Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Эрнандес Эредеро, Д. Леви, К. Шимитерна, Классификация дискретных систем на квадратных решетках, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 250–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:00:48

© 2012 г. Р. Эрнандес Эредеро*, Д. Леви†, К. Шимитерна†

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ

Рассмотрена классификация с точностью до преобразования Мёбиуса вещественных линеаризуемых и интегрируемых разностных уравнений с дисперсией в частных производных, определенных на квадратной решетке путем мультимасштабной редукции вблизи их гармонического решения. Показано, что условия линеаризуемости и интегрируемости A_1 , A_2 и A_3 ограничивают число параметров, входящих в уравнение. Однако этих условий недостаточно для полной характеристики подкласса мультилинейных уравнений на квадратной решетке.

Ключевые слова: мультимасштабное разложение, разностные уравнения, интегрируемые модели, линеаризуемые модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1991 г. Калоджеро [1] ввел понятие S - и C -интегрируемых уравнений для характеристики таких нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), которые решаются путем метода обратной задачи рассеяния и линеаризуются путем замены переменных. С использованием методов мультимасштабной редукции ему удалось показать, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\partial_t u = K_2[u] = \partial_{xx} u + \rho_2 |u|^2 u, \quad u = u(x, t), \quad (1)$$

возникает как универсальное уравнение, которому подчиняется эволюция медленно меняющихся пакетов квазимонохроматических волн в слабонелинейной среде с дисперсией. Данная эволюция следует из члена самого низкого порядка в мультимасштабном пертурбативном разложении данного ДУЧП. Необходимые условия S -интегрируемости заключаются в том, чтобы ρ_2 было вещественным. Если, однако, уравнение является линеаризуемым, то $\rho_2 = 0$ является условием того, что уравнение линейно.

*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica de Telecomunicación, Madrid, Spain.
E-mail: rafahh@euitt.upm.es

†Dipartimento di Ingegneria Elettronica, Università degli Studi Roma Tre and Sezione INFN, Roma Tre, Rome, Italy. E-mail: levi@roma3.infn.it, scimiterna@fis.uniroma3.it

Методы мультимасштабной редукции были использованы для нахождения новых S -интегрируемых ДУЧП путем изучения высших порядков в разложении и для доказательства интегрируемости новых нелинейных уравнений [2]–[4]. Возможно, наиболее важный пример такого нелинейного ДУЧП – уравнение Дегаспериса–Прочези [5].

Как было показано в работах [6]–[8], введение многих масштабов на решетке редуцирует заданное дискретное уравнение или к локальному нелинейному разностному уравнению в частных производных (РУЧП) при наложении условия медленного изменения, или к ДУЧП, имеющему дело с C^∞ -функциями. Здесь мы выбираем второе, поскольку, как было показано в работах [6], [7], только в этом случае сохраняются условия интегрируемости и линеаризуемости дискретного уравнения.

В случае дискретных уравнений было показано [6]–[14], что можно представить эквивалент теоремы Калоджеро–Экхауса [15], которая утверждает, что нелинейное РУЧП с дисперсией не S -интегрируемо, если его мультимасштабное разложение по C^∞ -функциям не порождает интегрируемости НУШ в низшем порядке. Более того, на примерах было показано, что мультимасштабное разложение на C^∞ -функциях для нелинейного C -интегрируемого РУЧП порождает линейное ДУЧП [16].

Более того, в работе [17] были представлены некоторые результаты по классификации линеаризуемых РУЧП с использованием мультимасштабной редукции вблизи гармонического решения.

В настоящей работе мы приводим обзор полученных к настоящему времени результатов по классификации линеаризуемых и интегрируемых РУЧП на квадратной решетке вблизи их гармонических решений. Мы демонстрируем необходимые условия для линеаризуемости и интегрируемости класса вещественных разностных уравнений по переменной $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и ее трех ближайших соседей, определенных на квадратной решетке $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathcal{Q}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}, u_{n+1,m+1}; \beta_1, \beta_2, \dots) = 0, \quad (2)$$

где β_i – вещественные параметры (см. рис. 1). Условия линеаризуемости и интегрируемости получаются путем мультимасштабного пертурбативного разложения, требующего, чтобы уравнение (2) было асимптотически эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера, его иерархии и его симметриям или его линеаризованному аналогу.

Будем полагать, что уравнение (2) является линейно-аффинным по каждой переменной, и наша классификация реализуется с точностью до одновременных преобразований Мёбиуса:

$$u_{n,m} \mapsto \frac{Au_{n,m} + B}{Cu_{n,m} + D}. \quad (3)$$

В разделе 2 кратко обсуждается мультимасштабное разложение для уравнения (2). Демонстрируются основные идеи построения условий интегрируемости, которые обеспечивают то, что заданное уравнение является S - или C -интегрируемым уравнением порядка A_j , $j = 1, 2, 3$, т. е. асимптотически удовлетворяет S - или C -условиям интегрируемости с точностью до третьего, четвертого или пятого порядка по параметру возмущения. В разделе 3 условия интегрируемости и линеаризуемости применяются к уравнению (2), а также приводится последовательность теорем, задающих условия для постоянных β_i , при которых система является A_1 -, A_2 - или

Рис. 1. Квадратная решетка $\mathbb{Z}^2$, на которой определено уравнение $\mathcal{Q} = 0$.

A_3 -интегрируемой или A_1 -, A_2 - или A_3 -линеаризуемой. Наконец, в разделе 4 приводятся некоторые заключительные замечания и обсуждаются дальнейшие задачи.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РУЧП

Теперь кратко проиллюстрируем все составные части метода пертурбативной редукции, необходимые для изучения разностных уравнений, как это представлено в работах [6], [10]. Здесь мы рассмотрим мультимасштабное разложение в случае $\mathbb{C}^\infty$ -функций с тем, чтобы сохранить линеаризуемость или интегрируемость заданного уравнения.

