Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Раниско, Ф. Зулло, Квантовые преобразования Бек-
лунда: некоторые идеи и примеры, *ТМФ*, 2012, том 172,
номер 2, 323–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6950>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:50:33

© 2012 г.

О. Раниско^{*†}, Ф. Зулло[‡]

КВАНТОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА: НЕКОТОРЫЕ ИДЕИ И ПРИМЕРЫ

Предложена механическая (гамильтонова) интерпретация так называемого свойства спектральности, введенного Скляниным и Кузнецовым в контексте преобразований Беклунда для конечномерных интегрируемых систем. Оказывается, что это свойство глубоко связано с разделением переменных Гамильтона–Якоби и может приводить к явному интегрированию соответствующей модели с помощью преобразований Беклунда. Показано, что, как только такая конструкция предложена, можно интерпретировать определяющий квантовые преобразования Беклунда оператор Бакстера Q как функцию Грина или пропагатор зависящего от времени уравнения Шредингера для интерполирующего гамильтониана.

Ключевые слова: квантовые преобразования Беклунда, свойство спектральности, интегрируемые отображения, квантовый пропагатор.

Статья написана для конференции “Solitons in 1+1 и 2+1 dimensions. DS, KP and all that” в честь 70-го дня рождения Марко Бойти и Флоры Пемпинелли (Лечче, Италия, 13–14 сентября 2011 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с последних десяти лет прошедшего тысячелетия появилось немало результатов о дискретизации конечномерных интегрируемых систем: упомянем, например, волчок Эйлера [1], волчок Лагранжа [2], рациональный магнетик Годена [3], модель Рейсенарса–Шнайдера [4], системы Хенона–Хейлса, Гарнье и Неймана [5]–[7] (см. также книгу [8] и ссылки в ней). Оказалось [9], что все точные дискретизации этих систем связывают с заданным решением новые решения: они являются преобразованиями Беклунда (ПБ) для таких систем. На основе этих построений

^{*}Dipartimento di Fisica, Università di Roma Tre, Rome, Italy

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sezione di Roma Tre, Rome, Italy.

E-mail: ragnisco@fis.uniroma3.it

[‡]School of Mathematics, Statistics and Actuarial Science, University of Kent, Canterbury, Kent, U.K. E-mail: F.Zullo@kent.ac.uk

Склянин и Кузнецов предположили [10], что концепцию ПБ следует пересмотреть, чтобы прояснить некоторые новые (а также старые) стороны предмета. На самом деле эти авторы ранее получили фундаментальные результаты, касающиеся метода разделения переменных и его связи с новыми техниками классического и квантового методов обратной задачи рассеяния. С помощью этих находок был проложен путь к лучшему пониманию роли ПБ в контексте конечномерных интегрируемых систем и раскрытию глубоких и плодотворных связей ПБ с гамильтоновой динамикой и разделением переменных (описание ПБ для конечномерных интегрируемых систем с геометрической точки зрения см. в работе [9]). Вкратце напомним эти находки.

Допустим, что рассматриваемая динамическая система определена парой Лакса со спектральным параметром, скажем, $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$. Следы степеней оператора $L(\lambda)$ являются сохраняющимися величинами, следовательно, детерминант матрицы Лакса также будет сохраняться. ПБ в случае конечномерных систем представляют собой канонические преобразования, сохраняющие алгебраическую форму интегралов, таким образом, если $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ – множество динамических переменных, то

$$(p_i, q_i)_{i=1}^n \xrightarrow{\text{ПБ}} (\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)_{i=1}^n, \quad L(\lambda, p_k, q_k) \xrightarrow{\text{ПБ}} \tilde{L}(\lambda) = L(\lambda, \tilde{p}_k, \tilde{q}_k),$$

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\} = \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Поскольку алгебраическая форма интегралов сохраняется, теми же остаются и детерминанты матриц Лакса $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$:

$$H_i(p, q) = \tilde{H}_i(\tilde{p}, \tilde{q}) \implies \det L(\lambda) = \det \tilde{L}(\lambda).$$

Таким образом, существование ПБ для данной системы означает, что две матрицы Лакса $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$ связаны преобразованием подобия, заданным так называемой одевающей матрицей $D(\lambda)$:

$$\tilde{L}(\lambda)D(\lambda) = D(\lambda)L(\lambda). \quad (1)$$

Очевидно, одевающая матрица не единственна, потому что для одной и той же системы могут существовать разные ПБ. Более того, если преобразования неявные, то $D(\lambda)$ может зависеть и от переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$, и от переменных $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)_{i=1}^n$. Более интересны параметрические и явные ПБ, т. е. ПБ, зависящие от одного или более параметров, произвольных (или лежащих в каком-то диапазоне значений) таких, что их переменные $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)_{i=1}^n$ могут быть выражены через переменные $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ в явном виде. Для получения параметрических и явных ПБ достаточно найти такую одевающую матрицу $D(\lambda)$, что:

1) ее многообразие совпадает с симплектическим листом такой же скобки Пуассона, как и та, которой удовлетворяет матрица $L(\lambda)$ [11];

2) детерминант матрицы $D(\lambda)$ имеет нединамический ноль, т. е. $\det D(\lambda) = 0$ при $\lambda = \mu$, где μ – не зависящий от динамических переменных параметр.

