Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Конт, Туэнь-Вай Нь, Выявление и построение эллиптического решения комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау с потенциалом в виде кубики-квинтики, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 224–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:23:15

© 2012 г.

Р. Конт^{*†}, Туэнь-Вай Нь[†]

ВЫЯВЛЕНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ С ПОТЕНЦИАЛОМ В ВИДЕ КУБИКИ-КВИНТИКИ

В случае уравнений движения для комплексных амплитуд оказывается, что уравнения для фазы намного сложнее, чем для амплитуды. Тем не менее общие методы должны быть применимы для обеих переменных. На примере редукции комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау для потенциала в виде кубики-квинтики с помощью движущихся волн показано, как преодолеваются трудности, возникающие при использовании двух методов: 1) критерия равенства нулю суммы вычетов эллиптического решения; 2) построения дифференциального уравнения, допускающего данное уравнение как дифференциальное следствие (метод подуравнений).

Ключевые слова: эллиптические решения, критерий вычетов, метод подуравнений, комплексное решение Гинзбурга–Ландау с потенциалом в виде кубики-квинтики.

1. ВВЕДЕНИЕ. МОДУЛЬ И ФАЗА В УРАВНЕНИЯХ АМПЛИТУДЫ

Уравнение движения $A_t + \dots = 0$ для комплексной амплитуды $A(x, t)$ обычно, по физическому смыслу, оказывается инвариантным относительно произвольных фазовых сдвигов $\varphi = \arg A$, где M и φ обозначают модуль и фазу, $A = Me^{i\varphi}$. Как следствие, переменная φ входит в систему двух уравнений в частных производных для (M, φ) только через свои производные. Тогда при редукции к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ), такой как редукция с помощью бегущих волн

$$M \rightarrow \widetilde{M}(\xi), \quad \varphi \rightarrow -i\omega t + \widetilde{\varphi}(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (1)$$

старший порядок дифференцирования для переменной ψ в системе двух ОДУ для $(\widetilde{M}, \psi = \widetilde{\varphi}')$ оказывается на один меньше, чем для M . Следовательно, ОДУ для

^{*}LRC MESO, Centre de mathématiques et de leurs applications et CEA-DAM, École normale supérieure de Cachan, Cachan, France. E-mail: Robert.Conte@cea.fr

[†]Department of Mathematics, Faculty of Science, The University of Hong Kong, Hong Kong. E-mail: ntw@maths.hku.hk

переменной ψ , получаемое исключением M , будет намного сложнее (и по объему, и по структуре особенностей), чем ОДУ для M , получаемое исключением ψ .

Возьмем для примера одномерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау для потенциала в виде кубики-квинтики (КГЛ5)

$$iA_t + pA_{xx} + q|A|^2A + r|A|^4A - i\gamma A = 0, \quad (A, p, q, r) \in \mathbb{C}, \quad pr \neq 0, \quad \text{Im}(r/p) \neq 0, \quad (2)$$

зависящее от семи вещественных параметров, поскольку γ можно выбрать вещественным (сводку результатов о КГЛ5 см. в обзорах [1], [2]). Его редукция с помощью бегущих волн

$$A(x, t) = \sqrt{M(\xi)} e^{i(-\omega t + \varphi(\xi))}, \quad \xi = x - ct, \quad (c, \omega, M, \varphi) \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\frac{M''}{2M} - \frac{M'^2}{4M^2} + i\varphi'' - \varphi'^2 + i\varphi' \frac{M'}{M} - i \frac{c}{2p} \frac{M'}{M} + \frac{c}{p} \varphi' + \frac{q}{p} M + \frac{r}{p} M^2 + \frac{\omega - i\gamma}{p} = 0 \quad (4)$$

добавляет две вещественные постоянные (c, ω) , но общее количество вещественных параметров (девять) можно уменьшить до семи, сдвинув φ' и заметив [2], что скорость c и мнимая часть $1/p$ входят в уравнения только в виде произведения. Действительно, после обозначения восьми вещественных параметров как $e_r, e_i, d_r, d_i, s_r, s_i, g_r, g_i$,

$$\begin{aligned} e_r + ie_i &= \frac{r}{p}, & d_r + id_i &= \frac{q}{p}, & s_r - is_i &= \frac{1}{p}, \\ g_r + ig_i &= \frac{\gamma + i\omega}{p} + \frac{c^2 s_r}{4} (2s_i + is_r), \end{aligned} \quad (5)$$

и сдвига

$$\varphi' = \frac{cs_r}{2} + \psi \quad (6)$$

система зависит только от семи вещественных параметров $e_r, e_i, d_r, d_i, g_r, g_i, cs_i \equiv \kappa_i$.

