Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Новокшенов, Усеченные решения уравнения Пен-
леве II, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 296–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 10:55:36

© 2012 г.

В. Ю. Новокшенов*

УСЕЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ II

Изучаются специальные решения второго уравнения Пенлеве, называемые усеченными, т. е. не имеющие полюсов вдоль одного или нескольких критических лучей в комплексной плоскости. Такие уравнения параметризуются специальными данными монодромии для уравнений пары Лакса, многообразие которых для общих решений является двумерным комплексным многообразием с одно- и нульмерными особенностями, возникающими в силу отсутствия глобальной параметризации этого многообразия. Показано, что эти и только эти особенности (вместе с нулями параметризации) отвечают усеченным решениям второго уравнения Пенлеве. В качестве иллюстрации рассмотрены известные решения Хастингса–МакЛеода, Абловица–Сегура и некоторые другие с целью показать, что они входят в класс усеченных решений и соответствуют тому или иному типу особенностей данных монодромии.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, усеченные решения, распределение полюсов, задача Римана, ангармонический осциллятор, квантование Бора–Зоммерфельда, комплексный метод ВКБ.

Посвящается 70-летию Марко Бойти и Флоры Пемпинелли

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются распределения полюсов решений однородного уравнения Пенлеве II (Р-II)

$$u_{zz} = zu + 2u^3, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Хорошо известно, что все решения уравнения Пенлеве (1) являются мероморфными в комплексной плоскости. Со времен Пенлеве, доказавшего этот факт для уравнения Р-I, изучение распределения полюсов стало предметом аналитической теории трансцендентов Пенлеве. В первой работе [1] на эту тему Бутру доказал, что асимптотически на бесконечности полюсы образуют регулярную решетку, а именно любое решение приближается “деформированной” эллиптической функцией с модулем, зависящим от $\arg z/|z|$. В самом деле, преобразование $\zeta = (2/3)z^{3/2}$, $u = \sqrt{z}v$ приводит к уравнению

$$v_{\zeta\zeta} - v - 2v^3 = -\frac{v_{\zeta}}{\zeta} + \frac{v}{9\zeta^2}. \quad (2)$$

*Институт математики РАН, Уфа, Россия. E-mail: novik53@mail.ru

Рис. 1. Решение Хастингса–МакЛеода (а) и распределение его полюсов (б) [3]. Пунктиром показаны лучи Γ_k .

Правая часть уравнения (2) мала на бесконечности, что порождает некоторое возмущение главного члена асимптотики v , удовлетворяющего уравнению $v_{\zeta\zeta} - v - 2v^3 = 0$.

Другим свойством, установленным Бутру для уравнения Р-П, является вырождение решетки полюсов вдоль лучей

$$\Gamma_k = \left\{ \arg z = \frac{\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, 5 \right\}. \quad (3)$$

Эти лучи называются *критическими*; на них имеются решения вида

$$v(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{2} \right)$$

для укороченного уравнения (2) $v_{\zeta\zeta} - v - 2v^3 = 0$. Здесь чисто мнимый период эллиптической функции становится бесконечным, и полюсы ложатся на лучи Γ_0 , Γ_2 и Γ_4 в переменной z . Для невырожденных решений согласно Бутру [1] полюсы располагаются вдоль *линий полюсов*, которые представляют собой гладкие кривые, стремящиеся к лучам Γ_k на бесконечности. Позднее в книге [2] (гл. 8) этот факт был строго доказан; он вытекает из асимптотики “деформированной” эллиптической функции на бесконечности.

Бутру также показал, что для каждого критического луча Γ_k имеется однопараметрическое семейство решений, называемых *усеченными*, у которого нет линий полюсов при больших z вдоль этого луча. Он доказал, что такое усеченное решение не имеет полюсов при больших $|z|$ в двух смежных секторах Ω_{k-1} и Ω_k , примыкающих к Γ_k :

$$\Omega_k = \left\{ z \mid \frac{\pi}{3}k < \arg z < \frac{\pi}{3}(k+1), \quad k = 0, 1, \dots, 5 \right\}. \quad (4)$$

Рис. 2. Решение Абловица–Сегура (а) и распределение его полюсов (б).