Условие 1 гарантирует, что ПБ являются каноническими [11], условие 2 – что они являются явными и параметрическими. Действительно, предположим, что отдельный симплектический лист, определяемый матрицей $D(\lambda)$, одномерен, так что $D(\lambda)$ будет зависеть от другой (пока свободной) переменной, скажем, a . Тогда, по-

скольк $\det D(\mu) = 0$, существует вектор $|\Omega\rangle$, принадлежащий ядру матрицы $D(\mu)$, который, вообще говоря, тоже зависит от μ и a . Но из (1) видно также, что $|\Omega\rangle$ – собственный вектор матрицы $L(\mu)$:

$$0 = \tilde{L}(\mu) \underbrace{(D(\mu)|\Omega(\mu)\rangle)}_{=0} = D(\mu)(L(\mu)|\Omega(\mu)\rangle) \implies L(\mu)|\Omega(\mu)\rangle = \gamma(\mu)|\Omega(\mu)\rangle. \quad (2)$$

Последнее равенство можно рассматривать как уравнение относительно a , которое, если его удастся решить, определяет зависимость a от μ и от динамических переменных системы (только от одного их набора, в данном случае – от переменных “с волной”). Так что, возвращаясь к (1), получаем параметрические (зависящие от μ) и явные преобразования.

В зависимости от размерности листа, определяемого матрицей $D(\lambda)$, можно получить мультипараметрические ПБ. Также можно получить мультипараметрические ПБ посредством повторных итераций однопараметрических преобразований, поскольку для конечномерных систем ПБ всегда коммутируют [11].

Для простоты в дальнейшем мы будем считать $L(\lambda)$ матрицей из $\mathfrak{sl}(2)$; также наши результаты легко обобщаются на случай $L(\lambda) \in \mathfrak{gl}(2)$. ПБ, построенные с помощью $(N \times N)$ -матрицы Дарбу, можно найти в работах [4], [11]. Заметим, что если $L(\lambda) \in \mathfrak{sl}(2)$, то функция $\gamma(\mu)$ в (2) удовлетворяет условию $\gamma^2(\mu) + \det L(\mu) = 0$ и является производящей для сохраняющихся величин системы.

В работе [10] было введено еще одно свойство ПБ – так называемое свойство спектральности. Чтобы понять это свойство, вспомним, что ПБ являются каноническими преобразованиями, а значит, существует производящая функция $\mathcal{F}_1(\tilde{q}, q, \mu)$ такая, что

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}, \quad \tilde{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}.$$

Свойство спектральности означает, что существует функция f_1 , удовлетворяющая следующему уравнению:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(\tilde{q}, q, \mu)}{\partial \mu} = -f_1(\gamma(\mu), \mu), \quad (3)$$

где $\gamma(\mu)$ – функция из соотношения (2): эта функция удовлетворяет уравнению $\det(L(\mu) - v(\mu)\mathbb{1}) = 0$, которое можно рассматривать как уравнение разделения в смысле разделения Гамильтона–Якоби для динамической системы. С классической точки зрения мы получаем квадратуру уравнений, с квантовой точки зрения – факторизацию собственных функций [9], [10], [12].

Начав с этого наблюдения, мы покажем, как свойство спектральности может приводить к “линеаризации” отображений, определяемых ПБ, что, как оказывается, дает общее решение уравнений движения. Эта конструкция также позволяет интерпретировать оператор Бакстера Q (представляющий квантовые ПБ) как функцию Грина уравнения Шредингера, которое определяется гамильтонианом, интерполирующим дискретный поток, заданный ПБ.

2. СВОЙСТВО СПЕКТРАЛЬНОСТИ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Прежде всего мы обсудим уравнение (3), определяющее свойство спектральности. Предположим, что можно выбрать параметр μ так, что одевающая матрица $D(\lambda, \mu)$ пропорциональна единичной при $\mu = 0$. Разлагая уравнение (1) в окрестности точки $\mu = 0$ как $D(\lambda, \mu) = k(\mathbb{1} + \mu D_0(\lambda) + O(\mu^2))$, получаем

$$\tilde{L}(\lambda) = L(\lambda) + \mu[D_0(\lambda), L(\lambda)] + O(\mu^2). \quad (4)$$

Положим

$$\dot{L} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\tilde{L} - L}{\mu},$$

тогда в пределе $\mu \rightarrow 0$ ПБ определяют гамильтонов поток: в этом смысле μ можно рассматривать как параметр эволюции. Уравнение (3) при этом похоже на уравнение Гамильтона–Якоби относительно времени μ , поскольку функция $\gamma(\mu)$ содержит все сохраняющиеся величины системы. Ниже мы поясним это утверждение.