Старшими производными в системе двух уравнений в вещественных переменных (M, ψ)

$$\begin{aligned} \frac{M''}{2M} - \frac{M'^2}{4M^2} - \kappa_i \frac{M'}{2M} - \psi^2 + e_r M^2 + d_r M + g_i &= 0, \\ \psi' + \psi \frac{M'}{M} - \kappa_i \psi + e_i M^2 + d_i M - g_r &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

являются M'' и ψ' . Ниже мы воспользуемся следующей инвариантностью четности уравнения (7):

$$q = 0 : \quad (M, \psi, \xi) \rightarrow (-M, \psi, \xi), \quad (8)$$

$$\kappa_i = 0 : \quad (M, \psi, \xi) \rightarrow (M, -\psi, -\xi). \quad (9)$$

Исключая ψ , получаем для M одно вещественное ОДУ третьего порядка второй степени [3]

$$\psi = \frac{2\kappa_i G - G'}{2M^2(e_i M^2 + d_i M - g_r)}, \quad \psi^2 = \frac{G}{M^2}, \quad (10)$$

$$(G' - 2\kappa_i G)^2 - 4GM^2(e_i M^2 + d_i M - g_r)^2 = 0, \quad (11)$$

$$G = \frac{1}{2} M M'' - \frac{1}{4} M'^2 - \frac{\kappa_i}{2} M M' + e_r M^4 + d_r M^3 + g_i M^2, \quad (12)$$

а исключая M , получим для ψ ОДУ третьего порядка четвертой степени с 11053 членами, выпишем его доминантные члены (в смысле особенностей, см. построения в разделе 2):

$$\begin{aligned} e_i^6 \psi^4 \{ & [25e_i^3 \psi^2 \psi''' - 10e_i^2 (3e_i \psi' + 4e_r \psi^2) \psi \psi_2 - 6\psi'^3 e_i^3 - 24e_r e_i^2 \psi'^2 \psi^2 + \\ & + e_i (80e_i^2 - 112e_r^2) \psi^4 \psi' - 32e_r (5e_i^2 + e_r^2) \psi^6]^2 - \\ & - 4[-3e_i^2 \psi'^2 + 12e_r e_i \psi' \psi^2 + 4(5e_i^2 + 2e_r^2) \psi^4]^2 \times \\ & \times [10e_i^2 \psi \psi_2 + e_i^2 \psi'^2 + 16e_r e_i \psi' \psi^2 + 4(5e_i^2 + e_r^2) \psi^4] \}^2 + \\ & + \text{субдоминантные члены} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично в результате исключения переменной рациональное выражение (10) для переменной ψ через M , M' , M'' получается довольно простым, тогда как рациональное выражение для переменной M через ψ включает и третью производную ψ''' и получается довольно длинным. Поэтому фаза комплексной амплитуды A квалифицируется как “подчиненная” переменная [2], так как с ее помощью можно легко вычислить φ из M , но не наоборот.

Цель настоящей работы – объяснить на приведенном выше примере, как обойти трудности, возникающие при рассмотрении ψ в двух конкретных методах.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы изучаем детальную структуру подвижных особенностей функций M и ψ , некоторые свойства которых ранее не отмечались. В разделе 3 мы последовательно применяем первый метод к M и ψ , чтобы построить необходимые условия эллиптичности M и ψ . Это оказывается легко для M , а для ψ возникают дополнительные вопросы, которые мы далее решаем. В разделе 4 мы показываем, как правильно применять второй метод (метод подуравнений [4]–[6]) к M и ψ , чтобы построить ОДУ первого порядка, имеющее общие эллиптические и вырожденные эллиптические решения с ОДУ (11) и (13). В разделе 5 мы просто приводим решение КГЛ5, в котором квадрат модуля M эллиптивен. Его получение методом подуравнений будет описано в последующей работе.

2. ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЕННОСТИ КГЛ5

В этом разделе мы перечислим все подвижные полюсы как M , так и ψ , исключая те, которые представляют собой особые решения¹⁾ либо ОДУ третьего порядка (11) для M , либо ОДУ третьего порядка (13) для ψ .

Структура особенностей уравнения (2) изучалась в работе [8]. Первый вид особенностей $\chi = \xi - \xi_0 \rightarrow 0$ получается балансировкой членов A_{xx} и $|A|^4 A$ в уравнении (2),

$$A \sim A_0 \chi^{(-1/2+i\alpha)}, \quad \bar{A} \sim A_0 \chi^{(-1/2-i\alpha)}, \quad \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right) \left(-\frac{3}{2} + i\alpha\right) p + A_0^4 r = 0, \quad (14)$$

¹⁾ Особое решение [7] ОДУ – это любое решение, которое нельзя получить из общего решения. Подобное решение должно сокращать нечетный множитель кратности дискриминанта ОДУ. Например, ОДУ (11) с дискриминантом $GM^2(e_i M^2 + d_i M - g_r)^2$, где $G = 0$, допускает в качестве особых решений все те, от которых следует отказаться, так как они не являются решениями системы (7).

этими алгебраическими точками ветвления функции A определяются четыре значения A_0^2 и два значения α :

$$(e_i A_0^4)^2 - 4e_r A_0^4 - 3 = 0, \quad \alpha = \frac{e_i}{2} A_0^4, \quad (15)$$

$$A_0^2 = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{2e_r + \varepsilon_1 \Delta}{e_i^2}}, \quad \alpha = \frac{2e_r + \varepsilon_1 \Delta}{2e_i}, \quad \Delta = \sqrt{4e_r^2 + 3e_i^2}, \quad \varepsilon_{1,2}^2 = 1. \quad (16)$$

В этих особенностях у квадрата модуля $M = |A|^2$ появляются четыре простых полюса

$$M \sim m_0 \chi^{-1}, \quad m_0 = A_0^2, \quad (17)$$

и простое исследование ОДУ третьего порядка (11) показывает, что M не допускает других подвижных полюсов²⁾.

