Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Пашаев, Резонансы солитонов огибающих и немаделунговы жидкости типа Броеера–Каупа, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 308–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:17:59

© 2012 г.

О. К. Пашаев*

РЕЗОНАНСЫ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩИХ И НЕМАДЕЛУНГОВЫ ЖИДКОСТИ ТИПА БРОЕРА–КАУПА

Выведена расширенная нелинейная дисперсия для солитонного уравнения огибающих, а также найдены уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера, связанные с этой дисперсией. Показано, что растяжение пространства означает гиперболический поворот дуальной пары уравнений – нелинейного и резонансного нелинейного уравнений Шредингера. Для резонансного нелинейного уравнения Шредингера, кроме представления в виде жидкости Маделунга, найдена альтернативная немаделунгова жидкость в виде системы Броера–Каупа и с помощью билинейной формы построены солитонные резонансы для системы Броера–Каупа. Найдены соответствующие интегралы движения и условия существования солитонного резонанса, а также геометрическая интерпретация с помощью псевдоримановой поверхности постоянной кривизны. Данный подход может быть расширен для построения резонансной версии и соответствующего представления типа Броера–Каупа для любого солитонного уравнения огибающих. В качестве примера выведена новая модифицированная система Броера–Каупа из модифицированного нелинейного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: солитонные резонансы, жидкость Маделунга, система Броера–Каупа, солитон огибающих, резонансное нелинейное уравнение Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представление в виде жидкости Маделунга для уравнения Шредингера является важным инструментом, который впервые был создан для интерпретации квантовой механики [1], [2], затем был реализован в виде модели квантовой жидкости [3] и позже использовался как подходящий способ описания квазиклассического предела в солитонных уравнениях огибающих типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [4], [5]. В настоящей статье мы используем его для обобщения НУШ, расширяя дисперсионный член. Это обобщение сохраняет интегрируемость и допускает особую область параметров с резонансным взаимодействием солитонов. С помощью растяжения пространственных координат мы покажем, что НУШ связано со

*Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology Izmir, 35430 Turkey.
E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

своим дуальным резонансным уравнением с помощью гиперболического поворота. Эта дуальная модель, резонансное НУШ (РНУШ) [6], наряду с маделунговой формой и квантовым потенциалом может быть переписана для скорости дрейфа, при этом она обращается в систему Броеера–Каупа (БК). В противоположность трилинейной форме, которая известна для модели БК [7], в этом подходе мы получаем билинейную форму для описания солитонных резонансов системы БК. В общем случае наш подход позволяет построить резонансную версию для любого уравнения солитонов огибающих и соответствующее ему представление типа БК. В качестве пояснения построена новая модифицированная модель БК для модифицированного НУШ (МНУШ).

1.1. Комплексное уравнение Бюргерса. В 1926 г. Маделунг в своем первом кратком сообщении о гидродинамической интерпретации уравнения Шредингера [1] ввел поле комплексных скоростей

$$\mathbf{V} = \frac{\hbar}{m} \frac{\nabla \Psi}{\Psi} = \mathbf{v}_q + i\mathbf{v}_c, \quad (1)$$

где мнимая часть интерпретировалась как скорость электронов, которая совпадает с локальной средней скоростью Маделунга–Ландау–Лондона [8]

$$\mathbf{v}_c = \frac{i\hbar}{2m\rho} (\Psi \nabla \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \nabla \Psi) = \frac{\hbar}{m} \Im \frac{\nabla \Psi}{\Psi} = \frac{\nabla S}{m}, \quad (2)$$

где $\rho = |\Psi|^2$, а $\mathbf{v}_q = (\hbar/2m) \nabla \ln \rho$ является “квантовой”, или осмотической, скоростью. Система, описывающая жидкость Маделунга в квантовой механике, имеет вид

$$m(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla \left(U(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right), \quad \rho_t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_q$. Используя комплексную скорость (1), можно переписать эту систему в виде комплексного уравнения Бюргерса

$$i\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{m} \nabla U \quad (4)$$

для безвихревого движения $\text{rot } \mathbf{V} = 0$. Это нелинейное уравнение является С-интегрируемым в смысле Калоджеро [9], и с помощью формулы (1) в качестве комплексной версии преобразования Коула–Хопфа [10], [11] сводится к линейному уравнению Шредингера

$$i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U\Psi. \quad (5)$$

1.2. Обобщенное уравнение Шредингера. Дисперсионная часть плотности энергии для этого уравнения является квадратичной формой по отношению к скоростям:

$$\epsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi = \frac{m\rho}{2} \bar{\mathbf{V}} \mathbf{V} = \frac{m}{2} \rho (\mathbf{v}_c^2 + \mathbf{v}_q^2). \quad (6)$$

Для построения наиболее полного обобщения дисперсии мы будем придерживаться постулата аналитической механики [12], где кинетический член