Допустим, что существует набор ПБ с параметром μ , играющим роль времени в вышеописанном смысле:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(p, q, \mu), & \tilde{p}_i|_{\mu=0} &= p_i, \\ \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(p, q, \mu), & \tilde{q}_i|_{\mu=0} &= q_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти преобразования можно также переписать как (конечно, предполагая, что теорема о неявной функции применима)

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\tilde{q}_k, q_k, \mu), \quad p_i = p_i(\tilde{q}_k, q_k, \mu). \quad (6)$$

Поскольку (5) и (6) – канонические преобразования, существуют соответствующие производящие функции $\mathcal{F}_0(p, q, \mu)$ и $\mathcal{F}_1(\tilde{q}, q, \mu)$, дающие решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} p_i - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} &= \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial q_i}, & p_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}, \\ \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} &= -\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p_i}, & \tilde{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь предположим, что преобразования обладают свойством спектральности как относительно $\mathcal{F}_0(p, q, \mu)$, так и относительно $\mathcal{F}_1(\tilde{q}, q, \mu)$, следовательно, существуют две функции f и g такие, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} = -f(\gamma(\mu), \mu), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mu} = -g(\gamma(\mu), \mu). \quad (8)$$

Как будет показано в следующих двух теоремах, из этого предположения вытекают нетривиальные выводы. В результате при сделанном предположении ПБ можно параметризовать по-новому так, чтобы они представляли решение уравнения Гамильтона–Якоби для гамильтониана, который интерполирует поток, определяемый равенством (4).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что свойство спектральности выполняется как для $\mathcal{F}_1$, так и для $\mathcal{F}_0$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mu} - \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu},$$

т. е. $\sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \partial \tilde{q}_k / \partial \mu$ есть функция только от $\gamma(\mu)$ и μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Две производящие функции $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ связаны уравнением [13]

$$\mathcal{F}_0(p, q, \mu) = \mathcal{F}_1(\tilde{q}(p, q, \mu), q, \mu).$$

Воспользовавшись этим уравнением и уравнением $\tilde{p}_i = -\partial \mathcal{F}_1 / \partial \tilde{q}_i$, можно написать

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mu} \Big|_{\tilde{q}=\text{const}} \implies \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} = f(\gamma, \mu) - g(\gamma, \mu).$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что условие теоремы 1 выполнено, тогда, поставив μ в зависимость от констант движения с помощью любого корня (корней) уравнения $\mu = h(g(\mu, \gamma(\mu)))$, где h – произвольная функция, мы снова получим набор ПБ. Производящая функция новых преобразований задается равенством*

$$\mathcal{F}(p, q, \mu^{(k)}) = \mathcal{F}_0(p, q, \mu^{(k)}) + \int^{\mu^{(k)}} g(\gamma(\mu), \mu) d\mu, \quad (9)$$

где $\mu^{(k)} = h(g(\mu^{(k)}, \gamma(\mu^{(k)})))$ – любой корень уравнения $\mu = h(g(\mu, \gamma(\mu)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, мы хотим поставить параметр μ в зависимость от динамических переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$. Можно ли выбрать какую-либо функцию $\mu(p, q)$ так, что преобразования $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(p, q, \mu(p, q))$ и $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(p, q, \mu(p, q))$, полученные подстановкой функции $\mu(p, q)$ в выражения (6), снова являются каноническими? Если новые преобразования являются каноническими, то они имеют производящую функцию $\mathcal{F}$:

$$p_i - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}, \quad \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}. \quad (10)$$

Подставляя $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + A(p, q)$ в предыдущую систему и принимая во внимание, что по теореме 1

$$g = -\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu},$$

сразу же найдем уравнения, которым должно удовлетворять $A(p, q)$:

$$\frac{\partial A}{\partial q_i} = g \frac{\partial \mu}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial A}{\partial p_i} = g \frac{\partial \mu}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Действительно, из равенства $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + A$ и уравнений (10) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p_i} \Big|_{\mu=\text{const}} + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} = - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} \Big|_{\mu=\text{const}} - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial p_i}. \quad (12)$$

Если $\mu = \text{const}$, то ПБ суть канонические преобразования с производящей функцией $\mathcal{F}_0$, следовательно, выполняется уравнение

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p_i} \right|_{\mu=\text{const}} = - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \left. \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i} \right|_{\mu=\text{const}}.$$

Подставляя это равенство в (12), получаем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} + \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \mu}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} = 0.$$

Но из теоремы 1 мы имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} + \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} = -g,$$