Посчитаем теперь полюсы ψ , для этого рассмотрим вещественную систему (7). Первый набор полюсов ψ возникает из простых полюсов M ,

$$M = m_0 \chi_1^{-1} \left[1 + \left(\frac{\kappa_i}{4} + \frac{2d_r m_0 - 2e_i d_i m_0^3}{4(1 + e_i^2 m_0^4)} \right) \chi_1 + O(\chi_1^2) \right], \quad (18)$$

$$\psi = \frac{e_i m_0^2}{2} \chi_1^{-1} + \frac{e_i m_0^2}{8} \kappa_i + m_0 \frac{4d_i + 5e_i d_r m_0^2 - e_i^2 d_i m_0^4}{4(1 + e_i^2 m_0^4)} + O(\chi_1), \quad (19)$$

в которых в силу обеих инвариантностей (8), (9) требуется замена m_0 на $-m_0$. Этим первым набором определяются четыре разных простых полюса ψ при ненулевом q , и только два полюса находятся иначе (в последнем случае M^2 описывается алгебраическим уравнением, допускающим два двойных полюса).

Второй набор полюсов ψ , не рассматривавшийся в работе [8], возникает из подвижных простых нулей M , и его лучше всего вычислять с помощью системы (7):

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} \chi_2^{-1} \left\{ 1 + M_1 \chi_2 + \left[M_1^2 + \kappa_i M_1 - \frac{j}{3} g_r + \frac{2}{3} g_i \right] \chi_2^2 + O(\chi_2^3) \right\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{j}{2} \chi_2^{-1} \left\{ 1 + (\kappa_i + M_1) \chi_2 + \left[M_1^2 + 2\kappa_i M_1 + \frac{2}{3} g_i - \frac{4j}{3} g_r + \frac{5}{6} \kappa_i^2 \right] \chi_2^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[(g_r + j g_i) \kappa_i + \frac{3j \kappa_i^3}{4} - \frac{(3d_i - j d_r) M_0}{4} + \frac{(11j \kappa_i^2 + 4g_r + 4j g_i) M_1}{4} + \right. \\ & \left. \left. + 3j \kappa_i M_1^2 + j M_1^3 \right] \chi_2^3 + O(\chi_2^4) \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где M_0 и M_1 – произвольные постоянные, а j – любой квадратный корень из -1 ($j = \pm i$). Снова в силу обеих инвариантностей (8), (9) требуется заменить M_0 на $-M_0$, с дополнительным условием, что $M_1 = 0$ при $\kappa_i = 0$. Этот второй набор определяет $2N$ простых нулей M и либо $2N$ (при $q \neq 0$), либо N (при $q = 0$) простых полюсов ψ , где N – неопределенное целое число.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае нелинейного уравнения Шредингера (где p вещественно, q вещественно, $r = \gamma = 0$) из первого интеграла $M\psi = \text{const}$ следует, что все полюсы решения ψ соответствуют нулям M .

²⁾Ряд Лорана $M = \pm(3/4 \cdot e_r)^{1/2} \chi^{-1} + \dots$ следует исключить, так как он сокращает G и, таким образом, представляет особое решение.

Мы ищем дополнительные полюсы ψ , прямо исследуя ОДУ третьего порядка (13) для $\psi(\xi)$. Таким образом, мы находим три вида семейств подвижных простых полюсов: два из них только что описаны (вида (19) и (21)), а третий вид состоит из двух семейств

$$\psi = p_0 \chi^{-1} \left[1 + \frac{\kappa_i}{4} + O(\chi) \right], \quad 4(e_r^2 + 5e_i^2)p_0^2 - 16e_r e_i p_0 + 21e_i^2 = 0. \quad (22)$$

Однако этот ряд сокращает множитель дискриминанта уравнения (13) с нечетной кратностью, поэтому это особое решение (13), и его следует исключить, поскольку оно не является решением системы (7).

Таким образом, еще одно различие между M и ψ состоит в разной сложности структур их особенностей: ровно четыре ряда Лорана для M и неизвестное число рядов для ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из двух специальных значений $q = 0$ и $\kappa_i = 0$, приводящих к инвариантности дифференциальной системы (см. (8), (9)), в структуре особенностей участвует только значение $q = 0$. Значение $\kappa_i = 0$ появится в разделах 3 и 5.

3. О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Согласно классическому результату внутри фундаментальной области сумма вычетов любой эллиптической функции в ее полюсах равняется нулю. Это позволило Хону [9] прибегнуть к разложениям Лорана, чтобы сгенерировать следующие необходимые условия невырожденной эллиптичности решения u ОДУ:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad C_{jk}^u \equiv \sum_{\text{ряд Лорана}} \text{Res}((u^{(k)})^j) = 0, \quad (23)$$

где сумма продолжается до любого подмножества множеств рядов Лорана, и, таким образом, выделить параметры, при которых ОДУ может иметь невырожденное эллиптическое решение.

Если предположить, что переменная M эллиптична, то из (10) следует, что ψ тоже эллиптична, так что можно априори воспользоваться рядом Лорана для M или ψ , чтобы получить необходимые условия эллиптичности M и ψ . Однако, как мы уже заметили в разделе 2, ситуация с переменной ψ гораздо сложнее, чем с M . Действительно, некоторые разложения ψ в ряд Лорана (а именно, в окрестности χ_2) зависят от произвольных постоянных, поэтому необходимо сначала вычислить набор различных рядов (21), а затем решить полученные условия на вычеты для этих дополнительных произвольных постоянных. Применим критерий последовательно к переменным M и ψ .