Вводя множественные масштабы решетки, в рамках некоторых очевидных предположений по поводу C^∞ -свойств функции $u_{n,m}$ и радиуса сходимости ее разложения Тейлора для всех n - и m -сдвигов, входящих в разностное уравнение (2), можно записать представление в виде рядов сдвинутых значений $u_{n,m}$ вблизи точки (n, m) . Выбирая

$$n_i = \varepsilon_{n_i} n, \quad \varepsilon_{n_i} \doteq N_i \varepsilon^i, \quad 1 \leq i \leq K_n, \quad m_\sigma = \varepsilon_{m_\sigma} m, \quad \varepsilon_{m_\sigma} \doteq M_\sigma \varepsilon^\sigma, \quad 1 \leq \sigma \leq K_m,$$

где различные постоянные N_i , M_σ и ε являются вещественными числами, причем $K_n = 1$ и $K_m = K$ (в конце концов, $K = +\infty$), полные операторы сдвига T_n , T_m можно переписать в терминах частичных операторов сдвига $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{T}_m$ как

$$T_n = \mathcal{T}_n \mathcal{T}_{n_1}^{(\varepsilon_{n_1})} = \mathcal{T}_n \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \mathcal{A}_n^{(j)}, \quad \mathcal{A}_n^{(j)} \doteq \frac{N_1^j}{j!} \partial_{n_1}^j, \quad (4a)$$

$$T_m = \mathcal{T}_m \prod_{j=1}^K \mathcal{T}_{m_j}^{(\varepsilon_{m_j})} = \mathcal{T}_m \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \mathcal{A}_m^{(j)}, \quad (4b)$$

$$T_n T_m = \mathcal{T}_n \mathcal{T}_m \mathcal{T}_{n_1}^{(\varepsilon_{n_1})} \prod_{j=1}^K \mathcal{T}_{m_j}^{(\varepsilon_{m_j})} = \mathcal{T}_n \mathcal{T}_m \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon^j \mathcal{A}_{n,m}^{(j)} \quad (4b)$$

и в терминах дифференциальных операторов $\mathcal{A}_m^{(j)}$, $\mathcal{A}_{n,m}^{(j)}$. Эти операторы даются подходящими комбинациями $(M_k^j/j!) \partial_{m_k}^j$ (явные выражения и формулы можно найти в работе [10], подробности см. в работе [18]). Для функции $u_{n,m} = u(n, m, n_1$,

$\{m_\sigma\}_{\sigma=1}^K, \varepsilon)$ можно предположить двойное разложение на гармоники по параметру разложения ε :

$$u_{n,m} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{\theta=-j}^j \varepsilon^j u_j^{(\theta)}(n_1, m_\sigma, \sigma \geq 1) e^{i\theta(\kappa h n - \omega \tau m)} \quad (5)$$

при $u_j^{(-\theta)}(n_1, m_\sigma, \sigma \geq 1) = \bar{u}_j^{(\theta)}(n_1, m_\sigma, \sigma \geq 1)$, чтобы обеспечить вещественность $u_{n,m}$, а h и τ – постоянные решетки соответственно в направлениях n и m . Тогда, подставляя явные выражения (4) для операторов сдвига в терминах производных по медленным переменным, получим, что уравнение (2) окажется бесконечной системой зацепленных ДУЧП. Мы далее требуем, чтобы функции $u_j^{(\theta)}$ удовлетворяли асимптотическим условиям $\lim_{n_1 \rightarrow \pm\infty} u_j^{(\theta)} = 0$ для всех j и θ , и выбираем индекс $j \geq 1$ для того, чтобы любая нелинейная часть уравнения (2) входила как возмущение в мультимасштабное разложение.

Таким образом, мультимасштабное разложение нелинейного РУЧП на $\mathbb{C}^\infty$ -функции порождает непрерывные ДУЧП. Поэтому проверка на мультимасштабные интегрируемость или линеаризуемость требует, чтобы уравнение было S -интегрируемым или C -интегрируемым, если его мультимасштабное разложение дает иерархию НУШ или его линеаризованную версию. Это становится очевидным, если рассматривать порядки, следующие за теми, при которых для коэффициента при первой гармонике $u_1^{(1)}$ получается НУШ или его линеаризованная версия. В работах [2], [19], [20] содержатся различные подходы к мультимасштабным разложениям высших порядков S -интегрируемых нелинейных ДУЧП, а в работе [11] рассматривается линеаризуемый случай.

Сформулируем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что нелинейное ДУЧП является S -интегрируемым, если у него есть нетривиальная пара Лакса и, следовательно, бесконечное число обобщенных симметрий.

Тогда, следуя работе [2], можно порядок за порядком избавиться от всех секулярных слагаемых в редуцированных уравнениях и, таким образом, в соответствии с работами [3], [21] сформулировать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Нелинейное РУЧП с дисперсией является C -интегрируемым, только если его мультимасштабное разложение имеет вид равномерного асимптотического ряда такого, что:*

1) амплитуда $u_1^{(1)}$ эволюционирует по медленным временам $m_\sigma, \sigma \geq 1$, в соответствии с σ -м уравнением линейной иерархии Шредингера,

$$\partial_{m_\sigma} u_1^{(1)} = (-i)^{(\sigma-1)} B_\sigma \partial_{n_1}^\sigma u_1^{(1)}, \quad B_\sigma \doteq -\frac{1}{\sigma!} \frac{d^\sigma \omega(\kappa)}{d\kappa^\sigma}, \quad (6)$$

где B_σ – константы;

2) амплитуды высших возмущений первых гармоник $u_j^{(1)}$, $j \geq 2$, изменяются на медленных временах t_σ , $\sigma \geq 2$, в соответствии с некоторыми линейными неоднородными уравнениями при учете соответствующих асимптотических граничных условий:

$$\partial_{t_\sigma} u_j^{(1)} - (-i)^{(\sigma-1)} B_\sigma \partial_{n_1}^\sigma u_j^{(1)} \equiv M_\sigma u_j^{(1)} = f_\sigma(j) \quad (7)$$

для всех j , $\sigma \geq 2$, где $B_\sigma \partial_{n_1}^\sigma u_1^{(j)}$ – σ -й поток в линейной иерархии Шредингера (6). Все остальные $u_j^{(\theta)}$, $\theta \geq 2$, выражаются в терминах дифференциальных мономов по $u_\rho^{(1)}$, $\rho \leq j$.

