Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Иборт, Д. Мармо, Геометрия интегрируемых и суперинтегрируемых систем, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 264–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:18:04

© 2012 г.

А. Иборт^{*†}, Дж. Мармо^{*}

ГЕОМЕТРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ И СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрена группа автоморфизмов геометрии интегрируемых систем. Геометрическая структура, использованная для ее получения, порождается представлением интегрируемых систем в нормальной форме, которая не зависит от каких-либо дополнительных геометрических структур таких, как симплектическая, пуассонова и т. д. Такая геометрическая структура обеспечивает наличие обобщенного тороидального расслоения в пространстве носителя системы. Неканонические диффеоморфизмы этой структуры генерируют альтернативные гамильтоновы структуры для вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Из теоремы о связи энергии и периода в динамических системах вытекает первое нетривиальное препятствие для эквивалентности интегрируемых систем.

Ключевые слова: интегрируемая система, суперинтегрируемая система, теорема о связи энергии и периода, геометрическая структура.

1. ВВЕДЕНИЕ

После эрлангенской программы, написанной Феликсом Клейном совместно с Софусом Ли (Ли гостил у Клейна в течение двух месяцев непосредственно перед написанием программы), стало ясно, что “геометрия” или “геометрическая структура” на многообразии M означает выбор подгруппы в группе диффеоморфизмов на M [1], [2] (см. также последний перевод этой программы в [3]). Мы хорошо знакомы с таким соответствием в физике. Например, в специальной теории относительности существует группа Пуанкаре для пространства-времени Минковского, в общей теории относительности – группа $Diff(\mathbb{R}^4)$, в гамильтоновой динамике – группа симплектоморфизмов, в квантовой механике – унитарная группа, группа контактных преобразований и т. д. Во всех этих случаях подгруппа группы диффеоморфизмов, определяющаяся геометрией, сама характеризует геометрию. Например, если (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) – два симплектических многообразия и существует

^{*}Dipartimento di Scienze Fisiche, Università di Napoli “Federico II”, Napoli, Italia.
E-mail: marmo@na.infn.it

[†]Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, Spain.
E-mail: albertoi@math.uc3m.es

групповой изоморфизм $\Phi: \text{Sp}(M_1, \omega_1) \rightarrow \text{Sp}(M_2, \omega_2)$ соответствующих групп канонических преобразований (симплектических диффеоморфизмов, установленных в каждом многообразии), то два симплектических многообразия будут (с точностью до контактного преобразования) симплектически эквивалентными, т. е. существует диффеоморфизм $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $\varphi^*\omega_2 = c\omega_1$ [4], [5]. Схожие результаты для многообразий Пуассона и Якоби были получены в работе [6]. Таким образом, диффеоморфизмы, определенные некими геометрическими структурами, по существу являются внутренними, как в случае группы унитарных преобразований гильбертова пространства. В настоящей статье мы идентифицируем соответствующую подгруппу в группе $\text{Diff}(M)$, связанную с интегрируемыми и суперинтегрируемыми системами.

Итак, если имеется интегрируемая гамильтонова динамическая система Γ , определенная на симплектическом многообразии (M, ω) , то примитивная идея о том, что определенная ей подгруппа группы диффеоморфизмов должна быть подгруппой группы канонических преобразований ω , сразу же выглядит неадекватной, поскольку интегрируемые системы всегда допускают альтернативные гамильтоновы описания, так что непонятно, какие канонические преобразования следует рассматривать.

Чтобы показать, каким образом геометрическая структура характеризуется тензорным объектом (и соответствующей подгруппой инвариантности), рассмотрим несколько примеров. Сначала рассмотрим линейную структуру на многообразии. Возможная линейная структура на многообразии M характеризуется таким полным векторным полем Δ , что:

- 1) существует всего одна точка, скажем, $m_0 \in M$ такая, что $\Delta(m_0) = 0$;
- 2) задача на собственные значения $\mathcal{L}_\Delta f = 0 \cdot f$, $f \in \mathcal{F}(M)$, имеет только тривиальные решения, т. е. $f = \text{const}$, если многообразие M связное;
- 3) задача на собственные значения $\mathcal{L}_\Delta f = f$, $f \in \mathcal{F}(M)$, имеет $n = \dim M$ независимых решений f_k таких, что $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$.