Усеченные решения имеют регулярную асимптотику трех типов на луче $\Gamma_k = \bar{\Omega}_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k$ при $z \rightarrow \infty$:

$$u(z) = \pm i \sqrt{\frac{z}{2}} \left(1 \mp \frac{1}{8} z^{-3} + \frac{47}{128} z^{-6} + O(z^{-9}) \right), \quad (5)$$

$$u(z) = C_1 z^{-1/4} e^{-(2/3)|z|^{3/2}} (1 + O(|z|^{-1/4})), \quad (6)$$

или

$$u(z) = \pm i \sqrt{\frac{z}{2}} (1 + O(z^{-3})) + C_2 z^{-1/4} e^{-(2\sqrt{2}/3)|z|^{3/2}} (1 + O(|z|^{-1/4})), \quad (7)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

В настоящее время структура мероморфных решений уравнения Р-II изучена более глубоко. С одной стороны, метод изомонодромных деформаций [2] дал эффективное описание асимптотического распределения полюсов при $z \rightarrow \infty$. С другой стороны, численное моделирование позволило получать картину полюсов в любой компактной области комплексной плоскости. Один из численных методов основан на приближении Паде. Он был развит в работе [3] и оказался достаточно удачным даже для оценки асимптотического распределения полюсов. Приведенные ниже иллюстрации, полученные этим методом, показывают, что многие известные трансценденты Р-II являются усеченными решениями. Например, решение Хастингса–МакЛеода [4], показанное на рис. 1, представляет собой 2-усеченное решение. Оно имеет асимптотику (6) на Γ_1 с $C = i/2\sqrt{\pi}$ и асимптотику (5) со знаком + на Γ_4 . Аналогично решение Абловица–Сегура [5], изображенное на рис. 2, является 1-усеченным решением с регулярной асимптотикой (6) вдоль Γ_4 с произвольной постоянной C_1 .

Эти эксперименты дали направление для аналитических исследований усеченных решений. Их основой служит метод изомонодромных деформаций, который параметризует все решения в терминах координат некоторого двумерного многообразия. Эти координаты являются интегралами движения и однозначно задают любое решение уравнения Пенлеве ([2], гл. 5). Многообразие является алгебраическим, оно задается одним полиномиальным уравнением в $\mathbb{C}^3$ (см. ниже раздел 2) и имеет особенности там, где нарушается глобальная параметризация, т. е. одна из координат

становится бесконечной или нулевой в выбранной карте. Подмногообразие особенностей также является алгебраическим, оно имеет одно- и нульмерные компоненты (см. раздел 3). Мы докажем, что подмногообразие особенностей параметризует все усеченные решения.

Доказательство основано на формулах распределения полюсов, полученных с помощью комплексного метода ВКБ в применении к асимптотическому “разделению” уравнений пары Лакса. Метод ВКБ дает главный член асимптотики при $|z| \rightarrow \infty$ в терминах данных монодромии (п. 2.1). Явные формулы напоминают известные уравнения квазиклассического квантования Бора–Зоммерфельда для полиномиального потенциала (п. 2.2). Из этих формул немедленно следуют условия для данных монодромий, когда полюсы исчезают вдоль того или иного луча Γ_k . Оказывается, что множество таких данных совпадает с особенностями многообразия, и обратно, каждая особая точка многообразия порождает некоторое усеченное решение (раздел 3).

В конце работы мы обсуждаем вырождение многообразия особенностей. Одномерные компоненты отвечают 1-усеченным решениям (с отсутствием полюсов вдоль одного критического луча), а нульмерные компоненты соответствуют 2- и 3-усеченным решениям. Последние являются аналогами усеченного решения, найденного Бутру для уравнения Р-I. В разделе 4 приведены примеры специальных решений Р-II (Хастингса–МакЛеода, Абловица–Сегура и др.), представляющие собой усеченные решения.

2. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОЛЮСОВ

2.1. Изомонодромный метод. Метод изомонодромных деформаций [2] представляется адекватным инструментом для вычисления асимптотического распределения полюсов на бесконечности общих решений уравнения Р-II. Впервые этот метод был применен в книге [6], гл. 10, где было найдено распределение нулей при $|z| \rightarrow \infty$ на вещественной оси в терминах данных монодромии. Позднее в работах [7] и [8] было найдено распределение нулей и полюсов на бесконечности в секторах Ω_n комплексной плоскости. Напомним вкратце суть этого метода. Рассматривается линейное уравнение Флашки–Ньюэлла [9] для (2×2) -матричной функции $\Psi = \Psi(\lambda, z)$:

$$\Psi_\lambda = -[i(4\lambda^2 + z + 2u^2)\sigma_3 + 4\lambda u\sigma_2 + 2u_z\sigma_1]\Psi, \quad (8)$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 суть матрицы Паули. Введем шесть канонических решений Ψ_n , $n = 1, 2, \dots, 6$, уравнения (8), нормализованных асимптотикой

$$\Psi_n(\lambda, z) = e^{-i(4/3)\lambda^3 - iz\lambda}(I + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Sigma_n,$$

где

$$\Sigma_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3}n < \arg \lambda < \frac{\pi}{3}(n+1) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Данные монодромии, ассоциированные с уравнением (8), задаются матрицами Стокса:

$$\Psi_{n+1}(\lambda, z) = \Psi_n(\lambda, z)S_n, \quad n = 1, 2, \dots, 6, \quad (9)$$

причем все S_n треугольны:

$$S_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2k-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

и $S_{k+3} = (S_k^T)^{-1}$ в силу автоморфизма $\lambda \mapsto -\lambda$ уравнения (8).

Данные монодромии s_k постоянны по z тогда и только тогда, когда функция $u = u(z)$ в уравнении (8) удовлетворяет уравнению Р-II (1). Циклическое соотношение $S_1 S_2 \dots S_6 = I$ вместе с автоморфизмом $s_{k+3} = -s_k$ эквивалентно соотношению

$$s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0. \quad (10)$$

Комплексное многообразие

$$\mathcal{P}_2 = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0\} \quad (11)$$

параметризует все решения уравнения Р-II. Если $1 - s_1 s_3 \neq 0$, то координаты на многообразии (11) могут быть выбраны в виде

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_2 = \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3} \right\}.$$

В этом случае уравнение Р-II имеет асимптотическое решение в виде [7], [8]

$$u(z) = (\lambda_1 - \lambda_3) e^{i\varphi/2} \sqrt{z} \operatorname{sn} \left(\frac{2}{3} (\lambda_1 + \lambda_3) [e^{2\pi/3 - (i\varphi/2)} z^{3/2} + \chi] \mid \varkappa \right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg z, & \varkappa &= \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}, & \chi &= \frac{i}{2} \omega_2 \mu + i \omega_1 \nu + o(1), & \frac{2\pi}{3} < \arg z < \pi, \\ \mu &= \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3} \right), & \nu &= \frac{1}{2\pi i} \ln \left(-\frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3} \right), \\ \omega_{1,2} &= \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)}}, \end{aligned} \quad (13)$$

а контуры $(1/2)\mathcal{L}_2 = (-\lambda_1, \lambda_1)$, $\mathcal{L}_1 = (\lambda_3, \lambda_1)$ лежат на верхнем листе эллиптической римановой поверхности $\zeta^2 = (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)$ с точками ветвления, удовлетворяющими следующей задаче Бутру:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_3^2 &= -\frac{1}{2} e^{i\varphi}, \\ \operatorname{Im} \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} \sqrt{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)} d\lambda &= 0, \\ \lambda_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\pi i/3} &\text{ при } \varphi \rightarrow \pi, \quad \lambda_{1,3} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ при } \varphi \rightarrow \frac{2\pi}{3}. \end{aligned} \quad (14)$$