ТЕОРЕМА 2. Нелинейное РУЧП с дисперсией является S -интегрируемым, только если его мультимасштабное разложение имеет вид равномерного асимптотического ряда такого, что:

1) амплитуда $u_1^{(1)}$ эволюционирует по медленным временам t_σ , $\sigma \geq 1$, в соответствии с σ -м уравнением нелинейной иерархии Шредингера,

$$\partial_{t_\sigma} u_1^{(1)} = K_\sigma[u_1^{(1)}], \quad (8)$$

где $K_\sigma[u_1^{(1)}]$ – σ -й поток в нелинейной иерархии Шредингера;

2) амплитуды высших возмущений первых гармоник $u_j^{(1)}$, $j \geq 2$, эволюционируют по медленным временам t_σ , $\sigma \geq 2$, в соответствии с некоторыми нелинейными неоднородными уравнениями с учетом соответствующих асимптотических граничных условий:

$$M_\sigma u_j^{(1)} = f_\sigma(j), \quad M_\sigma \doteq \partial_{t_\sigma} - K'_\sigma[u_1^{(1)}] \quad (9)$$

для всех j , $\sigma \geq 2$. Все остальные $u_j^{(\kappa)}$, $\kappa \geq 2$, выражаются в терминах дифференциальных мономов по $u_\rho^{(1)}$, $\rho \leq j$.

В уравнениях (7), (9) $f_\sigma(j)$ – неоднородный нелинейный вынуждающий член; B_σ , $\sigma \geq 1$, введенные в уравнении (6), – комплексные постоянные, а $K'_\sigma[u]v$ – производная Фрешэ нелинейного члена $K_\sigma[u]$ вдоль направления v , определяемая как $K'_\sigma[u]v \doteq dK_\sigma[u + sv]/ds|_{s=0}$, т.е. линеаризация $K_\sigma[u]$ вблизи u по направлению v . Уравнения (6), (8) представляют собой иерархию совместных эволюций для функции $u_1^{(1)}$. Очевидно, что операторы M_σ , определяемые в уравнениях (7), (9), коммутируют между собой. Таким образом, коль скоро мы зафиксировали индекс $j \geq 2$ в системе уравнений (7), (9), из их совместности следуют условия

$$M_\sigma f_{\sigma'}(j) = M_{\sigma'} f_\sigma(j) \quad \forall \sigma, \sigma' \geq 2, \quad (10)$$

где, поскольку $f_\sigma(j)$ и $f_{\sigma'}(j)$ являются функциями различных $u_j^{(1)}$ – возмущений коэффициентов фундаментальных гармоник до порядка $j - 1$, временные производные ∂_{t_σ} , $\partial_{t_{\sigma'}}$ этих коэффициентов, возникающие соответственно в M_σ и $M_{\sigma'}$, следует исключить, используя эволюционные уравнения (6)–(9) вплоть до $j - 1$. Условия коммутативности (10) оказываются **проверкой на интегрируемость**. Явный вид данных условий можно найти в работах [17], [22].

3. АФФИННО-ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДИСПЕРСИЕЙ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассмотрим вещественное однородное аффинно-линейное уравнение с дисперсией, определенное на квадратной решетке и принадлежащее классу (2). Наиболее общее мультилинейное уравнение класса (2) имеет нелинейность не более чем четвертого порядка. Внесем в его линейную часть решение $u_{n,m} = K^n \Omega^m$, где $K = e^{i\kappa}$ и $\Omega = e^{-i\omega(\kappa)}$. Получим, что это уравнение является уравнением с дисперсией, если оно однородно и записывается как

$$\begin{aligned} Q_{\pm} = & a_1(u_{n,m} \pm u_{n+1,m+1}) + a_2(u_{n+1,m} \pm u_{n,m+1}) + \\ & + (\alpha_1 - \alpha_2)u_{n,m}u_{n+1,m} + (\alpha_1 + \alpha_2)u_{n,m+1}u_{n+1,m+1} + \\ & + (\beta_1 - \beta_2)u_{n,m}u_{n,m+1} + (\beta_1 + \beta_2)u_{n+1,m}u_{n+1,m+1} + \\ & + \gamma_1 u_{n,m}u_{n+1,m+1} + \gamma_2 u_{n+1,m}u_{n,m+1} + \\ & + (\xi_1 - \xi_3)u_{n,m}u_{n+1,m}u_{n,m+1} + (\xi_1 + \xi_3)u_{n,m}u_{n+1,m}u_{n+1,m+1} + \\ & + (\xi_2 - \xi_4)u_{n+1,m}u_{n,m+1}u_{n+1,m+1} + (\xi_2 + \xi_4)u_{n,m}u_{n,m+1}u_{n+1,m+1} + \\ & + \zeta u_{n,m}u_{n+1,m}u_{n,m+1}u_{n+1,m+1} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|a_1| \neq |a_2|$, — коэффициенты, появляющиеся в линейной части, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \dots, \xi_4, \zeta$ — одиннадцать вещественных параметров, подлежащих определению с использованием мультимасштабной процедуры, описанной в разделе 2. Линейное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(\kappa) = \arctg \left[\frac{(a_1^2 - a_2^2) \sin \kappa}{(a_1^2 + a_2^2) \cos \kappa + 2a_1 a_2} \right]. \quad (12)$$

