}\dot{W} = \alpha W^2, \quad e^u = \frac{\widehat{W}}{W}. \quad (47)$$

Для решетки Тоды аналогичные соотношения, но уже первого порядка по x , могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_x Z - \widehat{W} Z_x - W \widehat{Z} &= \mu \widehat{W} Z, \\ Z_x W - Z W_x - \widehat{W} \check{Z} &= \delta Z W, \quad e^{u'} = \frac{\widehat{Z}}{Z}. \end{aligned} \quad (48)$$

При этом из (48) следует уравнение первого порядка “внутри” цепочки

$$\widehat{W}_x W - \widehat{W} W_x = \frac{\widehat{Z} W^2 + \check{Z} \widehat{W}^2}{Z} + (\mu + \delta) \widehat{W} W. \quad (49)$$

Заметим, что, рассматривая третий ряд V в решетке, можно получить уравнения, вообще не содержащие производных:

$$V Z - \widehat{V} \check{Z} = \varepsilon W^2, \quad e^{u''} = \frac{\widehat{V}}{V}, \quad u'' = q_{n-1}^{m+1}. \quad (50)$$

Для цепочки Вольтерра соотношения типа Хироты имеют вид

$$\frac{w_{xx}w - w_x^2}{w_x} = \frac{\widehat{w}\dot{w} - w^2}{\dot{w}}, \quad e^v = w. \quad (51)$$

Билинейные соотношения для решетки Вольтерра записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} w z_x &= (w + z)(\widehat{w} - z), \\ z \widehat{w}_x &= (\widehat{w} + \widehat{z})(\widehat{w} - z), \\ \check{z} w_x &= (w + z)(w - \check{z}). \end{aligned} \quad (52)$$

Заметим, что, рассматривая третий ряд в решетке, можно получить уравнения, не содержащие производных:

$$\frac{1}{v}(v + w)(\widehat{v} - w) = \frac{1}{\check{z}}(w + z)(w - \check{z}). \quad (53)$$

4. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

4.1. Решетка для модели Ландау–Лифшица. Для того чтобы построить дискретную модель Ландау–Лифшица, необходимо найти различные параметризации импульса в соответствии с процедурой, изложенной во введении. Отметим, что гамильтониан (2) преобразуется по правилу $H(p, q) = \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$, $\hat{H} = H(p \rightarrow -p)$ при канонических преобразованиях $(p, q) \rightarrow (\hat{p}, \hat{q})$. Итак, параметризация импульсов имеет вид (ср. (10))

$$p_1 = -\frac{1}{h} \left(\hat{q}_x + \frac{h_q}{2} \right), \quad p_2 = -\frac{1}{h} \left(q_x - \frac{h_{\hat{q}}}{2} \right), \quad h = h(\hat{q}, q), \quad (54)$$

при этом $h(u, v)$ – симметрический полином степени 2 по каждой из переменных,

$$h(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v), \quad r(v) = \frac{1}{4}(2h_{uu}h - h_u^2).$$

Нам понадобится h как функция трех переменных:

$$h(uu', v) = a(v)uu' + \frac{1}{2}b(v)(u + u') + c(v). \quad (55)$$

Пользуясь (21), находим модель Ландау–Лифшица на решетке:

$$w_x = \frac{h(uv, w)}{v - u}, \quad \tilde{w}_x = \frac{h(uv, \tilde{w})}{v - u}, \quad (56)$$

если обозначить $q_n^m = v$, $q_{n+1}^m = w$, $q_n^{m+1} = u$, $q_{n-1}^{m+1} = \tilde{w}$.

Действительно, из (56) следует

$$-\frac{v_{xx} + \frac{1}{2}r'(v)}{v_x^2 + r(q)} = \frac{1}{u - v} - \frac{1}{v - v^-}, \quad v^- = q_n^{m-1}. \quad (57)$$

Отметим, что Адлер и Ямилов [9] предложили решетку, аналогичную (56).

Исключая производные из (56), можно получить чисто дискретную модель Ландау–Лифшица, описываемую лагранжианом

$$L = \sum_{mn} [l(q_{n+1}^{m-1}, q_n^m) - l(q_n^m, q_{n+1}^m)], \quad (58)$$

где функция $l(xy)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} l_x(xy) &= \frac{1}{r^{1/2}(x)} \operatorname{arctg} \frac{h_y(xy)}{r^{1/2}(x)}, & l_y(xy) &= \frac{1}{r^{1/2}(y)} \operatorname{arctg} \frac{h_x(xy)}{r^{1/2}(y)}, \\ l_{xy} &= \frac{1}{h(xy)}, & r(x) &= \frac{1}{4}(2h_{yy}h - h_y^2). \end{aligned} \quad (59)$$

Перейдем теперь к векторному описанию.

4.2. Векторное представление модели Ландау–Лифшица. Модель Ландау–Лифшица в векторном виде описывается следующим гамильтонианом и скобками Пуассона:

$$H = -\frac{1}{4} \left[\vec{S}_x^2 + (\vec{S} J \vec{S}) \right], \quad (60)$$

$$\{S_i, S_j\} = -2i e_{ijk} S_k, \quad \vec{S}^2 = 1.$$

Гамильтониан (60) преобразуется к виду (2) с помощью замены (ср. (38))

$$\vec{S} = \vec{A}p + \frac{1}{2}\vec{A}q, \quad r(q) = -\frac{1}{4}(\vec{A}J\vec{A}), \quad (61)$$

$$\vec{A} = (q^2 - 1, i(q^2 + 1), 2q).$$

При $J = 0$ эта модель переходит в модель Гейзенберга (37).