2.2. Параметризация полюсов. Задача монодромии, сформулированная выше, значительно упрощается, если z находится вблизи полюса $u(z)$. Ряды Лорана для решения $u(z)$ вблизи полюса $z = a$ имеют вид

$$u(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{a}{6}(z-a) - \frac{1}{4}(z-a)^2 + c(z-a)^3 + O(z-a)^4,$$

$$u'_z(z) = -\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{a}{6} - \frac{1}{2}(z-a) + 3c(z-a)^2 + O(z-a)^3, \quad z \rightarrow a,$$

где c – некоторый дополнительный параметр. Две произвольные постоянные a и c могут рассматриваться как начальные данные для уравнения второго порядка (1) при $z \rightarrow a$. В этом пределе уравнение (8) переписывается в виде

$$\Psi_{\lambda\lambda} + (16\lambda^4 + 8a\lambda^2 - b)\Psi = 2\varepsilon \left[\sigma_1 \Psi_\lambda + \left(4\lambda^2 + \frac{2a}{3} \right) \sigma_2 \Psi - \frac{a}{3} \sigma_3 \Psi \right],$$

$$b = -\frac{2}{9}a^2 - 40c, \quad \varepsilon = z - a, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда главный член функции Ψ (детали см. в книге [6], гл. 10) имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} (2\lambda - i\varepsilon^{-1})V_- & \varepsilon^{-1}V_+ \\ \varepsilon^{-1}V_- & (2\lambda + i\varepsilon^{-1})V_+ \end{pmatrix} + O(\varepsilon), \quad \lambda \in \Sigma_n,$$

где скалярные функции V_+ и V_- удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\frac{d^2 V_-}{d\lambda^2} + (16\lambda^4 + 8a\lambda^2 - b)V_- = 0, \quad \lambda \in \Sigma_n, \quad (15)$$

с нормировкой

$$V_- \rightarrow (2\lambda)^{-1} e^{\pm i(4/3)\lambda^3 \pm ia\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \arg \lambda = \frac{2\pi n}{3}. \quad (16)$$

Предположим, что $1 - s_1 s_3 \neq 0$ на многообразии $\mathcal{P}_2$ (11) и $\arg a \in \Omega_2$. Тогда, поскольку данные монодромии (10) не зависят от z (т. е. от ε), задача монодромии (9) сводится к задаче рассеяния для уравнения Шредингера (15)

$$V_+ \rightarrow (2\lambda)^{-1} e^{i(4/3)\lambda^3 + ia\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \arg \lambda = 0,$$

$$V_+ \rightarrow (2\lambda)^{-1} \left[\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3} e^{i(4/3)\lambda^3 + ia\lambda} + \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3} e^{-i(4/3)\lambda^3 - ia\lambda} \right], \quad (17)$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \arg \lambda = \pi.$$

где s_1 и s_3 принадлежат многообразию (11).

Для больших значений $|a|$ задача рассеяния (15), (17) имеет явное решение с помощью ВКБ-приближения при $|\lambda| \rightarrow \infty$ (см. работу [6], гл.10):

$$V_+ = p^{-1/4}(\lambda) \exp \left\{ i \int_{\lambda_1}^{\lambda} \sqrt{p(\xi)} d\xi \right\} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \arg \lambda = 0,$$

$$V_+ = p^{-1/4}(\lambda) \left(\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3} \exp \left\{ i \int_{\lambda_3}^{\lambda} \sqrt{p(\xi)} d\xi \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3} \exp \left\{ -i \int_{\lambda_3}^{\lambda} \sqrt{p(\xi)} d\xi \right\} \right) (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \arg \lambda = \pi,$$

где $p(\lambda) = 16\lambda^4 + 8a\lambda^2 - b = 16(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)$, а ветвь квадратного корня выбирается из условия $\sqrt{p(\lambda)} \rightarrow 4\lambda^2 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Тем самым вычисление данных рассеяния (17) сводится к подходящему продолжению эллиптических интегралов $\int \sqrt{p(\lambda)} d\lambda$ на римановой поверхности $\mu^2 = 16(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)$. В результате получаются уравнения для полных эллиптических интегралов (детали см. в работе [7])

$$\exp\left\{i \int_{\mathcal{L}_1} \sqrt{p(\lambda)} d\lambda\right\} = \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3}, \quad \exp\left\{i \int_{\mathcal{L}_3} \sqrt{p(\lambda)} d\lambda\right\} = \frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3}. \quad (18)$$

Окончательно, уравнения (18) определяют главный член асимптотики при $|a| \gg 1$ в неявной форме:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_1} \sqrt{16\lambda^4 + 8a\lambda^2 - b} d\lambda &= -i \ln \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3} + 2\pi m, \\ \int_{\mathcal{L}_3} \sqrt{16\lambda^4 + 8a\lambda^2 - b} d\lambda &= -i \ln \frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3} + 2\pi n, \end{aligned} \quad (19)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m + n \gg 1$.