Будем искать преобразования, оставляющие класс уравнений $Q_{\pm}$ инвариантным. Они дадут условия эквивалентности для нашей классификации. Хорошо известно, что полиномиальные уравнения инвариантны относительно одновременных преобразований Мёбиуса $u_{n,m} \mapsto (Au_{n,m} + B)/(Cu_{n,m} + D)$. Однако наш класс уравнений является однородным с ограничением на коэффициенты линейной части. После преобразования Мёбиуса появляется постоянное слагаемое

$$a_0 = B^4 \zeta + 2B^3 D(\xi_1 + \xi_2) + B^2 D^2[\gamma_1 + \gamma_2 + 2(\alpha_1 + \beta_1)] + 2BD^3(a_1 + a_2), \quad (13)$$

и, таким образом, если мы не хотим ограничивать коэффициенты в уравнении, нужно положить $B = 0$, чтобы получить $a_0 = 0$. После преобразования Мёбиуса при $B = 0$ коэффициенты в $Q_{\pm}$ принимают вид

$$a_1 \mapsto D^3 a_1, \quad a_2 \mapsto D^3 a_2, \quad \alpha_1 \mapsto D^2[\alpha_1 + C(a_1 + a_2)], \quad \alpha_2 \mapsto D^2 \alpha_2, \quad (14)$$

$$\beta_1 \mapsto D^2[\beta_1 + C(a_1 + a_2)], \quad \beta_2 \mapsto D^2 \beta_2, \quad (15)$$

$$\gamma_1 \mapsto D^2(\gamma_1 + 2Ca_1), \quad \gamma_2 \mapsto D^2(\gamma_2 + 2Ca_2), \quad (16)$$

$$\xi_1 \mapsto D\xi_1 + \frac{1}{2}CD[3C(a_1 + a_2) + \gamma_1 + \gamma_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1)], \quad (17)$$

$$\xi_2 \mapsto D\xi_2 + \frac{1}{2}CD[3C(a_1 + a_2) + \gamma_1 + \gamma_2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)], \quad (18)$$

$$\xi_3 \mapsto D\xi_3 + \frac{1}{2}CD[C(a_1 - a_2) + \gamma_1 - \gamma_2 + 2\beta_2], \quad (19)$$

$$\xi_4 \mapsto D\xi_4 + \frac{1}{2}CD[C(a_1 - a_2) + \gamma_1 - \gamma_2 - 2\beta_2], \quad (20)$$

$$\zeta \mapsto \zeta + C^2[2C(a_1 + a_2) + \gamma_1 + \gamma_2 + 2(\alpha_1 + \beta_1)] + 2C(\xi_1 + \xi_2). \quad (21)$$

Таким образом, наши преобразования эквивалентности, относительно которых мы собираемся классифицировать уравнение $\mathcal{Q}_\pm$, ограничены преобразованиями Мёбиуса вида

$$u_{n,m} \mapsto \frac{u_{n,m}}{Cu_{n,m} + D}. \quad (22)$$

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая $\mathcal{Q}_+$. Случай $\mathcal{Q}_-$ будет рассмотрен в последующих работах.

3.1. Линеаризуемые аффинно-линейные уравнения с дисперсией на квадратной решетке в классе $\mathcal{Q}_+$. Требуя, чтобы в низшем порядке в мульти-масштабном разложении получалось линейное уравнение Шредингера, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *В низшем порядке ε^3 необходимые условия для линеаризуемости уравнений $\mathcal{Q}_+$ дают шесть различных классов уравнений, характеризующих различными диапазонами значений коэффициентов уравнения $\mathcal{Q}_+$. Они имеют следующий вид:*

• *случай 1:*

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 2\beta_1, \\ \xi_1 = \xi_2 = \frac{(a_1+a_2)^2\gamma_1\gamma_2 + (3a_1-2a_2)a_2\gamma_1\beta_1 - a_1(2a_1-3a_2)\gamma_2\beta_1}{4a_1a_2(a_1+a_2)}, \\ \xi_3 = \xi_4 = \frac{-(a_1-a_2)(a_1+a_2)^2\gamma_1\gamma_2 - a_2(-a_1^2-5a_2a_1+2a_2^2)\gamma_1\beta_1 + a_1(2a_1^2-5a_2a_1-a_2^2)\gamma_2\beta_1}{4a_1a_2(a_1+a_2)^2}; \end{aligned} \quad (23)$$

• *случай 2:*

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad (3a_1 - 2a_2)a_2^2\gamma_1 + a_1^2(2a_1 - 3a_2)\gamma_2 = 4a_1(a_1 - a_2)a_2\beta_1, \\ \xi_1 = \xi_2 = \frac{(a_1+a_2)(a_2^2\gamma_1^2 - a_1^2\gamma_2^2) + 2a_2(a_1^2 - 2a_2^2)\gamma_1\beta_1 + 2a_1(2a_1^2 - a_2^2)\gamma_2\beta_1 - 6a_1(a_1 - a_2)a_2\beta_1^2}{4a_1a_2(a_1^2 - a_2^2)}, \\ \xi_3 = \xi_4 = \frac{2a_1a_2(a_1+a_2)(\gamma_1-\gamma_2)\beta_1 + (a_1-a_2)(a_2\gamma_1 - a_1\gamma_2)^2 + 2a_1a_2(a_2-a_1)\beta_1^2}{4a_1a_2(a_1+a_2)^2}; \end{aligned} \quad (24)$$