так что в результате

$$\frac{\partial A}{\partial p_i} = g \frac{\partial \mu}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким же образом с помощью уравнения относительно $\partial \mathcal{F} / \partial q_i$ можно показать, что

$$\frac{\partial A}{\partial q_i} = g \frac{\partial \mu}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Уравнения совместности для функции $A(p, q)$,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial p_k \partial q_i} = \frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial p_k},$$

дают (в силу (11))

$$\frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial \mu}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial \mu}{\partial p_k}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Эти уравнения означают, что μ должно быть произвольной функцией от g , т.е. $\mu = h(g(\mu, \gamma(\mu)))$. Заметим, что это неявное уравнение (набор уравнений) для μ фиксирует зависимость μ от динамических переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ через свои корни. Каждому корню этого уравнения (набора уравнений) соответствуют функция g и функция μ , зависящие только от динамических переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ и удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (13). Обозначая k -й корень уравнения $\mu = h(g(\mu, \gamma(\mu)))$ как $\mu^{(k)}$ и возвращаясь к системе (11), находим

$$A(p, q) = \int^{\mu^{(k)}} g(\gamma(\mu), \mu) d\mu.$$

Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний, которые нам потребуются далее.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Производящая функция $\mathcal{F}(p, q, \mu)$ как функция от μ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}(p, q, \mu)}{\partial \mu} = - \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu},$$

которое получается путем тривиального вычисления производной $\partial \mathcal{F}(p, q, \mu) / \partial \mu$ для функции $\mathcal{F}(p, q, \mu)$, как в (9), с учетом теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Добавляя к функции μ зависимость от еще одного постоянного параметра, скажем, T , т. е. рассматривая $\mu = \mu^{(k)}(T)$, мы сохраняем каноничность преобразования и снова получаем набор ПБ.

Последнее замечание означает, что можно получить новое параметрическое семейство ПБ, если сделать $\mu^{(k)}$ зависящим также от параметра T . Действительно, можно повторить рассуждения теоремы 2, с самого начала рассматривая μ как функцию от динамических переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ и нового постоянного параметра T . Очевидно, что в этом случае производящая функция $\mathcal{F}$ также будет зависеть от параметра T .

Ключевым во всей конструкции является следующее рассуждение. Если предположить, что свойство спектральности выполняется и для $\mathcal{F}_0$, и для $\mathcal{F}_1$, то можно, по крайней мере в принципе, получить новое, большее семейство параметрических ПБ, делая μ зависящим от констант движения и от параметра T . Покажем, что этому способу получения новых ПБ соответствует возможность определить с помощью подходящего выбора функции $\mu(p, q, T)$ каноническое преобразование переменных $(p_i, q_i)_{i=1}^n$ в новые переменные $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)_{i=1}^n$ так, что уравнение Гамильтона–Якоби, в котором параметр T играет роль “времени”, а интерполирующий гамильтониан – роль сопряженной переменной, выполняется тождественно. В итоге при заданном параметрическом ПБ $\tilde{p}_i(p_k, q_k, \mu)$, $\tilde{q}_i(p_k, q_k, \mu)$, обладающем свойством спектральности и для $\mathcal{F}_0$, и для $\mathcal{F}_1$, мы должны найти функцию μ , удовлетворяющую уравнению Гамильтона–Якоби для потока, который описывают ПБ:

$$\mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0,$$

где $\mathcal{H}$ обозначает интерполирующий гамильтониан ПБ. Согласно замечанию 1 предыдущее уравнение можно переписать в более удобном виде

$$\mathcal{H} - \frac{\partial \mu}{\partial T} \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \mu} = 0. \quad (14)$$

Действительно, теперь по теореме 1 сумма $\sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \partial \tilde{q}_k / \partial \mu$ зависит от μ и динамических переменных только через константы движения; очевидно также, что интерполирующий гамильтониан $\mathcal{H}$ будет зависеть только от некоторых комбинаций констант движения. Таким образом, уравнение (14) действительно разрешимо в терминах μ . Подставляя решение $\mu(p, q, T)$ в выражения для ПБ, получаем по построению общее решение уравнений движения для интерполирующего гамильтониана $\mathcal{H}$.

Сделаем еще одно замечание. Создается впечатление, что имеет место неоднозначность при выборе функции μ , являющейся решением уравнения (14), потому что, конечно, решение зависит также от произвольной функции констант движения. Но сейчас мы покажем, что свобода выбора значения этой произвольной функции соответствует свободе выбора начальных условий в общем решении уравнений движения, так что она представляет собой сдвиг по времени T . Действительно, принимая во внимание теорему 1 и уравнения (8), можно записать решение уравнения Гамильтона–Якоби (14) в неявном виде как

$$T + \frac{1}{\hbar} \int_0^\mu \{g(\gamma(\eta), \eta) - f(\gamma(\eta), \eta)\} d\eta + F(H_i) = 0, \quad (15)$$

где функции f и g заданы выражениями (8), а F – произвольная функция от гамильтонианов H_i системы. Теперь из уравнения (15) видно, что, во-первых, произвольная функция F выступает как аддитивная величина по отношению к временному параметру T , во-вторых, если мы хотим сохранить начальные условия в том виде, как они были заданы в (5), $\tilde{p}_i|_{T=0} = p_i$ и $\tilde{q}_i|_{T=0} = q_i$, то надо положить $F = 0$.