3.1. Критерий вычетов в применении к переменной M . У переменной M есть два преимущества перед ψ : она допускает в точности четыре разложения в ряд Лорана (18) и в эти разложения не входят никакие произвольные коэффициенты. Сумма (23) может включать один, два, три или четыре ряда Лорана. Однако в случае одного или трех рядов условие (23), примененное к $(M^{(0)})^1$, порождает условие $m_0 = 0$, что запрещено. В случае с двумя рядами инвариантность уравнения (15)

относительно преобразования $m_0 \rightarrow -m_0$ приводит к тому, что полученные условия совпадают с условиями для четырех рядов, поэтому достаточно изучить только один случай – когда в сумме (23) четыре ряда. Посчитав первые семь членов каждого ряда (18), получаем десять условий $C_{jk}^M = 0$, $jk = 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 12, 13, 22$,

$$\begin{aligned} C_{01}^M = 0, \quad C_{02}^M \equiv \kappa_i e_r = 0, \quad C_{03}^M \equiv \kappa_i (19e_r d_i (e_i^2 + 16e_r^2) - e_i d_r (9e_i^2 + 6e_r^2)) = 0, \\ C_{04}^M \equiv \kappa_i P(e_r, e_i, d_r, d_i, g_r, g_i, \kappa_i^2) = 0, \quad C_{12}^M \equiv \kappa_i P(e_r, e_i, d_r, d_i, g_r, g_i, \kappa_i^2) = 0, \quad \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

в двух последних условиях многочлены P , содержат соответственно 18 и 16 членов. В случае $\kappa_i \neq 0$ полученные ограничения имеют вид

$$\kappa_i \neq 0: \quad C_{02}^M \equiv e_r = 0, \quad C_{03}^M \equiv d_r = 0, \quad C_{04}^M \equiv 16g_i + 3\kappa_i^2 = 0, \quad C_{12}^M \equiv d_i = 0. \quad (25)$$

В разделе 5 мы покажем, что эти необходимые условия являются достаточными, потому что существует удовлетворяющее им эллиптическое решение.

В случае $\kappa_i = 0$ в силу инвариантности четности (9) выделяется очень мало не равных тождественно нулю выражений $C_{jk}^M = 0$, приведем первые из них³⁾: $C_{13}^M = P_{2,2,5,5,15,15}(g_r, g_i, d_r, d_i, e_r, e_i)$ (140 членов, требуется 6 членов ряда), C_{32}^M (не вычислено, 8 членов ряда), C_{15}^M (не вычислено, 10 членов ряда) и т.д. Таким образом, требуется вычислить множество членов ряда, чтобы получить необходимые условия.

К счастью, неприятность, связанную с необходимостью иметь дело со вторым набором полюсов χ_2 с их неизвестным количеством и добавлением произвольных коэффициентов к системе необходимых условий, можно обойти, ассоциируя с M “субдоминантный” вклад “подчиненной переменной” ψ следующим образом. Любое произведение $(\psi^{(k_1)})^{j_1} (M^{(k_2)})^{j_2}$, голоморфное вблизи χ_2 , удовлетворяет тем же свойствам, что и M , т.е. имеет только четыре разложения в ряд Лорана в χ_1 и не вносит дополнительных произвольных коэффициентов.

Со случаем $\kappa_i = 0$ можно легко разобраться, простейшие необходимые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi M: \quad & 3e_i(2e_r^2 + 3e_i^2)d_r - e_r(8e_r^2 + 11e_i^2)d_i = 0, \\ & \text{имеет решение } d_r = \frac{e_r(8e_r^2 + 11e_i^2)}{3e_i(2e_r^2 + 3e_i^2)}, \\ \psi M^2: \quad & 32(2e_r^2 + 3e_i^2)^2 e_i(3e_i g_i + 4e_r g_r) - (16e_r^2 + 19e_i^2)(4e_r^2 + 3e_i^2)e_r d_i^2 = 0, \\ & \text{имеет решение } g_i = -\frac{4e_r}{3e_i} g_r + \frac{(16e_r^2 + 19e_i^2)(4e_r^2 + 3e_i^2)}{96e_i^2(2e_r^2 + 3e_i^2)^2} e_r d_i^2, \\ \psi M^5: \quad & d_i e_r P_{2,4,12,14}(g_r, d_i, e_r, e_i) = 0, \\ \psi^3 M^3: \quad & d_i P_{2,4,14,16}(g_r, d_i, e_r, e_i) = 0, \\ \psi M^6: \quad & e_r P_{3,6,18,21}(g_r, d_i, e_r, e_i) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

³⁾Индексами обозначается степень P по его аргументам.

Всего с семью членами ряда это определяет три набора необходимых условий

$$\kappa_i = 0, \quad e_r = \frac{3\varepsilon}{2}e_i, \quad d_r = \frac{29\varepsilon}{15}d_i, \quad g_r = -\frac{d_i^2}{5e_i}, \quad g_i = -\frac{7\varepsilon d_i^2}{e_i}, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad (27)$$

$$\kappa_i = 0, \quad d_i = d_r = g_i = g_r = 0, \quad (28)$$

$$\kappa_i = 0, \quad d_i = d_r = g_i = e_r = 0, \quad (29)$$

причем последний набор – это частный случай условий (25) при $\kappa_i = 0$. Первые два набора (27), (28) заведомо можно улучшить, воспользовавшись старшими членами в каждом разложении.