• *случай 3:*

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad a_1 = 2a_2, \quad \gamma_1 = \frac{2}{3}(\alpha_1 + \beta_1), \quad \gamma_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta_1), \\ \xi_1 = \xi_2 = -\frac{-5\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2}{6a_2}, \quad \xi_3 = \xi_4 = -\frac{(\alpha_1 - 2\beta_1)(2\alpha_1 - \beta_1)}{18a_2}; \end{aligned} \quad (25)$$

• *случай 4:*

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad 2a_1 = a_2, \quad \gamma_1 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta_1), \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}(\alpha_1 + \beta_1), \\ \xi_1 = \xi_2 = -\frac{-5\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2}{6a_1}, \quad \xi_3 = \xi_4 = \frac{(\alpha_1 - 2\beta_1)(2\alpha_1 - \beta_1)}{18a_1}; \end{aligned} \quad (26)$$

• случай 5:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_2, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad 2a_1 = a_2, \quad \gamma_1 = \frac{2\beta_1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{4\beta_1}{3}, \\ \xi_1 &= \frac{3\beta_1^2 - 2\beta_2\beta_1 + \beta_2^2}{6a_1}, \quad \xi_2 = \frac{3\beta_1^2 + 2\beta_2\beta_1 + \beta_2^2}{6a_1}, \\ \xi_3 &= -\frac{\beta_1^2 - 6\beta_2\beta_1 + 7\beta_2^2}{18a_1}, \quad \xi_4 = -\frac{\beta_1^2 + 6\beta_2\beta_1 + 7\beta_2^2}{18a_1}; \end{aligned} \quad (27)$$

• случай 6:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\beta_2, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad a_1 = 2a_2, \quad \gamma_1 = \frac{4\beta_1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2\beta_1}{3}, \\ \xi_1 &= \frac{3\beta_1^2 + 2\beta_2\beta_1 + \beta_2^2}{6a_2}, \quad \xi_2 = \frac{3\beta_1^2 - 2\beta_2\beta_1 + \beta_2^2}{6a_2}, \\ \xi_3 &= \frac{\beta_1^2 + 6\beta_2\beta_1 + 7\beta_2^2}{18a_2}, \quad \xi_4 = \frac{\beta_1^2 - 6\beta_2\beta_1 + 7\beta_2^2}{18a_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Шесть соответствующих подклассов уравнений инвариантны относительно ограниченных преобразований Мёбиуса (22).

Случаи 1–6 являются также A_2C -интегрируемыми, поскольку в порядке ε^4 нет условия линеаризуемости.

В качестве следствия теоремы 3 можно сформулировать следующее очевидное, но важное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если коэффициенты $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \dots, \xi_4$ уравнений $\mathcal{Q}_+$ не удовлетворяют одному из условий, заданных уравнениями (23)–(28), то $\mathcal{Q}_+$ не линеаризуемо.

Заметим, что тривиальное условие линеаризуемости $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ содержится в уравнениях (23)–(28).

Особенно интересно рассмотреть уравнение с не более чем квадратичной нелинейностью. В этом случае мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Если $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ в уравнениях $\mathcal{Q}_+$, то низшими условиями линеаризуемости являются:

- случаи 1а и 1б: $\alpha_2 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \beta_1, a_1 = (1/4)(7 \pm \sqrt{33})a_2, \gamma_1 = (1 \mp \sqrt{3/11})\beta_1, \gamma_2 = (1 \pm \sqrt{3/11})\beta_1$;
- случаи 2а и 2б: $\alpha_2 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \beta_1, a_1 = (3/4 + 1/\sqrt{2} \pm (1/2)\sqrt{1/4 + 3\sqrt{2}})a_2, \gamma_1 = \mp 2\sqrt{(1/41)(19 + 18\sqrt{2})}\beta_1, \gamma_2 = \pm 2\sqrt{(1/41)(19 + 18\sqrt{2})}\beta_1$.

Случаи 1а и 1б содержатся в случае 1, а случаи 2а и 2б – в случае 2.

Теперь рассмотрим члены разложения ε^5 для случаев 1–6. Имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Наиболее общее A_3C -интегрируемое уравнение представляется как*

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \beta_1 &= \frac{(a_1 + a_2)\gamma_1}{2a_1}, & \alpha_2 = \beta_2 &= 0, & \gamma_2 &= \frac{a_2\gamma_1}{a_1}, \\ \xi_1 = \xi_2 &= \frac{3(a_1 + a_2)\gamma_1^2}{8a_1^2}, & \xi_3 = \xi_4 &= \frac{(a_1 - a_2)\gamma_1^2}{8a_1^2}.\end{aligned}\quad (29)$$

Случай (29) представляет собой пересечение случаев (23) и (24). Как следствие результата (29) мы получаем, что уравнение вида $\mathcal{Q}_+$, которое удовлетворяет теореме 4 (т. е. дисперсионное уравнение с не более чем квадратичной нелинейностью), никогда не будет C -интегрируемым. Путем ограниченного преобразования Мёбиуса

$$u_{n,m} = \frac{\alpha v_{n,m} + \beta}{\gamma v_{n,m} + \delta}, \quad \alpha = 2a_1\delta, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\gamma_1\delta, \quad (30)$$

можно получить канонический вид уравнений, относящихся к случаю (29):

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \epsilon(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) + \zeta' v_{n,m} v_{n+1,m} v_{n,m+1} v_{n+1,m+1} = 0, \quad (31)$$

где $\epsilon \doteq a_2/a_1 \neq 0, \pm 1$ и $\zeta' \doteq -2[(a_1 + a_2)\gamma_1^3 - 4a_1^3\zeta]/a_1$.