Определим также векторную функцию $\vec{S}$ в зависимости только от координат (здесь, как и в модели Гейзенберга, $\hat{q} = q + 1/p$):

$$\vec{S}(\hat{q}, q) = (S_1, S_2, S_3) = \left(\frac{q\hat{q} - 1}{\hat{q} - q}, i \frac{q\hat{q} + 1}{\hat{q} - q}, \frac{\hat{q} + q}{\hat{q} - q} \right). \quad (62)$$

Для построения дискретной системы в векторном виде сначала преобразуем тензор h :

$$h(u, v) = h_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = (\vec{A}(u) \hat{h} \vec{A}(v)), \quad \hat{h} = \vec{e}_\alpha h^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta, \quad (63)$$

где $\vec{e}_\alpha$ – канонический базис.

Тогда, учитывая (62), систему (56) можно переписать в виде

$$w_x = (\vec{S}(uv) \hat{h} \vec{A}(w)), \quad \tilde{w}_x = (\vec{S}(uv) \hat{h} \vec{A}(\tilde{w})). \quad (64)$$

Окончательно запишем дискретную модель Ландау–Лифшица (см. также [10]) в векторном виде с явной зависимостью от координат на решетке:

$$\vec{W}_x = [\vec{W} \times \hat{h} \vec{S}], \quad \vec{W}_t = \left[\vec{W} \times (\hat{h} [\vec{S} \times \vec{S}_x] + \det(\hat{h}) \hat{h}^{-1} \vec{S}) \right], \quad (65)$$

где $\vec{S} = \vec{S}(q_n^{m+1}, q_n^m)$, $\vec{W} = \vec{S}(q_{n+1}^m, q_{n-1}^{m+1})$. Отметим, что для подстановки векторов $\vec{S}$ и $\vec{W}$ в (65) надо воспользоваться формулой (62), поэтому “вспомогательный” вектор $\vec{W}$, как и вектор $\vec{S}$, теперь жестко привязан к решетке.

Поскольку мы выписали уравнение, описывающие динамику по x и t , систему (65) можно рассматривать как пару Лакса для модели Ландау–Лифшица. Условие согласования этой пары дает обычное уравнение Ландау–Лифшица

$$\vec{S}_\tau = \left[\vec{S} \times (\vec{S}_{xx} + \hat{J} \vec{S}) \right] \quad (66)$$

при условии $h_i^2 - h_j^2 = J_j - J_i$, $\tau = it$.

Обозначим $\vec{S}_n^m = \vec{S}(q_n^{m+1}, q_n^m)$, $\hat{h}_n$ – тензор $\hat{h}$ внутри слоя между цепочками с номерами n и $n + 1$. Тогда, исключая производные из (64), получим чисто дискретное уравнение на вектор $\vec{S}$

$$(\vec{S}_{n+1}^m \hat{h}_n - \vec{S}_{n-1}^{m+1} \hat{h}_{n-1}, \vec{S}_n^m + \vec{S}_n^{m+1}) = 0. \quad (67)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для построения интегрируемых дискретных систем (решеток) предложен гамильтонов метод, в котором координатам q соответствуют узлы решетки, а импульсам p — ее ребра. Требование инвариантности гамильтониана относительно канонических преобразований заданного вида (6), (11) фиксирует калибровку, что позволяет, как и в случае динамических систем [3], эффективно выделять действительно различные интегрируемые решетки. Калибровка может быть восстановлена в конце, что позволяет, например, записывать уравнения для решетки в форме Хироты.

Во многих случаях (кроме модели Ландау–Лифшица) нетрудно построить преобразования Миуры, связывающие различные интегрируемые системы благодаря универсальности их первых интегралов p и pq_x ; при этом становится прозрачным смысл этих преобразований как необратимых при некоторых значениях спектральных параметров — констант в данных моделях.

Заметим, что спектральные параметры в данной теории (ср. [11]) появляются, естественно, как константы интегрирования уравнений (11). При этом в уравнениях (25), (32), (42) мы не выписывали явно зависимость от параметров, связанных с трансляцией вдоль цепочек, а также от параметров, исключаемых растяжением по x .

Представление в дискретной форме полезно для алгебраического построения частных решений (по этому поводу см. [12] и др.), поскольку порядок уравнений по непрерывным переменным понижается. Заметим, однако, что представление интегрируемых систем в чисто дискретном виде позволяет, по-видимому, расширить класс решений, в то время как уравнения первого порядка по непрерывной переменной дают конструктивный способ построения многосолитонных решений.

Интересно также исследовать различные замыкания решеток для построения конечноразмерных решений.

Благодарности. В заключение авторы благодарят В.Э. Адлера за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2074; 1981. V. 50. P. 3785.
- [2] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 179.
- [3] *В. Г. Марихин.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 673.
- [4] *R. M. Miura.* J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1202.
- [5] *А. Б. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* УМН. 1993. Т. 42. С. 3.
- [6] *Y. B. Suris.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2235.
- [7] *F. W. Nijhoff, O. Ragnisco, V. B. Kuznetsov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 176. P. 681.
- [8] *R. I. Yamilov.* Classification of Toda type scalar lattices. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1993. P. 423.
- [9] *В. Э. Адлер, Р. И. Ямилов.* Частное сообщение.
- [10] *F. W. Nijhoff, V. Papageorgiou.* Phys. Lett. A. 1989. V. 141. P. 269.
- [11] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 349.
- [12] *I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Quantum integrable systems and elliptic solutions of classical discrete nonlinear equations, hep-th/9604080, 1996.

Поступила в редакцию 21.VII.1997 г.