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (7)$$

обусловлен симметричной положительно-определенной квадратичной формой a_{ij} для обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, играющей роль метрики Римана. Теперь мы обобщим дисперсию

$$\epsilon_0 = \frac{m}{2} \rho (E \mathbf{v}_c^2 + 2F \mathbf{v}_c \mathbf{v}_q + G \mathbf{v}_q^2), \quad (8)$$

используя двумерную псевдориманову метрику, или первую фундаментальную форму (E, F, G) . Такая дисперсия, переписанная через волновые функции, приводит к следующим нелинейным дисперсионным членам:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = \frac{\hbar^2}{8m} & \left[2E \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi + G \nabla |\Psi| \nabla |\Psi| - \right. \\ & \left. - (E + 2iF) (\nabla \Psi)^2 \frac{\bar{\Psi}}{\Psi} - (E - 2iF) (\nabla \bar{\Psi})^2 \frac{\Psi}{\bar{\Psi}} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь в дополнение к стандартной линейной дисперсии второй член представляет собой вклад от квантового потенциала в виде меры Фишера [13]. Линейное уравнение Шредингера с таким членом было изучено Ауберсоном и Сабатьером [14]. НУШ с таким членом было выведено для гравитации Джакива–Тейтельбаума в работах [6], [15], [16] и в физике плазмы в работе [17]. Последние два члена были введены для гамильтонова обобщения НУШ, предложенного Маломедом и Стенфло [18], а их резонансное поведение изучалось в работе [19].

Если мы диагонализуем дисперсионный член (8), то для эллиптического случая $g = EG - F^2 > 0$ получим обычную линейную дисперсию

$$H_0 = \int d^3x \left(\frac{\rho \mathbf{V}_c^2}{2} + \frac{\rho \mathbf{V}_q^2}{2} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla \bar{\psi} \nabla \psi, \quad (10)$$

а для гиперболического случая $g = EG - F^2 < 0$ – нелинейную дисперсию

$$K_0 = \int d^3x \left(\frac{\rho \mathbf{V}_c^2}{2} - \frac{\rho \mathbf{V}_q^2}{2} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x (\nabla \bar{\psi} \nabla \psi - 2 \nabla |\psi| \nabla |\psi|), \quad (11)$$

где $\psi = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$ и

$$\frac{\rho \mathbf{V}_q^2}{2} = \nabla \sqrt{\rho} \nabla \sqrt{\rho} = \frac{1}{4} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho}. \quad (12)$$

1.3. Масштабное преобразование как гиперболический поворот дисперсии. Здесь мы рассмотрим растяжение пространственных координат в применении к вышеупомянутой дисперсии. Масштабное преобразование пространственных координат $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = e^{-\alpha/2} \mathbf{x}$, примененное к плотности вероятности $\rho(\mathbf{x})$, из-за условия нормировки означает [20]

$$\rho \rightarrow \rho'(x') = e^{\beta/2} \rho(e^{\alpha/2} x'), \quad (13)$$

где $\beta = \alpha$ для пространственной размерности $d = 1$ и $\beta = 3\alpha$ для $d = 3$. Из инвариантности уравнений Гамильтона–Якоби следует

$$S(x) \rightarrow S'(x') = e^{-\alpha} S(e^{\alpha/2} x'). \quad (14)$$

Благодаря этим выражениям скорости преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{V}_c(x) = e^{\alpha/2} \mathbf{V}'_c(x'), \quad \mathbf{v}_q(x) = e^{-\alpha/2} \mathbf{V}'_q(x'). \quad (15)$$

В результате получим гиперболический поворот

$$H_0 = H'_0 \operatorname{ch} \alpha + K'_0 \operatorname{sh} \alpha, \quad (16)$$

$$K_0 = K'_0 \operatorname{ch} \alpha + H'_0 \operatorname{sh} \alpha, \quad (17)$$

содержащий как эллиптическую, так и гиперболическую дисперсию (10), (11). Добавляя нелинейный член к этим дисперсиям, введем два гамильтониана:

$$H = \int d^3x \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - \frac{\Lambda}{8} |\psi|^4 \right] \quad (18)$$

и

$$K = \int d^3x \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - \frac{\hbar^2}{m} |\nabla |\psi||^2 - \frac{\Lambda}{8} |\psi|^4 \right]. \quad (19)$$

Они генерируют эволюцию по двум временам t и τ :

$$i\hbar\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \bar{\psi}}, \quad i\hbar\psi_\tau = \frac{\delta K}{\delta \bar{\psi}}, \quad (20)$$

согласно НУШ

$$i\hbar\psi_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\Lambda}{4} |\psi|^2 \psi = 0 \quad (21)$$

и РНУШ

$$i\hbar\psi_\tau + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\Lambda}{4} |\psi|^2 \psi = 2 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\psi|}{|\psi|} \psi \quad (22)$$

соответственно. Тогда масштабное преобразование действует на эти дуальные гамильтонианы как лоренцево преобразование буста:

$$H(\Lambda) = H'(\Lambda') \operatorname{ch} \alpha + K'(\Lambda') \operatorname{sh} \alpha, \quad (23)$$

$$K(\Lambda) = K'(\Lambda') \operatorname{ch} \alpha + H'(\Lambda') \operatorname{sh} \alpha, \quad (24)$$

где $\Lambda' = \Lambda e^{-3\alpha/2}$ для $d = 1$ и $\Lambda' = \Lambda e^{-5\alpha/2}$ для $d = 3$.