3.2. Критерий вычетов в применении к ψ . Стимулом этого исследования явилась работа [10] по приложению критерия вычетов к ψ , в которой найден набор необходимых условий

$$\kappa_i = e_r = d_r = d_i = g_i g_r = 0, \quad (30)$$

различающий только подслучай $\kappa_i = 0$ эллиптического решения (см. ниже (47)). Этот результат был получен из ряда Лорана ψ^j , $j = 1, 2, 3, 4$, но лишь с использованием разложений (19) вблизи χ_1 , при этом опускался второй набор полюсов (21) вблизи χ_2 . Мы покажем здесь, что, приняв во внимание оба набора полюсов ψ , можно получить правильные результаты, рассматривая только переменные $(\psi^{(k)})^j$.

Поскольку у эллиптической функции столько же нулей, сколько и полюсов, у M должно быть ровно четыре простых нуля (20). Соответствующий набор полюсов ψ , с необходимостью простых, примет следующий вид:

1) $q \neq 0$: четыре полюса χ_1 и четыре полюса χ_2 ;

2) $q = 0$: два полюса χ_1 и два полюса χ_2 .

Обозначим тройки (M_0, M_1, j) в (21) каждым из четырех наборов $(M_{0,1\pm}, M_{1,1\pm}, \pm i)$, $(M_{0,2\pm}, M_{1,2\pm}, \pm i)$ (случай $q \neq 0$) или двух наборов $(M_{0,\pm}, M_{1,\pm}, \pm i)$ (случай $q = 0$). Обозначим через $C_{jk}^{\psi P}$ сумму четырех вычетов, ассоциированных с четырьмя полюсами χ_1 (19), а через $C_{jk}^{\psi Z}$ – сумму двух вычетов, ассоциированных с двумя из полюсов χ_2 (21) с разными значениями j .

Первый набор сумм вычетов дает значения [10]

$$\begin{aligned} C_{01}^{\psi P} &\equiv \frac{4e_r}{e_i}, \quad C_{02}^{\psi P} \equiv \kappa_i \frac{8e_r^2 + 3e_i^2}{2e_i^2}, \\ C_{03}^{\psi P} &\equiv 6\frac{e_r}{e_i}g_i + 4\frac{e_r^2}{e_i^2}g_r + \frac{9e_i^2 + 32e_r^2}{8e_i^3}e_r\kappa_i^2 + \frac{520e_i^2e_r^4 + 256e_r^6 + 303e_i^4e_r^2 + 9e_i^6}{64e_i^3(e_r^2 + e_i^2)^2}d_i^2 - \\ &\quad - \frac{132e_i^4 + 229e_i^2e_r^2 + 112e_r^4}{16e_i^2(e_r^2 + e_i^2)^2}e_rd_id_r + 3\frac{e_i^2(64e_r^4 + 135e_i^2e_r^2 + 81e_i^4)}{64e_i(e_r^2 + e_i^2)^2}d_r^2, \\ C_{12}^{\psi P} &\equiv \kappa_i \left[g_i - 2\frac{e_r}{e_i}g_r - \frac{3}{16}\kappa_i^2 - \frac{112e_i^4 + 23e_i^2e_r^2 - 224e_r^4}{96e_i^2(e_r^2 + e_i^2)^2}d_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{132e_i^4 + 229e_i^2e_r^2 + 112e_r^4}{32(e_r^2 + e_i^2)^2}e_rd_id_r + \frac{19e_i^4 - 123e_i^2e_r^2 - 232e_r^4}{32e_i(e_r^2 + e_i^2)^2}d_r^2 \right], \quad \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

а второй набор (в обозначениях $M_{1s} = M_{1,+} + M_{1,-}$, $M_{1d} = M_{1,+} - M_{1,-}$) дает

$$\begin{aligned}
 C_{01}^{\psi Z} &\equiv 0, & C_{02}^{\psi Z} &\equiv -\kappa_i - \frac{M_{1s}}{2}, & C_{03}^{\psi Z} &\equiv -g_r - \frac{3iM_{1d}}{4}(M_{1s} + 2\kappa_i), \\
 C_{12}^{\psi Z} &\equiv \frac{1}{4}M_{1s}^3 + \frac{3}{2}\kappa_i M_{1s}^2 + \frac{41}{16}\kappa_i^2 M_{1s} + \frac{9}{8}\kappa_i^3 + \frac{3}{4}(2\kappa_i + M_{1s})M_{1d}^2 - \\
 &\quad - ig_r M_{1d} + g_i(2\kappa_i + M_{1s}) + \frac{d_r}{4}(M_{0,+} + M_{0,-}) + \frac{3id_i}{4}(M_{0,+} - M_{0,-}), \\
 C_{04}^{\psi Z} &\equiv \frac{5}{16}M_{1s}^3 + \frac{15}{8}\kappa_i M_{1s}^2 + \frac{57}{16}\kappa_i^2 M_{1s} + \frac{17}{8}\kappa_i^3 + \frac{15}{16}(2\kappa_i + M_{1s})M_{1d}^2 - \\
 &\quad - \frac{5}{4}ig_r M_{1d} + \frac{3}{4}g_i(2\kappa_i + M_{1s}) + \frac{d_r}{16}(M_{0,+} + M_{0,-}) + \\
 &\quad + \frac{3id_i}{16}(M_{0,+} - M_{0,-}), \quad \dots
 \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда получим набор уравнений, которые надо решить (аргументы функций $C_{jk}^{\psi Z}(\dots)$ описывают дополнительные неизвестные):

$$q \neq 0, \quad N = 2: \quad C_{jk}^{\psi P} + C_{jk}^{\psi Z}(M_{0,1\pm}, M_{1,1\pm}, \pm i) + C_{jk}^{\psi Z}(M_{0,2\pm}, M_{1,2\pm}, \pm i) = 0, \tag{33}$$

$$q = 0, \quad N = 1: \quad \frac{1}{2}C_{jk}^{\psi P} + C_{jk}^{\psi Z}(M_{0,\pm}, M_{1,\pm}, \pm i) = 0. \tag{34}$$

Первый набор уравнений (33) содержит слишком много неизвестных, чтобы их можно было решить, рассматривая только семь членов в каждом разложении; мы оставляем вычисления заинтересованному читателю.