Нетрудно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Уравнения $\mathcal{Q}_+$, удовлетворяющие A_3C -интегрируемости (29), можно линеаризовать с помощью вещественного преобразования Мёбиуса тогда и только тогда, когда $\zeta = (a_1 + a_2)\gamma_1^3/4a_1^3$, что соответствует $\zeta' = 0$ в (31). Линеаризующее преобразование задается выражением (30), а результирующее линеаризованное уравнение имеет вид*

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \epsilon(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) = 0. \quad (32)$$

Уравнение (32) является наиболее общим линейным уравнением с дисперсией, определенным на квадрате.

3.2. Интегрируемые аффинно-линейные уравнения с дисперсией на квадратной решетке в классе $\mathcal{Q}_+$. В низшем порядке ε^3 условий интегрируемости получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Необходимые условия в низшем порядке для интегрируемости уравнений $\mathcal{Q}_+$ имеют следующий вид:*

- случай 1 ($\mathcal{N} = 8$):

$$\begin{aligned}\alpha_2 = \beta_2 &= 0, \\ \xi_1 = \xi_2, \quad \xi_3 = \xi_4;\end{aligned}\quad (33)$$

- случай 2 ($\mathcal{N} = 6$):

$$\begin{aligned}\alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_1 = \beta_1, \\ a_1 = 2a_2, \\ \gamma_1 = 2\gamma_2, \\ a_1(\xi_1 - \xi_2) = -a_1(\xi_3 - \xi_4) = -2\alpha_2\gamma_2;\end{aligned}\quad (34)$$

- случай 3 ($\mathcal{N} = 6$):

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\beta_2, & \alpha_1 &= \beta_1, \\ a_2 &= 2a_1, \\ \gamma_2 &= 2\gamma_1, \\ a_1(\xi_1 - \xi_2) &= a_1(\xi_3 - \xi_4) = -\alpha_2\gamma_1;\end{aligned}\tag{35}$$

- случай 4 ($\mathcal{N} = 7$):

$$\begin{aligned}a_2\alpha_1 &= a_2\beta_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\gamma_2, \\ a_2\gamma_1 &= a_1\gamma_2, \\ a_1(\xi_1 - \xi_2) &= -\alpha_2\gamma_1, \\ a_1(\xi_3 - \xi_4) &= \beta_2\gamma_1;\end{aligned}\tag{36}$$

- случай 5 ($\mathcal{N} = 7$):

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)\beta_2 &= (a_2 + a_1)\alpha_2, \\ 2a_1a_2(a_1 - a_2)\alpha_1 &= (a_1 + a_2)(\gamma_2a_1^2 - \gamma_1a_2^2), \\ 2a_1a_2\beta_1 &= \gamma_1a_2^2 + \gamma_2a_1^2, \\ (a_2 - a_1)(\xi_1 - \xi_2) &= (\gamma_1 - \gamma_2)\alpha_2, \\ (a_2 - a_1)^2(\xi_3 - \xi_4) &= [\gamma_2(a_2 - 3a_1) - \gamma_1(a_1 - 3a_2)]\alpha_2;\end{aligned}\tag{37}$$

- случай 6 ($\mathcal{N} = 7$):

$$\begin{aligned}(a_2 + a_1)\beta_2 &= (a_2 - a_1)\alpha_2, \\ 2a_1a_2\alpha_1 &= \gamma_1a_2^2 + \gamma_2a_1^2, \\ 2a_1a_2(a_1 - a_2)\beta_1 &= (a_1 + a_2)(\gamma_2a_1^2 - \gamma_1a_2^2), \\ (a_2^2 - a_1^2)(\xi_1 - \xi_2) &= [\gamma_1(a_1 - 3a_2) - \gamma_2(a_2 - 3a_1)]\alpha_2, \\ (a_1 + a_2)(\xi_3 - \xi_4) &= (\gamma_2 - \gamma_1)\alpha_2.\end{aligned}\tag{38}$$

Пусть $\mathcal{N}$ – число свободных параметров, содержащихся в получающемся нелинейном решеточном уравнении. Соответствующие шесть подклассов уравнений инвариантны относительно ограниченных преобразований Мёбиуса (22).

Как и в случае линейаризуемых уравнений, можно сформулировать следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если коэффициенты $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \dots, \xi_4$ уравнения $\mathcal{Q}_+$ не удовлетворяют одному из условий, заданных уравнениями (33)–(35), то $\mathcal{Q}_+$ не является интегрируемым.

Если $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ в уравнениях $\mathcal{Q}_+$, то необходимые условия интегрируемости получающегося уравнения в низшем порядке имеют следующий вид:

- случай 1: $\alpha_2 = \beta_2 = 0$;
- случай 2: $\alpha_2 = \beta_2, \alpha_1 = \beta_1, a_1 = 2a_2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$;
- случай 3: $\alpha_2 = -\beta_2, \alpha_1 = \beta_1, 2a_1 = a_2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$;
- случай 4: $\alpha_1 = \beta_1, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Каждый из этих случаев представляет собой в точности то подмножество случаев 1–4 из теоремы 7, которое составлено из квадратных уравнений. Случаи 5 и 6 из теоремы 7 не дают квадратных подслучаев.

Перейдем к порядку ε^4 в пертурбативном разложении. Тогда для классификации A_2 -интегрируемости получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. *Необходимые и достаточные условия для ε^4 -асимптотики S -интегрируемости имеют следующий вид:*

- случай 1:

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \xi_3 = \xi_4;$$

- случай 4:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{(a_1 + a_2)\gamma_1}{2a_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_2\gamma_1}{a_1},$$

$$a_1(\xi_1 - \xi_2) = -\alpha_2\gamma_1, \quad a_1(\xi_3 - \xi_4) = \beta_2\gamma_1.$$

Таким образом, в порядке ε^4 случаи 1 и 4 из теоремы 7 проходят проверку, а случаи 2, 3, 5 и 6 переходят в подслучаи 1 и 4.