1.4. РНУШ. В одномерном пространстве уравнение (21) – просто кубическое НУШ, интегрируемое при любом знаке константы связи Λ [21]. Дуальное уравнение (22) является РНУШ ($\hbar = 1$, $m = 1/2$):

$$i\psi_\tau + \psi_{xx} + \frac{\Lambda}{4} |\psi|^2 \psi = s \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \psi \quad (25)$$

при $s = 2$ [6]. Для такого значения $s > 1$ оно сводится не к обычному НУШ, а к системе реакции-диффузии (РД) [15]. В этом случае в модели обнаруживается

явление солитонного резонанса [6], [16]. Для $s > 1$, подставляя $\psi = e^{R-iS}$ и переходя к $e^+ = e^{R+S}$, $-e^- = e^{R-S}$, получим после некоторого перемасштабирования следующую систему:

$$-\frac{\partial e^+}{\partial t} + \frac{\partial^2 e^+}{\partial x^2} + \frac{\Lambda}{4} e^+ e^- e^+ = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial e^-}{\partial t} + \frac{\partial^2 e^-}{\partial x^2} + \frac{\Lambda}{4} e^+ e^- e^- = 0. \quad (27)$$

Форма Маделунга для этой системы ($\Lambda = -2$, $\rho = 1 + \beta^2$),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (29)$$

описывает распространение длинных магнитоакустических волн в холодной плазме с плотностью ρ , движущейся со скоростью u поперек магнитного поля [17].

Ниже мы покажем, что РНУШ (25) допускает еще одно немаделунгово гидродинамическое представление в виде системы БК и классической системы Буссинеска [22], [23], которые наглядно описывают распространение волн на воде в длинном узком канале.

2. СВЯЗАННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Система (26), (27) означает наличие закона сохранения

$$\rho_t = (\rho(\ln e^+)_x - \rho(\ln e^-)_x)_x, \quad (30)$$

где плотность $\rho = -e^+ e^-$. Используя тождество $\rho_x = \rho(\ln e^+)_x + \rho(\ln e^-)_x$, можно исключить одну из скоростей и получить уравнения непрерывности для ρ , в которые входит только поле e^+ или e^- . Тогда, комбинируя с формулами (26) или (27), получим независимую систему для e^+ и ρ :

$$-e_t^+ + e_{xx}^+ - \frac{\Lambda}{4} \rho e^+ = 0, \quad (31)$$

$$\rho_t + \rho_{xx} = (2\rho(\ln e^+)_x)_x, \quad (32)$$

и аналогичную систему для e^- и ρ с отраженным временем $t \rightarrow -t$. Первая система описывает уравнение теплопроводности с “потенциалом” ρ и уравнение непрерывности, а вторая представляет собой систему с обратным уравнением теплопроводности. Эти две системы связаны преобразованиями $t \rightarrow -t$ и $e^\pm \rightarrow e^\mp$.

Система допускает редукцию $\rho \equiv 0$, которая сводит ее к уравнению теплопроводности. Тогда простейшее решение уравнения теплопроводности влечет за собой решение системы (31), (32) $e^+ = e^{v^2 t/4 - vx/2}$, $\rho = 0$. Его следует сравнить со следующим двухпараметрическим диссипатонным решением:

$$e^+ = \left(\frac{8}{-\Lambda} \right)^{1/2} \frac{k e^{k^2 t}}{\text{ch } k(x - vt - x_0)} e^{v^2 t/4 - vx/2}, \quad (33)$$

$$\rho = \frac{8}{-\Lambda} \frac{k^2}{\operatorname{ch}^2 k(x - vt - x_0)}. \quad (34)$$

Здесь плотность ρ представляет собой солитон в виде бегущей волны, а для e^+ получим диссипативный солитон с зависящей от времени амплитудой.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА

Поделив (31) на e^+ и введя нелинейную замену переменных $A^+(x, t) = 2 \ln e^+(x, t)$, аналогичную той, которую впервые ввел Шредингер в 1926 г. [24], мы получим из системы (31), (32) эквивалентную систему

$$-A_t^+ + \frac{1}{2}(A_x^+)^2 + A_{xx}^+ - \frac{\Lambda}{2}\rho = 0, \quad (35)$$

$$\rho_t + \rho_{xx} = (\rho A_x^+)_x. \quad (36)$$

Уравнение (35) хорошо известно в теории оптимального стохастического контроля для непрерывных процессов Маркова, и в этом контексте оно называется уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) [25]. Это уравнение динамического программирования, решение которого является минимумом некоторого функционала действия. В нашем случае мы имеем уравнение ГЯБ (35), связанное с уравнением непрерывности (36). Систему (35), (36) можно написать в виде уравнения Эйлера–Лагранжа с вариационным функционалом $S = \iint L dx dt$ и лагранжевой плотностью

$$L = \frac{1}{2}\rho(A_t^+ - A_{xx}^+) - \frac{1}{4}\rho(A_x^+)^2 + \frac{\Lambda}{8}\rho^2. \quad (37)$$

Для одного диссипативного солитона (33) имеем следующее решение системы:

$$A^+ = \left(k^2 + \frac{1}{2}v^2\right)t - vx - 2 \ln[\operatorname{ch} k(x - vt - x_0)] + \ln\left(\frac{8\sqrt{k}}{-\Lambda}\right) \quad (38)$$

и ρ из (34).

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БК

Уравнение теплопроводности естественным образом связано с уравнением Бюргера с помощью преобразования Коула–Хопфа. Это преобразование предполагает введение поля скорости $v^+ = (\ln e^+)_x$, т.е. скорости дрейфа, так что система (31), (32) приобретает вид

$$v_t^+ = \left(v_x^+ + (v^+)^2 - \frac{\Lambda}{4}\rho\right)_x, \quad (39)$$

$$\rho_t + \rho_{xx} = (2\rho v^+)_x. \quad (40)$$

Эта система известна как система БК [22], [23]. При $v^- = (\ln e^-)_x$ возникает система анти-БК с отраженным временем $t \rightarrow -t$. При $\rho = 0$ эти системы сводятся к уравнению Бюргера и к уравнению анти-Бюргера соответственно.

При $\rho \neq 0$ из диссипативного решения (33) мы получим ударный солитон

$$v^+ = -\frac{v}{2} - k \operatorname{th} k(x - vt - x_0) \quad (41)$$

и солитон (34) системы (39), (40).

5. КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУССИНЕСКА

Уравнение (39) можно представить в форме Эйлера. Вводя функцию “давление” $p^+ = -\Lambda\rho/4 + v_x^+$, из системы (39), (40) получим классическую систему Буссинеска

$$-v_t^+ + 2v^+v_x^+ = -p_x^+, \quad (42)$$

$$p_t^+ = v_{xx}^+ + (2p^+v^+)_x. \quad (43)$$

Аналогично, вводя $p^- = -\Lambda\rho/4 + v_x^-$, получим классическую систему анти-Буссинеска с отраженным временем.

6. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА И СОЛИТОНЫ

Выразим две действительные функции e^+ , e^- через три действительные функции g^+ , g^- , и f , $e^\pm = g^\pm \sqrt{8/(-\Lambda)}/f$, и рассмотрим следующую билинейную систему уравнений:

$$(\pm D_t - D_x^2)(g^\pm \cdot f) = 0, \quad (44)$$

$$D_x^2(f \cdot f) = -2g^+g^-. \quad (45)$$

Любое решение уравнений (44), (45) с

$$\rho = \left(\frac{8}{-\Lambda} \right) \frac{g^+g^-}{f^2} = \left(\frac{8}{-\Lambda} \right) (\ln f)_{xx} \quad (46)$$

порождает решение системы (31), (32).

Решение системы БК (39), (40) имеет вид

$$v^+ = \frac{D_x(g^+ \cdot f)}{g^+f} = \left(\ln \frac{g^+}{f} \right)_x. \quad (47)$$

Решение классической системы Буссинеска (42), (43) имеет вид

$$p^+ = (\ln(g^+f))_x, \quad v^+ = \left(\ln \frac{g^+}{f} \right)_x. \quad (48)$$

6.1. Одно- и двухсолитонные решения. Односолитонное решение системы (44), (45) задано следующими формулами: $g^\pm = \pm e^{\eta_1^\pm}$, $f = 1 + e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \phi_{1,1}}$, $e^{\phi_{1,1}} = (k_1^+ + k_1^-)^{-2}$, где $\eta_1^\pm \equiv k_1^\pm x \pm (k_1^\pm)^2 t + \eta_1^{\pm(0)}$, а $k_1^\pm$, $\eta_1^{\pm(0)}$ – постоянные. Оно представляет собой кинк-солитонное решение для v^+ (39), (40)

$$v^+ = \frac{k_1^+ - k_1^-}{2} - \frac{k_1^+ + k_1^-}{2} \operatorname{th} \frac{\eta_1^+ + \eta_1^- + \phi_{11}}{2} \quad (49)$$

и обычный солитон для плотности ρ (см. рис. 1, 2):

$$\rho = \frac{2}{-\Lambda} \frac{(k_1^+ + k_1^-)^2}{\operatorname{ch}^2((\eta_1^+ + \eta_1^- + \phi_{11})/2)}. \quad (50)$$

Вводя параметры $k \equiv (k_1^+ + k_1^-)/2$, $v \equiv -(k_1^+ - k_1^-)$, получим решение (41).