Для второго набора уравнений (34), поскольку $q = 0$, ряды Лорана (20), (21) должны обладать инвариантностью (8),

$$q = 0: \quad (M, \psi, \chi, M_0, M_1, j) \rightarrow (-M, \psi, \chi, -M_0, M_1, j), \tag{35}$$

а если κ_i тоже равняется нулю, то и добавочной инвариантностью (9),

$$q = 0, \quad \kappa_i = 0: \quad M_1 = 0, \quad (M, \psi, \chi, M_0, j) \rightarrow (M, -\psi, -\chi, -M_0, j). \tag{36}$$

Второй набор уравнений дает значения

$$\begin{aligned}
 \psi^1: & \quad e_r = 0, \\
 \psi^2: & \quad 2M_{1s} + \kappa_i = 0, \\
 \psi^3: & \quad 8g_r + 9\kappa_i M_{1d} = 0, \\
 \psi^5: & \quad 128e_i(M_{0+}^2 + M_{0-}^2) - 9i\kappa_i M_{1d}(43\kappa_i^2 + 272g_i) = 0, \\
 \psi^4: & \quad \kappa_i(3\kappa_i^2 + 16g_i) = 0, \\
 \psi^3 M^3: & \quad M_{1d}(128ie_i(M_{0+}^2 - M_{0-}^2) + 1296g_i\kappa_i^2 + 279\kappa_i^4) = 0, \quad \dots
 \end{aligned} \tag{37}$$

и допускает только два решения

$$\begin{aligned}
 \kappa_i \neq 0: & \quad e_r = 0, & g_i &= -\frac{3}{16}\kappa_i^2, \\
 M_{0\pm}^2 &= \frac{\kappa_i^2(16g_r \pm 9i\kappa_i^2)}{64e_i}, & M_{1\pm} &= \frac{-9\kappa_i^2 \pm 16ig_r}{36\kappa_i},
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\kappa_i = 0: \quad e_r = 0, \quad g_r = 0, \quad M_{1\pm} = 0, \quad M_{0+}^2 + M_{0-}^2 = 0, \tag{39}$$

поэтому подслучай $\kappa_i \neq 0$ успешно порождает желаемые ограничения (25).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Знаменатель κ_i в (38) соответствует множителю κ_i перед членом ψ^4 в (48), и когда κ_i обращается в нуль, у χ_2 больше нет особенностей в (48) (см. (49)).

Теперь, если потребовать выполнения обоих наборов необходимых условий (набора (25), (27)–(29) из п. 3.1 и набора (38), (39)), то остаются только две возможности существования эллиптического решения M : либо (25), что определяет невырожденное эллиптическое решение, либо $e_r = d_r = d_i = g_r = g_i = 0$, что определяет четыре рациональных решения $M = m_0/(\xi - \xi_0)$, $\psi = (e_i m_0^2/2)/(\xi - \xi_0)$.

4. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВСЕХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим автономное алгебраическое уравнение N -го порядка

$$E(u^{(N)}, \dots, u', u) = 0, \quad u' = \frac{du}{dx}, \quad (40)$$

допускающее по крайней мере одно разложение Лорана

$$u = \chi^p \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \chi^j, \quad \chi = x - x_0. \quad (41)$$

Существует алгоритм [4] поиска всех его эллиптических и вырожденных эллиптических решений в явном виде. Для этого необходимо выполнить следующие последовательные шаги [5], [6].

1. Определить аналитическую структуру подвижных особенностей (например, четыре семейства простых полюсов, два двойных полюса). Для каждого подмножества семейств (например, два семейства простых полюсов) вывести эллиптические порядки m, n (например, $m = 2, n = 4$) полюсов u, u' и перейти к следующим шагам.

2. Вычислить чуть больше чем $(m+1)^2$ членов в разложении Лорана.

3. Определить подуравнение первого порядка m -й степени $F(u, u') = 0$ (оно содержит самое большее $(m+1)^2$ коэффициентов $a_{j,k}$),

$$F(u, u') \equiv \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{2m-2k} a_{j,k} u^j u'^k = 0, \quad a_{0,m} \neq 0. \quad (42)$$

Согласно классическим результатам Брио–Буке и Пенлеве (подробнее см. [6]) любое эллиптическое и вырожденное эллиптическое решение уравнения (40) должно удовлетворять такому ОДУ, называемому “подуравнением” уравнения (40), потому что на следующем шаге потребуется принять (40) как дифференциальное следствие.

4. Потребовать, чтобы каждый ряд Лорана (41) удовлетворял уравнению $F(u, u') = 0$,

$$F \equiv \chi^{m(p-1)} \left(\sum_{j=0}^J F_j \chi^j + O(\chi^{J+1}) \right) \quad \forall j: F_j = 0, \quad (43)$$

и решить эту линейную переопределенную систему для $a_{j,k}$.