В порядке ε^5 пертурбативного разложения имеем следующий результат для классификации A_3 -интегрируемости.

ТЕОРЕМА 9. *С точностью до ограниченного преобразования Мёбиуса (22) для ε^5 единственные асимптотически S -интегрируемые случаи даются следующими нормированными уравнениями:*

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + 2(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) + v_{n+1,m}v_{n,m+1}(\tau_1 + \tau_2) +$$

$$+ (v_{n+1,m}v_{n+1,m+1} + v_{n,m}v_{n,m+1})\tau_2 + (v_{n,m+1}v_{n+1,m+1} + v_{n,m}v_{n+1,m})\tau_1 +$$

$$+ v_{n+1,m}v_{n,m+1}(v_{n,m} + v_{n+1,m+1})\tau_1\tau_2 = 0, \quad (39)$$

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \frac{1}{2}(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) + v_{n+1,m}v_{n,m+1}(\tau_1 + \tau_2) +$$

$$+ (v_{n+1,m}v_{n+1,m+1} + v_{n,m}v_{n,m+1})\tau_2 + (v_{n,m+1}v_{n+1,m+1} + v_{n,m}v_{n+1,m})\tau_1 +$$

$$+ 2v_{n,m}v_{n+1,m+1}(v_{n+1,m} + v_{n,m+1})\tau_1\tau_2 +$$

$$+ 4v_{n,m}v_{n+1,m}v_{n,m+1}v_{n+1,m+1}(\tau_1 + \tau_2)\tau_1\tau_2 = 0, \quad (40)$$

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \epsilon(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) +$$

$$+ s[\epsilon v_{n+1,m}v_{n,m+1}(v_{n,m} + v_{n+1,m+1}) + v_{n,m}v_{n+1,m+1}(v_{n+1,m} + v_{n,m+1})] +$$

$$+ \zeta'v_{n,m}v_{n+1,m}v_{n,m+1}v_{n+1,m+1} = 0, \quad (41)$$

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \epsilon(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) +$$

$$+ s[v_{n+1,m}v_{n,m+1}(v_{n,m} + v_{n+1,m+1}) + \epsilon v_{n,m}v_{n+1,m+1}(v_{n+1,m} + v_{n,m+1})] +$$

$$+ \zeta'v_{n,m}v_{n+1,m}v_{n,m+1}v_{n+1,m+1} = 0, \quad (42)$$

$$v_{n,m} + v_{n+1,m+1} + \epsilon(v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) + v_{n,m}v_{n+1,m+1} - v_{n+1,m}v_{n,m+1} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)[v_{n+1,m}v_{n,m+1}(v_{n,m} + v_{n+1,m+1}) - v_{n,m}v_{n+1,m+1}(v_{n+1,m} + v_{n,m+1})] +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right)v_{n,m}v_{n+1,m}v_{n,m+1}v_{n+1,m+1} = 0. \quad (43)$$

В уравнениях (39), (40) $\tau_1 = 0, 1$; если $\tau_1 = 0$, то $\tau_2 = 1$. В уравнениях (41), (42) $s = 0, \pm 1$ и $\epsilon \neq 0, \pm 1$. В уравнении (43) $\epsilon \neq 0, \pm 1, 2, 1/2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлена полная классификация линейризуемых и интегрируемых вещественных РУЧП с дисперсией, принадлежащих классу $\mathcal{Q}_+$, с использованием мультимасштабных разложений вблизи периодического дискретного волнового решения линейризованого уравнения с точностью до пятого порядка по параметру разложения ϵ .

Вычисления показали, что мультимасштабное разложение можно эффективно использовать для классификации асимптотически линейризуемых и интегрируемых дискретных уравнений.

Получающаяся ϵ^5 -линейризуемая система зависит от четырех параметров, только два из которых являются существенными, как можно видеть из уравнения (31). Требование, чтобы получающееся уравнение явно линейризовалось с помощью преобразования Мёбиуса, редуцирует параметры к одному. Доказательство линейризуемости уравнения $\mathcal{Q}_+$, удовлетворяющего в точности условиям A_3C -интегрируемости (29), остается пока нерешенной задачей. Возможно, переход к более высоким порядкам в пертурбативном разложении позволит нам зафиксировать параметр ζ согласно теореме 6. Некоторые дополнительные результаты, указывающие на то, что формулы (29) или (31) не дают линейризуемых уравнений, приведены в работе [23].

В асимптотически S -интегрируемом случае условия A_3 -интегрируемости дают пятимерные инвариантные разностные уравнения Мёбиуса в частных производных с дисперсией, принадлежащие к классу $\mathcal{Q}_+$, зависящему от меньшего числа свободных параметров – не более двух. Уравнения (41), (42) при $s = 0$ сводятся к (31); более того, при $\zeta' = 0$ они исследовались в работах [24], [25], где было показано, что они S -интегрируемы. Другие случаи, насколько нам известно, являются новыми, и их интегрируемость должна быть доказана другими методами (ведь коль скоро мы не в состоянии добраться до бесконечного порядка, метод мультимасштабного разложения дает лишь необходимые, но не достаточные условия).

Кроме того, ведется работа по исследованию случая $\mathcal{Q}_-$. В этом случае мы получаем для низшего порядка по пертурбативному параметру нелинейную систему ДУЧП, связывающую фундаментальную гармонику с нулевой. Решение этого уравнения является ключевой составляющей классификации данного класса уравнений, содержащего все уравнения с дисперсией, принадлежащие ABS -классификации мультилинейных уравнений на квадрате [26].