Рис. 1. Форма доменной стенки для поля скоростей v^+ . Рис. 2. Форма солитона для поля плотности ρ .

Для классической системы Буссинеска (42), (43) имеем кинк-солитон

$$p^+ = \left(2k - \frac{v}{2}\right) + k \operatorname{th} k(x - vt - x_0). \quad (51)$$

Для двухсолитонного решения имеем

$$g^\pm = \pm \left[e^{\eta_1^\pm} + e^{\eta_2^\pm} + \left(\frac{\check{k}_{12}^{\pm\pm}}{k_{21}^{\pm\mp} k_{11}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^\pm} + \left(\frac{\check{k}_{12}^{\pm\pm}}{k_{12}^{\pm\mp} k_{22}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_2^+ + \eta_2^- + \eta_1^\pm} \right], \quad (52)$$

$$f = 1 + \frac{e^{\eta_1^+ + \eta_1^-}}{(k_{11}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_1^+ + \eta_2^-}}{(k_{12}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_2^+ + \eta_1^-}}{(k_{21}^{+-})^2} + \frac{e^{\eta_2^+ + \eta_2^-}}{(k_{22}^{+-})^2} + \\ + \left(\frac{\check{k}_{12}^{++} \check{k}_{12}^{--}}{k_{12}^{+-} k_{21}^{+-} k_{11}^{+-} k_{22}^{+-}} \right)^2 e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^+ + \eta_2^-}, \quad (53)$$

где $k_{ij}^{ab} \equiv k_i^a + k_j^b$, $\check{k}_{ij}^{ab} \equiv k_i^a - k_j^b$, $\eta_i^\pm \equiv k_i^\pm x \pm (k_i^\pm)^2 t + \eta_i^{\pm(0)}$. Это решение демонстрирует резонансный характер взаимодействия солитонов (см. рис. 3, 4.).

Рис. 3. Поле скоростей для двух солитонов v^+ , $k_1^+ = 0.5$, $k_1^- = 0.9$, $k_2^+ = 0.1$, $k_2^- = 0.35$.

Рис. 4. Резонанс четырех солитонов поля плотности ρ , $k_1^+ = 2$, $k_1^- = 1$, $k_2^+ = 1$, $k_2^- = 2$, $d = 16$.

6.2. Редукция Бюргера. Скорость v^+ для системы БК в форме Хироты имеет вид $v^+ = g_x^+/g^+ - f_x/f$ (см. (47)). Если $g^+ = \text{const}$, то $v^+ = -(\ln f)_x$, что означает ограничение $v_x^+ = (\Lambda/8)\rho$. При этой редукции система БК сводится к уравнению Бюргера:

$$v_t^+ - 2v^+v_x^+ + v_{xx}^+ = 0. \quad (54)$$

При этом первое билинейное уравнение (44) сводится к уравнению теплопроводности

$$f_t - f_{xx} = 0, \quad (55)$$

и формула $v^+ = -(\ln f)_x$, приведенная выше, является обычным преобразованием Коула–Хопфа. На уровне односолитонного решения с $k_1^+ = 0$ оно приводит к про-

стому решению Бюргерса в виде ударного солитона. Следовательно, для двухсолитонного случая, полагая $k_1^+ = 0$, $k_2^+ = 0$, получим два ударных солитона:

$$v^+ = -\frac{(2/k_1^-)e^{\eta_1^-} + (2/k_2^-)e^{\eta_2^-}}{1 + (2/(k_1^-)^2)e^{\eta_1^-} + (2/(k_2^-)^2)e^{\eta_2^-}}. \quad (56)$$

Это решение описывает слияние двух ударных солитонов.

7. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Здесь мы найдем интегралы движения для системы БК (39), (40) с убывающими граничными условиями $\rho \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Первым интегралом движения будет масса, он следует из уравнения (40):

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx. \quad (57)$$

Закон сохранения импульса

$$(\rho v^+)_t = \left(\rho v_x^+ - \rho_x v^+ + 2\rho(v^+)^2 - \frac{\Lambda}{8}\rho^2 \right)_x \quad (58)$$

означает наличие интеграла импульса:

$$P^+ = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho v^+ dx. \quad (59)$$

Закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} (\rho(v^+)^2 - \rho_x v^+ - \frac{\Lambda}{8}\rho^2)_t = \\ = \left(-3\rho_x(v^+)^2 + 2\rho(v^+)^3 + \rho_{xx}v^+ - \rho_x v_x^+ - \frac{\Lambda}{2}\rho^2 v^+ + \frac{\Lambda}{4}\rho\rho_x \right)_x \end{aligned}$$

порождает интеграл энергии

$$E^+ = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(v^+)^2 + \rho v_x^+ - \frac{\Lambda}{8}\rho^2 \right) dx. \quad (60)$$

После подстановки Хироты получим

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \frac{8}{-\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (\ln f)_{xx} dx = \frac{8}{-\Lambda} (\ln f)_x|_{-\infty}^{\infty}. \quad (61)$$

Для односолитонного решения имеем массу

$$M = \frac{8}{-\Lambda} |k_1^+ + k_1^-|, \quad (62)$$

импульс

$$P^+ = \frac{8}{-\Lambda} |k_1^+ + k_1^-| (k_1^- - k_1^+) = Mv, \quad (63)$$

где $v = k_1^- - k_1^+$, и энергию

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\Lambda^2}{384}M^3. \quad (64)$$

Условия резонанса $M = M_1 + M_2$, $P = P_1 + P_2$, $E = E_1 + E_2$, вычисленные с помощью этих интегралов, приводят к ограничению на скорости

$$|v_1 - v_2| = -\frac{\Lambda}{8}(M_1 + M_2), \quad (65)$$

которое сводит двухсолитонное решение (53) к односолитонному.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Введем псевдориманову метрику через скорости дрейфа [6]:

$$g_{00} = \rho v^+ v^-, \quad g_{11} = -\rho, \quad g_{01} = \frac{1}{2}\rho(v^- - v^+). \quad (66)$$

Для системы РД эта метрика описывает псевдориманову поверхность постоянной скалярной кривизны $R = \Lambda$. При нулевой скорости дрейфа $v^+(x, t) = 0$ или $v^-(x, t) = 0$ она порождает сингулярность на горизонте событий и создает картину типа черной дыры [26]. Эту метрику можно записать в терминах гидродинамики БК. Для (39), (40)

$$g_{00} = v^+(\rho_x - \rho v^+), \quad g_{11} = -\rho, \quad g_{01} = \frac{1}{2}\rho_x - \rho v^+. \quad (67)$$

На горизонте $g_{00} = 0 \rightarrow v^+ = 0$ или $\rho_x = \rho v^+$, так что для односолитонного решения получим

$$\text{th } k(x - vt - x_0) = \mp \frac{v}{2k}, \quad (68)$$

что при $|v| < 2|k|$ допускает два горизонта. Условие на горизонте $v^+ = \phi_x = 0$ предполагает экстремум потенциала скорости ϕ .

9. ТРЕТИЙ ПОТОК ИЕРАРХИИ РД И ВЫСШАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Система РД является вторым потоком иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура в $SL(2, R)$ [27]. Для третьего потока иерархии имеем

$$e_t^+ = e_{xxx}^+ + \frac{3\Lambda}{4}e^+e^-e_x^+, \quad (69)$$

$$e_t^- = e_{xxx}^- + \frac{3\Lambda}{4}e^+e^-e_x^-. \quad (70)$$

Придерживаясь той же процедуры, что и для системы РД, мы получим новую систему, написанную через гидродинамические переменные $v^+ = (\ln e^+)_x$ и $\rho = e^+ e^-$:

$$v_t^+ = \left(v_{xx}^+ + 3v^+ v_x^+ + (v^+)^3 + \frac{3\Lambda}{4} \rho v^+ \right)_x, \quad (71)$$

$$\rho_t = \left(\rho_{xx} - 3\rho_x v^+ + 3\rho (v^+)^2 + \frac{3\Lambda}{8} \rho^2 \right)_x. \quad (72)$$

В частном случае $v^+ = 0$ она сводится к уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ). В другом частном случае $\rho = 0$ эта система сводится к следующей модификации уравнения КдФ, которая в точности совпадает с третьим потоком иерархии Бюргера:

$$v_t^+ = v_{xxx}^+ + 3(v^+)^2 v_x^+ + (3v^+ v_x^+)_x. \quad (73)$$

Подставляя $e^\pm = g^\pm \sqrt{8/(-\Lambda)}/f$, получим

$$(D_t + D_x^3)(g^\pm \cdot f) = 0, \quad (74)$$

$$D_x^2(F \cdot F) = -2g^+ g^-. \quad (75)$$

При этом решение системы имеет вид

$$v^+ = \frac{g_x^+}{g^+} - \frac{f_x}{f}, \quad \rho = \frac{8}{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F. \quad (76)$$

В качестве односолитонного решения получим кинк

$$v^+ = \sqrt{\frac{4v^2 - k^2}{12}} - \frac{k}{2} \operatorname{th} \frac{k}{2} (x - vt - x_0) \quad (77)$$

и солитон

$$\rho = \frac{8}{4\Lambda} \frac{k^2}{\operatorname{ch}^2(k/2)(x - vt - x_0)}, \quad (78)$$

где $k = k_1^+ + k_1^-$, $v = (k_1^+)^2 - k_1^+ k_1^- + (k_1^-)^2$. Последнее выражение означает ограничение на скорость солитона $|v| > |k|/4$.