5. Проинтегрировать каждое получившееся ОДУ $F(u, u') = 0$.

Структура особенностей M и ψ была установлена в разделе 2: все подвижные полюсы M и ψ простые, а число различных рядов Лорана в этих простых полюсах составляет: 4 в случае M , $4 + 2N$ в случае ψ или M'/M , если $q \neq 0$, и $2 + N$ в случае ψ или M'/M , если $q = 0$, где N – неопределенное целое число.

Начнем с переменной M . Для того чтобы найти все эллиптические и вырожденные эллиптические решения M методом подуравнений, на шаге 1 будем рассматривать различные подмножества семейств, состоящие из одного, двух, трех или четырех рядов (18), определяющих подуравнения $F = 0$ степени по (M', M) соответственно (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8). Вычисления не представляют никаких трудностей, кроме технических, их детальные результаты будут представлены в последующей публикации. Главный новый результат – невырожденное эллиптическое решение – представлено в разделе 5.

Применение метода подуравнений к переменной ψ представляет определенные проблемы.

1. Главная трудность – учесть подвижные особенности типа χ_2 (подвижные простые нули (20) для M , подвижные простые полюсы (21) для ψ). Именно из-за этой трудности в предшествующих исследованиях [10] удалось найти лишь особый случай эллиптического решения, представленный в разделе 5.

2. Число разложений Лорана (21) для ψ не определено, поэтому не удастся установить верхнюю оценку степени подуравнения $F = 0$. С этой проблемой мы уже столкнулись в п. 3.2, где было показано, что число различных рядов Лорана ψ равно либо восьми ($q \neq 0$, четыре разложения вблизи χ_1 и четыре разложения вблизи χ_2), либо четырем ($q = 0$, два разложения вблизи χ_1 и два вблизи χ_2).

3. Произвольные постоянные в разложении (21) следует определить методом подуравнений, поэтому требуется вычисление значительно большего числа членов в каждом ряде Лорана.

4. Другая трудность, априори не выявляемая, состоит в бесконечном значении $M_{1\pm}$ при $\kappa_i = 0$ в (38). Выбор (по каким-то причинам) значения $\kappa_i = 0$ вместе с поиском подуравнений, которым удовлетворяют все четыре ряда, не приводит к успеху. В таком случае ($q = 0$ и $\kappa_i = 0$) ψ допускает два разложения вблизи χ_1 и не имеет разложений вблизи χ_2 , а правильное предположение для вида подуравнения

$$F \equiv \psi'^2 + (a_{01} + a_{11}\psi + a_{21}\psi^2)\psi' + a_{00} + a_{10}\psi + a_{20}\psi^2 + a_{30}\psi^3 + a_{40}\psi^4 = 0, \quad (44)$$

что дальше редуцируется в силу классической теоремы (в ψ' нет членов первой степени (см. § 181 в [11]), поскольку ψ предполагается эллиптическим) и инвариантности (9) к каноническому типу Брио–Буке

$$F \equiv \psi'^2 + a_{00} + a_{20}\psi^2 + a_{40}\psi^4 = 0, \quad (45)$$

для которого действительно решение было найдено [10] (см. ниже (49)).

По всем этим причинам, безусловно, лучше всего для уравнений амплитуды, таких как КГЛЗ, КГЛ5 и других, выбирать переменную M .

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КГЛ5

Эллиптическим решением КГЛ5 мы называем решение КГЛ5, в котором квадрат модуля M редукции с помощью бегущей волны эллиптичен.

Методом подуравнений находится единственное подуравнение рода один для M , и для этого требуются в точности ограничения (25). Вводя краткие обозначения

$$e_1 = \frac{\kappa_1^2}{48}, \quad e_0 = \frac{g_r}{36}, \quad (46)$$

перепишем это подуравнение четвертой степени как

$$\begin{aligned} M'^4 - 2\kappa_i M M'^3 + \frac{72}{e_i} e_1 M'^2 (e_i M^2 - 12e_0) + \frac{2^4 3^8 e_1^4}{e_i^2} + \\ + \frac{648 e_1^2}{e_i^2} (288 e_0^2 + 24 e_i e_0 M^2 - e_i^2 M^4) - \frac{1}{3^4 e_i} M^2 (e_i M^2 - 48 e_0)^3 = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

В силу упоминавшихся выше многочисленных трудностей с переменной ψ соответствующее подуравнение для ψ не определяется методом подуравнений, а только исключением с соответствием (10), что дает

$$\begin{aligned} \kappa_i \psi'^4 - 4\kappa_i \psi'^3 (\kappa_i \psi + 24e_0) + \\ + 8\psi'^2 \left(-\kappa_i (27e_1^2 - 324e_0^2) + 1440e_1 e_0 \psi + 27\kappa_i e_1 \psi^2 + 16e_0 \psi^3 + \frac{1}{3} \kappa_i \psi^4 \right) + \\ + 16 \left(-\frac{1}{3} \kappa_i \psi^8 - \frac{32}{3} e_0 \psi^7 - 26\kappa_i e_1 \psi^6 - 1632e_1 e_0 \psi^5 - (477e_1^2 + 552e_0^2) \psi^4 - \right. \\ \left. - 288(165e_1^2 + 4e_0^2) \psi^3 + \kappa_i (2106e_1^2 - 31320e_0^2) \psi^2 + \right. \\ \left. + 2^7 3^6 (e_1^2 - 4e_0^2) e_1 e_0 \psi + 243(-9e_1^4 + 56e_1^2 e_0^2 - 144e_0^4) \right) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Особенность $\kappa_i = 0$, уже открывшаяся в (38), проявляется как множитель κ_i перед членом ψ'^4 в (48), вследствие чего степень подуравнения (48) снижается с четвертой до второй при $\kappa_i = 0$. Далее можно воспроизвести результат Вернова [10]

$$q = 0, \quad e_r = 0, \quad g_i = 0, \quad \kappa_i = 0, \quad \begin{aligned} e_i (3M')^4 - M^2 (3e_i M^2 - 4g_r)^3 = 0, \\ 9\psi'^2 - 12\psi^4 - g_r^2 = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