В следующем разделе мы приведем простое приложение доказанных теорем к ПБ для одномерного гармонического осциллятора.

3. УЧЕБНЫЙ ПРИМЕР: ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Представление Лакса со спектральным параметром для одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & (p - iq)/\lambda \\ (p + iq)/\lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dot{L}(\lambda) = [L, M].$$

В этом простом случае спектральная кривая описывается уравнением

$$\gamma^2(\lambda) = -\det L(\lambda) = 1 + \frac{p^2 + q^2}{\lambda^2}.$$

В дальнейшем мы положим для краткости $a = p - iq$ и $a^* = p + iq$.

Можно получить класс ПБ с помощью одевающей матрицы $D(\lambda)$, параметризованной следующим образом:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha/\lambda \\ \beta/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было указано во введении, чтобы найти преобразования в явном виде, мы требуем выполнения равенства $\det D(\lambda)|_{\lambda=\mu} = 0$. Это ограничение означает, что $\alpha\beta = \mu^2$, так что можно переписать одевающую матрицу, положив $\beta = \mu\zeta$:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \mu/\lambda\zeta \\ \mu\zeta/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если $\lambda = \mu$, то у одевающей матрицы есть вектор $|\Omega(\mu)\rangle$, принадлежащий ядру. В явном виде он задается как $|\Omega(\mu)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\zeta \end{pmatrix}$. Тогда уравнение на собственные векторы $L(\mu)|\Omega(\mu)\rangle = \gamma(\mu)|\Omega(\mu)\rangle$ определяет ζ как функцию от a и a^* :

$$\zeta = \frac{\mu(1 - \gamma(\mu))}{a} = -\frac{a^*}{\mu(1 + \gamma(\mu))}.$$

Теперь можно написать ПБ в явном виде:

$$\tilde{a} = a \frac{\gamma(\mu) + 1}{\gamma(\mu) - 1}, \quad \tilde{a}^* = a^* \frac{\gamma(\mu) - 1}{\gamma(\mu) + 1}, \quad \text{где} \quad \gamma^2(\mu) = 1 + \frac{|a|^2}{\mu^2}.$$

Заметим, что при $\mu = 0$ преобразования сводятся к тождественному отображению.

Проверим, обладают ли эти канонические преобразования свойством спектральности для $\mathcal{F}_0$ и для $\mathcal{F}_1$. Производящая функция в переменных a, a^* задается выражением $\mathcal{F}_0(a, a^*, \mu) = -2\mu^2(\gamma(\mu) + 1)$, тогда как обратные преобразования

$$\tilde{a} = \frac{4\mu^2 a^*}{(\tilde{a}^* - a^*)^2}, \quad a = \frac{4\mu^2 \tilde{a}^*}{(\tilde{a}^* - a^*)^2}$$

порождаются функцией $\mathcal{F}_1(a^*, \tilde{a}^*, \mu) = 4\mu^2 a^* / (\tilde{a}^* - a^*)$. Дифференцируя $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, находим

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mu} = -2\mu \left(\sqrt{\gamma(\mu)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma(\mu)}} \right)^2, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mu} \Big|_{\tilde{a}^* = a^*(\gamma(\mu)-1)/(\gamma(\mu)+1)} = -4\mu(\gamma(\mu) + 1).$$

В результате как $\partial \mathcal{F}_0 / \partial \mu$, так и $\partial \mathcal{F}_1 / \partial \mu$ суть функции, зависящие только от интеграла $p^2 + q^2$ и параметра μ .

Применим результаты предыдущего раздела. В одномерном случае теорема 2 просто означает, что μ может произвольным образом зависеть от гамильтониана, а ПБ вновь представляют собой канонические преобразования. Теперь мы можем рассматривать μ как функцию от $|a|$ и от нового параметра T , т. е. $\mu = \mu(|a|, T)$. По теореме 2 новые преобразования снова являются каноническими с производящей функцией

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0|_{\mu=\mu(|a|)} + 4 \int^{|a|} \mu(\gamma(\mu) + 1) \frac{\partial \mu(x, T)}{\partial x} dx.$$

Чтобы установить зависимость μ от $|a|$ и T , нужно найти интерполирующий гамильтониан. Как было сказано в разделе 2, интерполирующий гамильтониан потока μ можно экстраполировать, рассматривая соотношение $\tilde{L}D = DL$ в пределе $\mu \rightarrow 0$:

$$D = \mathbb{1} - \mu D_0 + O(\mu^2) \implies \dot{L}(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\tilde{L} - L}{\mu} = [L(\lambda), D_0(\lambda)]. \quad (16)$$

В нашем случае матрица $D_0(\lambda)$ дается равенством

$$D_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a^*}} \\ \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a^*}{a}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Непрерывный поток, который задан уравнением (16), управляется гамильтонианом $\mathcal{H} = 2i|a|$. Заметим, что множитель i возникает потому, что a и a^* не являются канонически сопряженными.