10. КВАНТОВАЯ ЖИДКОСТЬ БК

В этом разделе мы покажем, что НУШ можно представить в виде новой гидродинамической системы БК с квантовым потенциалом. Это представление является альтернативным известному представлению Маделунга для НУШ. Если в НУШ

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{\Lambda}{4} |\psi|^2 \psi = 0 \quad (79)$$

с помощью подстановки Маделунга $\psi = e^{R-iS}$ ввести плотность $\rho = |\psi|^2$, скорость центра масс или потока $V = -2S_x$ и квантовую, или осмотическую, скорость $V_Q = 2R_x$, то в терминах ρ и V можно получить НУШ в представлении жидкости Маделунга. В отличие от этого мы введем скорости дрейфа $v^+ = (V_Q - V)/2$ и $v^- = (V_Q + V)/2$. Тогда можно переписать НУШ через v^+ и ρ в виде системы

$$v_t^+ = \left(v_x^+ + (v^+)^2 - \frac{\Lambda}{4} \rho - 2 \frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right)_x, \quad (80)$$

$$\rho_t + \rho_{xx} = (2\rho v^+)_x \quad (81)$$

и в виде аналогичной системы (но с обращенным временем), написанной через v^- и ρ . Эти новые уравнения можно считать квантованными системами БК.

11. МОДИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА БК

Здесь мы рассмотрим следующую деформацию МНУШ-1,2 ($\epsilon = \pm 1$) [28]:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\gamma^2 |\psi|^2 \psi - i\mu_0(\epsilon + 1)(\bar{\psi}\psi^2)_x + i\mu_0(\epsilon - 1)(\bar{\psi}\psi)\psi_x = 2 \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \psi. \quad (82)$$

При $\mu_0 = 0$ оно сводится к РНУШ, а при $\gamma = 0$ – к резонансному дифференцированному НУШ, МНУШ-1 при $\epsilon = 1$ и МНУШ-2 при $\epsilon = -1$. Разлагая комплексную функцию $\psi = e^{R-iS}$ и вводя пару действительных функций $e^\pm = e^{R \pm S}$, мы получим модифицированные системы РД-1,2 ($\epsilon = \pm 1$)

$$\mp e_t^\pm + e_{xx}^\pm - 2\gamma^2 e^+ e^- e^\pm \pm \mu_0(\epsilon + 1)(e^+ e^- e^\pm)_x \mp \mu_0(\epsilon - 1)(e^+ e^-) e_x^\pm = 0. \quad (83)$$

Далее, вводя плотность $\rho = e^+ e^-$ и скорость $v^+ = (\ln e^+)_x$, мы получим новую модифицированную систему БК

$$v_t^+ = (v_x^+ + (v^+)^2 - 2\gamma\rho + \mu_0(\epsilon + 1)\rho_x + 2\mu_0\rho v^+)_x, \quad (84)$$

$$\rho_t + \rho_{xx} = (2\rho v^+ + \mu_0(\epsilon + 2)\rho^2)_x. \quad (85)$$

Если $\mu_0 = 0$, то эта система сводится к системе БК (39), а если $\gamma = 0$, то она сводится к другой паре модифицированных систем БК, зависящих от ϵ .

Заменяя функции $e^\pm$ на $E^\pm$ согласно формулам

$$e^\pm = E^\pm \exp \left\{ \mp \mu_0(\epsilon + 1) \int_{-\infty}^x E^+ E^- dx' \right\} \quad (86)$$

и представляя $E^\pm = g^\pm / f^\pm$ через четыре действительные функции $g^\pm, f^\pm$, получим билинейное представление для модифицированных систем РД-1,2:

$$\begin{aligned} (D_t \mp D_x^2)(g^\pm \cdot f^\pm) &= 0, \\ D_x^2(f^+ \cdot f^-) &= (\mu_0 D_x - 2\gamma^2)(g^+ \cdot g^-), \\ D_x(f^+ \cdot f^-) &= -\mu_0 \epsilon g^+ g^-. \end{aligned} \quad (87)$$