где оба подуравнения для M и ψ принадлежат списку пяти канонических уравнений Брио–Буке.

Все детали интегрирования уравнений (47) и (48) можно найти в работе [12]. Имеем следующий окончательный результат для комплексной амплитуды A :

$$\forall \kappa_i: \quad A = \text{const} \cdot e^{-i\omega t + ic\xi/2p} \text{H}(\xi, -\xi_+^B, 0)^{(-1+i\sqrt{3})/2} \text{H}(\xi, -\xi_-^B, 0)^{(-1-i\sqrt{3})/2}, \quad (50)$$

где $\text{H}(\xi, q, k)$ – *élément simple*, определенный Эрмитом ([13], т. II, с. 506) для интегрирования уравнения Ламэ,

$$\text{H}(\xi, q, k) = \frac{\sigma(\xi + q)}{\sigma(\xi)\sigma(q)} e^{(k-\zeta(q))\xi}, \quad (51)$$

а фиксированные постоянные $\xi_{\pm}^B$ в (50) определены уравнениями

$$\begin{aligned}\wp(\xi_{\pm}^B, G_2, G_3) &= -2e_1 \pm i\sqrt{3}(3e_1 + 4ie_0), \\ \wp'(\xi_{\pm}^B, G_2, G_3) &= \frac{3 \mp i\sqrt{3}}{2}(3e_1 + 4ie_0), \\ G_2 &= 12(13e_1^2 + 16e_0^2), \quad G_3 = 8(35e_1^2 + 48e_0^2)e_1, \\ \wp'^2 &= 4(\wp + 2e_1)(\wp^2 - 2e_1\wp - 35e_1^2 - 48e_0^2).\end{aligned}\tag{52}$$

Численные эксперименты с периодическими граничными условиями (см. рис. 4 в работе [14]) показывают наличие решений M с вещественным периодом (похожие свойства наблюдаются для КГЛЗ (рис. 7 в работе [15]), они могут соответствовать данному эллиптическому решению.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ловушки, описанные в настоящей статье, следует иметь в виду при поиске всех эллиптических и вырожденных эллиптических решений таких уравнений амплитуды, как комплексное уравнение Свифта–Хохенберга [16].

Благодарности. Р. Конт благодарит организаторов конференции “Solitons in 1+1 и 2+1 dimensions. DS, KP and all that” за приглашение и признателен за поддержку со стороны MPIPKS Dresden. Работа частично финансировалась RGC (грант № HKU 703807P).

Список литературы

- [1] I. S. Aranson, L. Kramer, *Rev. Mod. Phys.*, **74**:1 (2002), 99–143, arXiv:cond-mat/0106115.
- [2] W. van Saarloos, *Phys. Rep.*, **386**:2–6 (2003), 29–222, arXiv:cond-mat/0308540.
- [3] A. V. Klyachkin, *Modulational instability and autowaves in the active media described by the nonlinear equations of Ginzburg–Landau type*, preprint № 1338, Ioffe Physical Technical Institute, Leningrad, 1989.
- [4] M. Musette, R. Conte, *Physica D*, **181**:1–2 (2003), 70–79, arXiv:nlin.PS/0302051.
- [5] Р. М. Конт, М. Мюзетт, *Метод Пенлеве и его приложения*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИКИ, М., 2011.
- [6] R. Conte, M. Musette, *Stud. Appl. Math.*, **123**:1 (2009), 63–81, arXiv:0903.2009.
- [7] J. Chazy, *Acta Math.*, **34**:1 (1911), 317–385.
- [8] P. Marcq, H. Chaté, R. Conte, *Physica D*, **73**:4 (1994), 305–317, arXiv:patt-sol/9310004.
- [9] A. N. W. Hone, *Physica D*, **205**:1–4 (2005), 292–306.
- [10] S. Yu. Vernov, *J. Phys. A*, **40** (2007), 9833–9844, arXiv:nlin/0602060.
- [11] C. Briot, J.-C. Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 1 ed., Mallet-Bachelier, Paris, 1859; 2 ed., Gauthier-Villars, Paris, 1875.
- [12] R. Conte, T. W. Ng, “Meromorphic traveling wave solutions of the complex cubic-quintic Ginzburg–Landau equation”, *Acta Appl. Math.*, 2012 (in press).
- [13] G.-H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1890, <http://gallica.bnf.fr/document?O=N007348>.
- [14] S. Popp, O. Stiller, I. Aranson, L. Kramer, *Physica D*, **84**:3–4 (1995), 398–423.
- [15] H. Chaté, *Nonlinearity*, **7**:1 (1994), 185–204.
- [16] J. Swift, P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. A*, **15**:1 (1977), 319–328.