Теперь у нас есть все необходимые составляющие. Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{H} - \tilde{a} \frac{\partial \tilde{a}^*}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0, \quad (17)$$

$$2i|a| + \frac{2|a|^2}{\sqrt{\mu^2 + |a|^2}} \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0, \quad \mu(|a|, T) = -i|a| \sin\left(\frac{T}{|a|} + F(|a|)\right).$$

Как было замечено в конце раздела 2, можно выбрать произвольную функцию $F(|a|)$ нулевой, если потребовать $\mu = 0$ при $T = 0$.

Подставляя формулу $\mu(|a|, T) = -i|a| \sin(T/|a|)$ в выражения для ПБ и возвращаясь к физическим переменным $p = (a^* + a)/2$ и $q = (a^* - a)/2i$, находим

$$\tilde{p} = p \cos\left(\frac{2T}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) - q \sin\left(\frac{2T}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right),$$

$$\tilde{q} = q \cos\left(\frac{2T}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) + p \sin\left(\frac{2T}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right),$$

т. е. общее решение уравнений движения, заданных гамильтонианом $\mathcal{H} = 2\sqrt{p^2 + q^2}$. Заметим, что теперь мы опускаем множитель i в интерполирующем гамильтониане, потому что мы рассматриваем поток непосредственно относительно T , а не относительно μ ($\mu \sim -iT$ при $T \rightarrow 0$). Параметр T является “линеаризующим параметром” для потока.

Для полноты изложения следует сослаться на работу [14], в которой предложен другой способ нахождения функционального отношения между μ и T (если таковое существует). Однако в [14] нет необходимых и достаточных условий существования такого отношения и не отмечены его связи с аналитической механикой. Тем не менее эта точка зрения может быть очень полезной, так как явная информация о ПБ не всегда соответствует явной информации о производящих функциях $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ этих преобразований. Можно также показать, что в результате применения методов, описанных в работе [14], получается в точности результат $\mu(|a|, T) = -i|a| \sin(T/|a|)$, как в (17). Мы отсылаем читателя к этой работе за другими примерами линеаризации ПБ.

4. КВАНТОВЫЕ ПБ: НЕКОТОРЫЕ ДОГАДКИ И НАБЛЮДЕНИЯ

С классической точки зрения ПБ порождают из заданного решения уравнений движения новые решения. Так, вообще говоря, если $g(p(t), q(t))$ – физическая наблюдаемая, связанная с кривой $(p(t), q(t))$ в фазовом пространстве, то $g(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$ – это та же физическая наблюдаемая, связанная с кривой $(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$. С квантовой точки зрения ПБ описываются унитарным оператором $Q_\mu^{(1)}$, где μ – параметр (набор параметров) ПБ, реализованным как интегральный оператор на пространстве, натянутом на собственные функции [10], [15]:

$$Q_\mu^{(1)}: \psi(q) \rightarrow \int f^{(1)}(\tilde{q}, q) \psi(q) dq. \quad (18)$$

Преобразования подобия, индуцированные оператором $Q_\mu^{(1)}$, суть эквиваленты классических канонических преобразований, и ядро $f^{(1)}(\tilde{q}, q)$ в квазиклассическом приближении задается уравнением

$$f^{(1)}(\tilde{q}, q) \sim \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} F_1(\tilde{q}, q) \right\}, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (19)$$

Насколько нам известно, построение в явном виде оператора Q , называемого в литературе оператором Бакстера, и его связи с ПБ обсуждались только для решетки Тоды [11], [15], для дискретной самозахватывающей модели [16] и для модели Калоджеро–Сазерленда (см. работу [17], где авторы также четко проясняют понятие факторизации, тесно связанное со свойством спектральности).

С нашей точки зрения, если ПБ могут приводить к интегрированию уравнений с помощью описанной в предыдущих разделах конструкции, то ядро $f^{(1)}(\tilde{q}, q)$ следует отождествлять с пропагатором или функцией Грина для зависящего от времени уравнения Шредингера, гамильтониан которого интерполирует поток, представляемый ПБ. Действительно, в этом случае классическому сдвигу по времени на траектории, которая задана начальными условиями, представляемыми ПБ, соответствует, как ясно из уравнения (18), квантовая амплитуда вероятности того, что частица с собственным значением координаты q в момент времени 0 в последующий момент μ будет находиться в точке $\tilde{q}$.