Система (19) очень похожа на условия квазиклассического квантования Бора–Зоммерфельда для ангармонического осциллятора [10]. Поскольку здесь потенциал комплексный, имеется два уравнения с двумя целыми числами, отвечающими “энергетическим уровням” a и b . В книге [2] (гл. 7) доказано, что система (19) имеет единственное решение для всех n и m , выражаемое в тета-функциях.

В самом деле, распределение полюсов a в секторе $2\pi/3 < \arg z < \pi$ следует из формулы (12)

$$\frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_3)[e^{-i\varphi/2}a^{3/2} + \chi] = 2Kn + 2iK'm, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

где $2K(\varkappa)n + 2iK'(\varkappa)m$ образуют решетку полюсов для синуса Якоби $\operatorname{sn}(z|\varkappa)$. Базовые полупериоды K и K' синуса Якоби и χ выражаются, в свою очередь, через $\omega_{1,2}$ в (13):

$$K(\varkappa) = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2}\omega_1, \quad K'(\varkappa) = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2}\omega_2, \quad \chi = \frac{i}{2}\omega_2\mu + i\omega_1\nu. \quad (20)$$

Отсюда следует формула для главного члена распределения полюсов при $a \rightarrow \infty$:

$$a\sqrt{|a|} = \left(\frac{3n}{2} - i\nu\right)\omega_1 + \left(\frac{3m}{2} - \frac{i\mu}{2}\right)\omega_2 + o(1), \quad n, m \rightarrow \infty, \quad (21)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3}\right), \quad \nu = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(-\frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3}\right).$$

3. ОСОБЕННОСТИ МНОГООБРАЗИЯ $\mathcal{P}_2$

Опишем теперь подмногообразие усеченных решений в терминах данных монодромии $(s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{P}_2$. В основе этого описания лежат асимптотические формулы (19) и (21). При $a \rightarrow \infty$

$$\ln\left(\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1 s_3}\right) \rightarrow \infty, \quad \text{или} \quad \ln\left(-\frac{s_1 + s_3}{1 - s_1 s_3}\right) \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Обратно, если отсутствуют полюсы на бесконечности вблизи границы двух секторов, то асимптотики (21) неверны при $n \rightarrow \infty$ или $m \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что один из логарифмов (22) обращается в бесконечность.

Для доказательства этих утверждений определим сначала многообразие особенностей. Будем называть точку $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ особой на многообразии $\mathcal{P}_2$, если по крайней мере одна из координат s_j обращается в нуль или бесконечность. Таким образом, многообразие особенностей $\tilde{\mathcal{P}}_2 \subset \mathcal{P}_2$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \{\mathbf{s} \in \mathcal{P}_2 \mid \{s_j = 0\} \cup \{s_j = \infty\}, \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_j, \dots)\}.$$

В силу (11) это подмногообразие имеет вид

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \{\{s_1 s_2 = -1\} \cup \{s_1 s_3 = 1\} \cup \{s_2 s_3 = -1\} \cup \{s_j = 0\}, j = 1, 2, 3\}. \quad (23)$$

Это определение соответствует стандартному определению критических точек комплексного многообразия, т. е. нулей производных $\partial_{s_j} F$ голоморфной функции $F(\mathbf{s}) = 0$, определяющей многообразие. После замены $s_j = e^{-p_j}$, $j = 1, 2, 3$, уравнение для $\mathcal{P}_2$ принимает вид

$$F = e^{-p_1} - e^{-p_2} + e^{-p_3} + e^{-p_1 - p_2 - p_3} = 0.$$

Поэтому все решения $\partial_{p_j} F = 0$, $j = 1, 2, 3$, совпадают с $\tilde{\mathcal{P}}_2$ в определении (23).