Односолитонное решение МНУШ в квантовом потенциале или, аналогично, решение в виде одного диссипативного солитона для МРД определяется следующим решением уравнений (87): $g^\pm = e^{\eta^\pm}$, $f^\pm = 1 + e^{\phi^\pm} e^{\eta^+ + \eta^-}$, где $\eta^\pm = k^\pm x \pm (k^\pm)^2 t + \eta_0^\pm$ и

$$e^{\phi^\pm} = \frac{\mp \mu_0 [k^\pm (\epsilon - 1) + k^\mp (\epsilon + 1)] - 2\gamma^2}{2(k^+ + k^-)^2}. \quad (88)$$

Чтобы обеспечить регулярность этого решения, мы ограничим параметры $k^+ > \gamma^2/\mu_0$ и $k^- < -\gamma^2/\mu_0$. Тогда скорость нашего солитона $v = k^- - k^+$ будет находиться в области $v < -(|k| + 2\gamma^2/\mu_0)$. Для поля скорости получим ударный солитон

$$v^+ = -\frac{v}{2} - k \operatorname{th} k(x - vt - x_0). \quad (89)$$

Соответствующая плотность имеет вид

$$\rho = \frac{k^2/\mu_0}{\sqrt{(v + 2\gamma^2/\mu_0)^2 - k^2 \operatorname{ch} k(x - vt - x_0) - (v + 2\gamma^2/\mu_0)}}. \quad (90)$$

Благодарности. Работа поддержана TUBITAK, проектом TBAG № 110T679 и Izmir Institute of Technology.

Список литературы

- [1] E. Madelung, *Naturwiss.*, **14**:45 (1926), 1004–1004; *Zeitschr. f. Phys.*, **40**:3–4 (1926), 322–326.
- [2] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**:2 (1952), 166–179; 180–193.
- [3] Р. Фейнман (1967), *Фейнмановские лекции по физике*, т. 8: *Квантовая механика*, Мир, М., 1967.
- [4] S. Jin, C.D. Levermore, D.W. McLaughlin, *Commun. Pure Appl. Math.*, **52**:5 (1999), 613–654.
- [5] J.-H. Lee, C.-K. Lin, O.K. Pashaev, *Chaos, Solitons Fractals*, **19**:1 (2004), 109–128.
- [6] O.K. Pashaev, J.-H. Lee, *Mod. Phys. Lett. A*, **17**:24 (2002), 1601–1619, arXiv: hep-th/9810139.
- [7] J. Matsukidaira, J. Satsuma, W. Strampp, *Phys. Lett. A*, **147**:8–9 (1990), 467–471.
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.
- [9] F. Calogero, “C-integrable nonlinear partial differential equations”, *Important Developments in Soliton Theory*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 33–37.
- [10] J.D. Cole, *Q. Appl. Math.*, **9** (1951), 225–236.
- [11] E. Hopf, *Commun. Pure Appl. Math.*, **3**:3 (1950), 201–230.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 1: *Механика*, 3 изд., Наука, М., 1973.
- [13] R.R. Parwani, O.K. Pashaev, *J. Phys. A*, **41**:23 (2008), 235207, 18 pp.
- [14] G. Auberson, P.C. Sabatier, *J. Math. Phys.*, **35**:8 (1994), 4028–4040.
- [15] O.K. Pashaev, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **57**:1–3 (1997), 338–341.
- [16] O.K. Pashaev, J.-H. Lee, *ANZIAM J.*, **44**:1 (2002), 73–81.
- [17] J.-H. Lee, O.K. Pashaev, C. Rogers, W.K. Schieff, *J. Plasma Phys.*, **73**:2 (2007), 257–272.
- [18] B.A. Malomed, L. Stenflo, *J. Phys. A*, **24**:19 (1991), L1149–L1153.
- [19] O.K. Pashaev, J.-H. Lee, C. Rogers, *J. Phys. A*, **41**:45 (2008), 452001, 9 pp.

- [20] L. Brenig, *J. Phys. A*, **40**:17 (2007), 4567–4584, arXiv: gr-qc/0610142.
- [21] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1972), 118–134.
- [22] L. J. F. Broer, *Appl. Sci. Res.*, **31**:5 (1975), 377–395.
- [23] D. J. Kaup, *Progr. Theor. Phys.*, **54**:2 (1975), 396–408.
- [24] E. Schrödinger, *Annal. Phys.*, **384**:4 (1926), 361–376.
- [25] Р. Беллман, *Динамическое программирование*, ИЛ, М., 1960.
- [26] L. Martina, O. K. Pashaev, G. Soliani, *Class. Quantum Grav.*, **14**:12 (1997), 3179–3186, arXiv: hep-th/9710140; *Phys. Rev. D*, **58**:8 (1998), 084025, 13 pp.
- [27] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Studies Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [28] J.-H. Lee, O. K. Pashaev, “Bilinear representation for the modified nonlinear Schrödinger equations and their quantum potential deformations”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II*, Proceedings of the Workshop (Gallipoli, Italy, 27 June –6 July, 2002), eds. M. J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari, World Scientific, Singapore, 2003, 79–82.