Ниже мы проверим это утверждение в случае операторе Бакстера для гармонического осциллятора, показав, что его ядро определяет хорошо известный пропагатор соответствующего уравнения Шредингера. Для сравнения результатов мы слегка модифицируем выбор функции μ в (17), положив $T = \phi|a|/2$. Теперь роль времени будет играть параметр ϕ . При таком выборе интерполирующий гамильтониан совпадает с физическим, и, очевидно, ПБ задаются формулами

$$\tilde{p} = p \cos \phi + q \sin \phi, \quad \tilde{q} = q \cos \phi - p \sin \phi.$$

Чтобы найти производящую функцию $F_1(\tilde{q}, q)$, выразим $\tilde{p}$ и p через q и $\tilde{q}$:

$$\tilde{p} = \frac{q - \tilde{q} \cos \phi}{\sin \phi}, \quad p = \frac{q \cos \phi - \tilde{q}}{\sin \phi}.$$

Из равенства $dF_1 = p dq - \tilde{p} d\tilde{q}$ тут же находим

$$F_1(\tilde{q}, q) = \frac{(\tilde{q}^2 + q^2) \cos \phi - 2q\tilde{q}}{2 \sin \phi} + w(\phi),$$

где $w(\phi)$ – произвольная функция переменной ϕ .

Теперь нам надо найти оператор Q или, что то же самое, его ядро $f^1(\tilde{q}, q)$. В $\langle \cdot | \cdot \rangle$ -обозначениях ядро $f^1(\tilde{q}, q)$ описывается в q -представлении как $\langle \tilde{q} | q \rangle$. Поэтому, записав ПБ в форме $q = \tilde{q} \cos \phi + \tilde{p} \sin \phi$, $\tilde{q} = q \cos \phi - p \sin \phi$, легко убедиться, что $f^1(\tilde{q}, q)$ – решение системы

$$\begin{aligned} q f^{(1)} &= \tilde{q} f^{(1)} \cos \phi - i \hbar \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \tilde{q}} \sin \phi, \\ \tilde{q} f^{*(1)} &= q f^{*(1)} \cos \phi + i \hbar \frac{\partial f^{*(1)}}{\partial \tilde{q}} \sin \phi, \end{aligned}$$

где значком $*$ обозначено комплексное сопряжение. Решение данной системы есть

$$f^{(1)}(\tilde{q}, q) = C(\phi) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{(\tilde{q}^2 + q^2) \cos \phi - 2q\tilde{q}}{2 \sin \phi} \right) \right\}$$

в точном соответствии с (19).

Напомним классические результаты о пропагаторе уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. В общем случае пропагатор можно формально записать как

$$K(\tilde{q}, q) = \left\langle \tilde{q} \left| \exp \left\{ -\frac{iHt}{\hbar} \right\} \right| q \right\rangle = \sum_n \langle \tilde{q} | n \rangle \langle n | q \rangle \exp \left\{ -\frac{iE_n t}{\hbar} \right\}.$$

В случае гармонического осциллятора $\langle q | n \rangle$ выражается через многочлен Эрмита, отсюда

$$K(\tilde{q}, q) = \sum_n \frac{e^{-(\tilde{q}^2 + q^2)/2\hbar}}{2^n n! \sqrt{\pi \hbar}} H_n \left(\frac{\tilde{q}}{\sqrt{\hbar}} \right) H_n \left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}} \right) e^{-i(n+1/2)\phi}.$$

Воспользовавшись формулой Мелера [18], мы можем просуммировать ряд:

$$\sum_n \frac{w^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \exp \left\{ \frac{2xyw - (x^2 + y^2)w^2}{1-w^2} \right\}. \quad (20)$$

В результате получаем

$$K(\tilde{q}, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar \sin \phi}} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{(\tilde{q}^2 + q^2) \cos \phi - 2q\tilde{q}}{2 \sin \phi} \right) \right\}.$$

Эта формула согласуется с формулой для $f^{(1)}(\tilde{q}, q)$, если отождествить функцию $C(\phi)$ с $1/\sqrt{2\pi i \hbar \sin \phi}$.

Рассуждая точно так же, можно найти квантовую амплитуду вероятности того, что частица с собственным значением импульса p в момент времени 0 будет иметь в последующий момент μ импульс $\tilde{p}$. Снова имеет место соответствие между классической производящей функцией, теперь заданной формулой $d\mathcal{F}_2 = \tilde{q} d\tilde{p} - q dp$, и ядром соответствующего оператора Бакстера $Q_\mu^{(2)}$:

$$f^{(2)}(\tilde{p}, p) \sim \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} F_2(\tilde{p}, p) \right\}, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (21)$$

Из уравнений

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{p} \cos \phi - p}{\sin \phi}, \quad q = \frac{\tilde{p} - p \cos \phi}{\sin \phi}$$

тут же находим

$$F_2(\tilde{p}, p) = \frac{(\tilde{p}^2 + p^2) \cos \phi - 2p\tilde{p}}{2 \sin \phi} + \eta(\phi),$$