Также нам нужно определение асимптотического предела полюсов при их стремлении к критическому лучу Γ_k . Обозначим через Γ_k^ε луч, близкий к Γ_n :

$$\Gamma_k^\varepsilon = \left\{ z \mid \arg z = \frac{\pi}{3}k + \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots, 5 \right\}.$$

Линия полюсов (гладкая кривая, на которой лежат полюсы при $z \rightarrow \infty$, см. работу [1]) стремится к Γ_k в секторе Ω_k , если она пересекает Γ_k^ε при всех $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Усеченные решения уравнения Р-II и только они параметризуются координатами многообразия особенностей (23).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем необходимость. Без потери общности рассмотрим усеченное решение, у которого отсутствуют полюсы вдоль критического луча $\arg z = \varphi = \pi$. В других случаях следует воспользоваться симметрией

$$u(z) \mapsto e^{-2\pi i/3} u(e^{2\pi i/3} z). \quad (24)$$

Пусть, от противного, это решение $u(z)$ задано координатами $(s_1, s_2, s_3) \notin \tilde{\mathcal{P}}_2$, т. е. $1 - s_1 s_3 \neq 0$. Тогда имеет место асимптотика (12) в секторе $2\pi/3 < \arg z < \pi$ с распределением полюсов (21). Рассмотрим асимптотику (21) вдоль луча Γ_3^ε , т. е. при $\arg z = \pi - \varepsilon$. В силу (14) и (20) в этом пределе

$$\lambda_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\pi i/3}, \quad \varkappa \rightarrow -1, \quad K \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad K' \rightarrow \ln \frac{4}{\varepsilon}.$$

Тогда из асимптотики (21) следует

$$a_{m,n} \sqrt{|a_{m,n}|} = (3m + \mu) \sqrt{2} \ln \frac{4}{\varepsilon} + \left(\frac{3ni}{2} + \nu \right) \pi \sqrt{2} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Возьмем линию полюсов для $a_{m,n}$ при $n = 1$, $m \rightarrow +\infty$; тогда $\arg a_{m,1} > \pi - \varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$ и m достаточно больших. Полученное противоречие доказывает необходимое условие теоремы.

Достаточное условие теоремы вытекает из результатов работ [8] и [11]. Сформулируем их здесь с учетом наших обозначений.

ЛЕММА 1 (см. работу [8], теорема 5). *В случае $s_2 = 0$ решения уравнения Р-II имеют регулярные асимптотики (6) в секторах $\Omega_0 \cup \Omega_5$:*

$$u(z) = \frac{i[\theta(-\varphi)s_1 - \theta(\varphi)s_3]}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-(2/3)z^{3/2}} (1 + O(|z|^{-3/2})), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$ и

$$\theta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < 0, \\ 1/2, & \varphi = 0, \\ 1, & \varphi > 0, \end{cases} \quad \varphi = \arg z.$$

ЛЕММА 2 (см. работу [8], теорема 6). *В случае $1 + s_2 s_3 = 0$ решения Р-II имеют регулярные асимптотики (6) в секторах $\Omega_2 \cup \Omega_4$.*

Заметим, что леммы 1 и 2 выделяют 1-усеченные решения только для двух алгебраических уравнений из шести, фигурирующих в определении подмногообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$ (23). Другие уравнения для данных монодромии (23) рассматриваются аналогично с использованием симметрий (24). Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнения для данных монодромии, задающие 2- и 3-усеченные решения, отвечают дальнейшему вырождению многообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Их решения – нульмерные особенности (точки), которые могут быть перечислены явно. Для 3-усеченных решений имеем

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = s_3 = \pm i, \\ s_1 = s_2 = \pm i, \quad s_3 = \mp i. \end{aligned} \tag{25}$$