Более фундаментальный интересный класс РУЧП, который следует рассмотреть, – это уравнения, определенные на треугольнике, т. е. уравнения относительно переменной $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и двух ближайших соседей:

$$\mathcal{Q}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}; \beta_1, \beta_2, \dots) = 0, \quad (44)$$

где β_i – вещественные параметры. Нетрудно видеть, что для них нет гармонического решения для линейной части (44) и, следовательно, в этом случае не имеется и представленного здесь мультимасштабного разложения. В этом случае можно

использовать другие методы. Классификацию интегрируемых уравнений можно получить, используя формальный симметричный подход (см. работу [24] для случая на квадрате), а классификацию линеаризуемых уравнений – за счет требования о существовании линеаризующего преобразования (см. работу [23] для случая на квадрате). Мы работаем в этом направлении.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Italian Ministry of Education и Research, PRIN “Непрерывные и дискретные нелинейные интегрируемые эволюции: от волн на воде до симплектических отображений”, начиная с 2010 г. Д. Леви выражает благодарность за поддержку во время своего пребывания в Мадриде. Р. Эрнандес Эредеро выражает благодарность Д. Леви и INFN, Sezione Roma Tre за поддержку во время своего пребывания в Риме.

Список литературы

- [1] F. Calogero, “Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?”, *What is Integrability?*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 1–62.
- [2] A. Degasperis, S. V. Manakov, P. M. Santini, *Physica D*, **100**:1–4 (1997), 187–211.
- [3] A. Degasperis, M. Procesi, “Asymptotic integrability”, *Symmetry and perturbation theory, SPT98*, eds. A. Degasperis, G. Gaeta, World Scientific, Singapore, 1999, 23–37; A. Degasperis, “Multiscale expansion and integrability of dispersive wave equations”, *Integrability*, Lecture Notes in Physics, **767**, ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin, 2009, 215–244.
- [4] Y. Kodama, A. V. Mikhailov, “Obstacles to asymptotic integrability”, *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **26**, eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 173–204; Y. Hiraoka, Y. Kodama, “Normal form and solitons”, *Integrability*, Lecture Notes in Physics, **767**, ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin, 2009, 175–214.
- [5] А. Дегасперис, Д. Д. Холм, А. Хон, *ТМФ*, **133**:2 (2002), 170–183.
- [6] R. Hernández Heredero, D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, *J. Phys. A*, **41**:31 (2008), 315208, 12 pp.
- [7] R. Hernández Heredero, D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:suppl.3 (2008), 323–333.
- [8] D. Levi, *J. Phys. A*, **38**:35 (2005), 7677–7689, arXiv: nlin/0505061.
- [9] M. Agrotis, S. Lafortune, P. G. Kevrekidis, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, suppl. (2005), 22–29.
- [10] R. Hernández Heredero, D. Levi, M. Petrera, C. Scimiterna, *J. Phys. A*, **40**:34 (2007), F831–F840.
- [11] J. Leon, M. Manna, *J. Phys. A*, **32**:15 (1999), 2845–2869.
- [12] D. Levi, R. Hernández Heredero, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:suppl. 1 (2005), 440–448.
- [13] D. Levi, M. Petrera, *J. Math. Phys.*, **47**:4 (2006), 043509, 20 pp., arXiv: math-ph/0510084.
- [14] S. W. Schoombie, *J. Comput. Phys.*, **101**:1 (1992), 55–70.
- [15] F. Calogero, W. Eckhaus, *Inverse Problems*, **3**:2 (1987), L27–L32; **3**:2 (1987), 229–262; **4**:1 (1987), 11–33; F. Calogero, A. Degasperis, X. Ji, *J. Math. Phys.*, **42**:6 (2001), 2635–2652; **41**:9 (2000), 6399–6443; F. Calogero, A. Maccari, “Equations of nonlinear Schrödinger type in 1 + 1 and 2 + 1 dimensions obtained from integrable PDEs”, *Inverse Problems: an Interdisciplinary Study*, Proceedings of the meeting (Montpellier, December 1–5, 1986), Advances in Electronics and Electron Physics, suppl. **19**, ed. P. C. Sabatier, Academic Press, London, 1987, 463–480.
- [16] C. Scimiterna, D. Levi, *SIGMA*, **6** (2010), 070, 17 pp., arXiv: 1005.5288.

- [17] R. Hernández Heredero, D. Levi, C. Scimiterna, *J. Phys. A*, **43**:50 (2010), 502002, 14 pp., arXiv: 1011.0141.
- [18] C. Scimiterna, *Multiscale techniques for nonlinear difference equations*, Ph. D. thesis, Roma Tre Università Degli Studi, Rome (Italy), 2009, http://www.fis.uniroma3.it/dottorato_tesi/Scimiterna_SCIMITERNA.pdf.
- [19] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **107**:6 (1985), 245–249.
- [20] Y. Kodama, “Nearly integrable systems: normal form and solitons”, *Nonlinear Evolutions*, Proceedings of the Fourth Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Balaruc-les-Bains, June 11–25, 1987), ed. J. J. P. Leon, World Scientific, Teaneck, NJ, 1988, 559–570.
- [21] M. Procesi, *Non linear waves, multiscale methods and integrability master degree*, Ph.D. thesis, Physics Department, “La Sapienza” University, Rome, 1997.
- [22] D. Levi, C. Scimiterna, *Appl. An.*, **89**:4 (2010), 507–527.
- [23] D. Levi, C. Scimiterna, *SIGMA*, **7** (2011), 079, 24 pp.
- [24] D. Levi, R. I. Yamilov, *J. Phys. A*, **42**:45 (2009), 454012, 18 pp., arXiv: 0902.4421; **44**:14 (2011), 145207, 22 pp., arXiv: 1011.0070.
- [25] C. Scimiterna, B. Grammaticos, A. Ramani, *J. Phys. A*, **44**:3 (2011), 032002, 6 pp.
- [26] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Commun. Math. Phys.*, **233**:3 (2003), 513–543, arXiv: nlin/0202024.