где $\eta(\phi)$ – снова произвольная функция. С другой стороны, из ПБ, записанных как

$$\tilde{p} = p \cos \phi + q \sin \phi, \quad p = \tilde{p} \cos \phi - \tilde{q} \sin \phi,$$

находим (с учетом того, что в p -представлении $q = i\hbar \partial/\partial p$) уравнения, которым удовлетворяет $f^{(2)}$:

$$\begin{aligned} pf^{(2)} &= \tilde{p}f^{(2)} \cos \phi - i\hbar \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \tilde{p}} \sin \phi, \\ \tilde{p}f^{*(2)} &= pf^{*(2)} \cos \phi + i\hbar \frac{\partial f^{*(2)}}{\partial p} \sin \phi. \end{aligned}$$

В результате

$$f^{(2)}(\tilde{p}, p) = V(\phi) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{(\tilde{p}^2 + p^2) \cos \phi - 2p\tilde{p}}{2 \sin \phi} \right) \right\}$$

снова в полном соответствии с (21).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предприняли попытку слегка пролить свет на свойство спектральности ПБ, показав как оно может приводить с помощью конструкций из раздела 3 к явному интегрированию соответствующих уравнений движения. Было бы интересным применить данные результаты к системам многих тел, которые обладают ПБ, имеющими свойство спектральности, например к решетке Тоды [19]. Также интерпретация для таких систем оператора Бакстера как пропагатора соответствующего оператора Шредингера может привести к интересным формулам суммирования для ортогональных многочленов, подобным формуле Мелера (20). В заключение отметим, что неочевидное отношение между ПБ и функцией Грина оператора Шредингера показывает связь между теорией таких преобразований и фейнмановским подходом, основанным на интегралах по путям, что открывает неисследованные перспективы в статистической механике и квантовой теории поля.

Благодарности. Ф. Зулло благодарен за финансовую поддержку Istituto Nazionale di Alta Matematica (Italian National Institute for Higher Mathematics) как стипендиат INdAM-COFUND Marie Curie.

Список литературы

- [1] A. I. Bobenko, B. Lorbeer, Yu. B. Suris, *J. Math. Phys.*, **39**:12 (1998), 6668–6683.
- [2] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Commun. Math. Phys.*, **204**:1 (1999), 147–188.
- [3] A. N. W. Hone, V. B. Kuznetsov, O. Ragnisco, *J. Phys. A*, **34**:11 (1999), 2477–2490, arXiv: nlin/0007041.
- [4] F. W. Nijhoff, O. Ragnisco, V. B. Kuznetsov, *Commun. Math. Phys.*, **176**:3 (1996), 681–700, arXiv: hep-th/9412170.
- [5] O. Ragnisco, *Phys. Lett. A*, **198**:4 (1995), 295–305, arXiv: hep-th/9407043.
- [6] O. Ragnisco, Yu. B. Suris, “On the r -matrix structure of the Neumann system and its discretizations”, *Algebraic Aspects of Integrable Systems: in Memory of Irene Dorfman*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **26**, eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser, Boston, MA, 1996, 285–300.
- [7] A. N. W. Hone, V. B. Kuznetsov, O. Ragnisco, *J. Phys. A*, **32**:27 (1999), L299–L306.
- [8] Yu. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [9] V. B. Kuznetsov, P. Vanhaecke, *J. Geom. Phys.*, **44**:1 (2002), 1–40, arXiv: nlin/0004003.

- [10] V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **31**:9 (1998), 2241–2251.
- [11] E. K. Sklyanin, “Bäcklund transformation and Baxters Q-operator”, *Integrable Systems: From Classical to Quantum* (Montréal, QC, July 26–August 6, 1999), CRM Proceedings and Lecture Notes, **26**, eds. J. Harnad, G. Sabidussi, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 2000, 227–250.
- [12] E. K. Sklyanin, “Separation of variables – new trends”, *Quantum Field Theory, Integrable Models and Beyond* (Kyoto, February 14–17, 1994), Progress of Theoretical Physics. Supplement, **118**, eds. T. Inami, R. Sasaki, Kyoto Univ., Kyoto, 1995, 35–60.
- [13] A. Fasano, S. Marmi, *Analytical Mechanics. An introduction*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.
- [14] O. Ragnisco, F. Zullo, *SIGMA*, **7** (2011), 001, 13 pp.
- [15] V. Pasquier, M. Gaudin, *J. Phys. A*, **25**:20 (1992), 5243–5252.
- [16] V. B. Kuznetsov, M. Salerno, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **33**:1 (2000), 171–189.
- [17] V. B. Kuznetsov, V. V. Mangazeev, E. K. Sklyanin, *Indag. Math.*, **14**:3–4 (2003), 451–482.
- [18] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [19] V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin, *SIGMA*, **3** (2007), 080, 17 pp.