Для 2-усеченных решений справедливы формулы

$$\begin{aligned} s_1 = 0, \quad s_2 = s_3 = \pm i, \\ s_2 = 0, \quad s_1 = -s_3 = \pm i, \\ s_3 = 0, \quad s_1 = -s_2 = \pm i. \end{aligned}$$

Здесь различным комбинациям s_j отвечают дискретные симметрии (24), размножающие единственное 0-параметрическое решение. Эти решения будут рассмотрены ниже в конце раздела 4.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ УСЕЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ, ВЫРОЖДЕННЫЕ ДАННЫЕ МОНОДРОМИИ И ФОРМУЛЫ СВЯЗИ

Поскольку все усеченные решения не более чем однопараметрические, выполнить их классификацию достаточно просто. Фактически это было сделано в книге [2] (гл. 11), однако без упоминания подмногообразия особенностей. Здесь мы

Рис. 3. Комплексное усеченное решение (а) и его распределение полюсов (б) при $s_1 = -s_3 = i$ и $s_2 = 1 - 2i$.

перечислим примеры каждого класса усеченных решений с указанием формул связи на вещественной оси. Большинство известных решений попадает в этот класс; иллюстрации распределения полюсов сделаны с помощью алгоритма аппроксимации Паде [3]. Начальные данные $u(0)$ и $u'(0)$, необходимые для этого алгоритма, вычислены по данным монодромии s_1, s_2, s_3 с помощью программы Олвера [12].

4.1. 1-усеченные решения.

1. Решение Абловица–Сегура [5] имеет следующие данные монодромии (книга [2], гл. 9):

$$s_1 = -s_3, \quad s_2 = 0.$$

На вещественной оси имеют место асимптотики

$$u(x) = \frac{is_1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-(2/3)x^{3/2}} (1 + O(|x|^{-1/4})), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u(x) = \frac{i\alpha}{(-x)^{1/4}} \sin \left\{ \frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \ln(-x) + \phi \right\} + o((-x)^{-1/4}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

где

$$\alpha^2 = \frac{1}{\pi} \ln(1 + |s_1|^2), \quad \alpha > 0,$$

$$\phi = \frac{3}{2}\alpha^2 \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma\left(\frac{i\alpha^2}{2}\right) - \arg(s_1).$$

Это решение представлено на рис. 3 для $s_1 = -s_3 = 100i$ и $s_2 = 0$.

2. Комплексное усеченное решение имеет данные монодромии

$$s_1 = \pm i, \quad s_3 = \mp i, \quad s_2 \in \mathbb{C}/\{0\} \text{ произвольно}$$

и следующую асимптотику на луче Γ_0 [8]:

$$u(x) = \sigma \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\alpha}{x^{1/4}} e^{i(2\sqrt{2}/2)x^{3/2} + i\gamma \ln((2/3)x^{3/2})} +$$

$$+ \frac{\beta}{x^{1/4}} e^{-i(2\sqrt{2}/2)x^{3/2} - i\gamma \ln((2/3)x^{3/2})} + O(x^{-1+3|\operatorname{Im} \gamma|}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$-\frac{\pi}{6} < \arg(is_2) < \frac{\pi}{6}, \quad \sigma = \pm 1, \quad \alpha\beta = \frac{\gamma}{6\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \ln(is_2), \quad |\operatorname{Im} \gamma| < \frac{1}{6},$$

$$\alpha = \frac{\sigma\pi 2^{1/4}}{(1 + is_2)\Gamma(i\gamma/2)\Gamma(1/2 + i\gamma/2)} e^{\pi\gamma/2 + i\gamma \ln(6\sqrt{2}) - i\pi/4},$$

$$\beta = -\frac{\sigma\pi 2^{1/4}}{(1 - is_2)\Gamma(-i\gamma/2)\Gamma(1/2 - i\gamma/2)} e^{\pi\gamma/2 - i\gamma \ln(6\sqrt{2}) + i\pi/4}.$$

На отрицательной полуоси (луч Γ_3) справедлива асимптотика (см. книгу [2], теорема 11.4)

$$u(x) = v(x) - \frac{s_2}{2^{7/4}\sqrt{\pi}}(-x)^{-1/4} e^{-(2\sqrt{2}/2)(-x)^{3/2}} (1 + O(|x|^{-1/4})),$$

$$v(x) = \sigma\sqrt{-\frac{x}{2}} + O(|x|^{-5/2}), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Это решение изображено на рис. 4.

4.2. 2-усеченное решение. Решение Хастингса–МакЛеода не содержит параметров, его данные монодромии имеют вид

$$s_1 = \pm i, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \mp i.$$

На вещественной оси оно имеет асимптотики (5) и (6) (книга [2], гл. 10)

$$u(z) = \mp \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-(2/3)z^{3/2}} + O(z^{-3/4}), \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$u(z) = \pm \sqrt{-\frac{z}{2}} \left(1 \mp \frac{1}{9z^3} + \frac{73}{128z^6} + O(|z|^{-9}) \right), \quad z \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, при больших $|z|$ полюсы вдоль лучей Γ_0 и Γ_3 отсутствуют.

Численный эксперимент [3] подтверждает, что все полюсы этого 2-усеченного решения лежат в секторах Ω_1 и Ω_4 (см. рис. 1). Недавно Бертола [13] аналитически доказал, что полюсов нет в секторах Ω_0 и Ω_5 . Это первое доказательство предположения об отсутствии полюсов, аналогичное гипотезе Дубровина для уравнения Р-I [14].

4.3. 3-усеченное решение. В случае максимального вырождения многообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$ из формулы (25) следует, что

$$s_1 = s_2 = s_3 = \pm i.$$

Это отвечает 3-усеченному решению, которое является чисто мнимым и имеет асимптотики (см. книгу [2], теоремы 9.2 и 11.4)

$$u(z) = i\alpha(-z)^{-1/4} \sin\left\{\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \ln(-z) + \phi\right\} + O(|z|^{-3/4}), \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$u(z) = \pm i\sqrt{\frac{z}{2}} \left(1 \mp \frac{1}{8z^3} + \frac{73}{128z^6} + O(|z|^{-9}) \right), \quad z \rightarrow +\infty,$$

Рис. 4. Чисто мнимое 3-усеченное решение (а) и его распределение полюсов (б) при $s_1 = s_2 = s_3 = -i$.

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}, \quad \phi = \frac{3}{2}\alpha^2 \ln 2 - \frac{\pi}{2} - \arg \Gamma\left(\frac{i\alpha^2}{2}\right) - \arg s_1.$$

Распределение полюсов показано на рис. 4 и подтверждает еще одну гипотезу об отсутствии полюсов (пока не доказанную), аналогичную гипотезе Дубровина [14].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00088).

Список литературы

- [1] P. Boutroux, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **30** (1913), 255–375; **31** (1914), 99–159.
- [2] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, изд-во РХД, М., 2005.
- [3] В. Ю. Новокшенов, *ТМФ*, **159**:3 (2009), 515–526.
- [4] S. P. Hastings, J. B. McLeod, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **73**:1 (1980), 31–51.
- [5] M. J. Ablowitz, H. Segur, *Studies Appl. Math.*, **57**:1 (1977), 13–44.
- [6] A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *The Isomonodromy Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1191**, Springer, Berlin, 1986.
- [7] В. Ю. Новокшенов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:6 (1990), 1229–1251.
- [8] А. Капаев, *Phys. Lett. A.*, **167**:4 (1992), 356–362.
- [9] H. Flaschka, A. C. Newell, *Commun. Math. Phys.*, **76**:1 (1980), 65–116.
- [10] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev.*, **184**:5 (1969), 1231–1260.
- [11] А. А. Капаев, *J. Phys. A.*, **37**:46 (2004), 11149–11167, arXiv: nlin/0404026.
- [12] S. Olver, *RHPackage (A Mathematica package for computing solutions to matrix-valued Riemann–Hilbert problems)*, <http://www.maths.usyd.edu.au/u/olver/projects/RHPackage.html>, 2011.
- [13] M. Bertola, *Nonlinearity*, **25**:4 (2012), 1179–1186.
- [14] B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein, *J. Nonlinear Sci.*, **19**:1 (2009), 57–94.