Заметим, что условие полноты поля Δ позволяет “генерировать” все многообразие начиная с должным образом выбранного трансверсального подмногообразия коразмерности один в окрестности точки m_0 , которое рассматривается в качестве набора “начальных условий”. Любое такое векторное поле Δ определяет подгруппу $\text{Diff}(M)$ с помощью условия $\varphi_*(\Delta) = \Delta$. Так, подгруппа $GL(M, \Delta)$ группы $\text{Diff}(M)$ диффеоморфизмов φ , сохраняющая Δ , в точности является группой линейных изоморфизмов $GL(n, \mathbb{R})$ с $n = \dim M$. При этом мы использовали глобальную карту, порождаемую функциями f_j , чтобы отождествить M с $\mathbb{R}^n$. В терминах бесконечно малых линейные векторные поля являются решениями уравнения $[X, \Delta] = 0$. Более того, если у нас есть линейные структуры (M_1, Δ_1) и (M_2, Δ_2) , определенные на двух многообразиях M_1 и M_2 , и группа изоморфизмов $\Psi: GL(M_1, \Delta_1) \rightarrow GL(M_2, \Delta_2)$, то существует диффеоморфизм $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $\psi_*\Delta_1 = \Delta_2$.

Понятие линейной структуры можно ослабить, заменив приведенные выше условия 1–3 следующими требованиями:

- 1') множество точек в M , удовлетворяющих условию $\Delta(m) = 0$, определяет гладкое подмногообразие Z в M размерности k ;
- 2') функции f такие, что $\mathcal{L}_\Delta f = 0$, определяют абелеву алгебру, спектр которой диффеоморфен многообразию Z ;

3') уравнение $\mathcal{L}_\Delta f = f$ определяет $n - k$ функционально независимых послойно линейных функций.

Фактически, такая “частично” линейная структура эквивалентна векторному расслоению на многообразии M , а соответствующие автоморфизмы векторных расслоений выбираются из условия $\varphi_*\Delta = \Delta$.

Другой пример подобного рода связан с возможными структурами касательных и кокасательных расслоений на многообразии M . Напомним, что структура касательного расслоения на M устанавливается парой (Δ, S) , где Δ определяет частичную линейную структуру на M , т.е. структуру векторного расслоения, а $S - (1, 1)$ -тензорное поле (см., например, работу [7]) такое, что $\ker S = \text{Im } S$ (это подразумевает $S^2 = 0$), $S(\Delta) = 0$ и $d_S^2 = 0$, где “скрученный” дифференциал d_S определяется выражением

$$d_S f(X) = df(S(X)). \quad (1)$$

Векторное поле Δ требуется для того, чтобы определить структуру векторного расслоения на M , т.е. чтобы удовлетворить вышеупомянутому модифицированному условию 1'-3' при $2k = \dim M$. Структура векторного расслоения, определенная функциями из условия 3, становится структурой касательного расслоения на многообразии Q , так что $M = TQ$. Отметим, что $(1, 1)$ -тензор S является объединяющей формой на многообразии TQ . В естественных координатах расслоения (q, v) эти тензорные поля принимают вид

$$S = dq \otimes \frac{\partial}{\partial v}, \quad \Delta = v \frac{\partial}{\partial v}.$$

Подгруппа $\text{Diff}(M)$, определенная выражениями $\varphi_*\Delta = \Delta$ и $\varphi_*S = S$, является группой автоморфизмов касательного расслоения. Одно и то же многообразие можно наделять альтернативными структурами касательных расслоений, если учесть диффеоморфизмы $\varphi: M \rightarrow M$, удовлетворяющие условию $\varphi_*S = S$, но не сохраняющие Δ . Мы рассмотрим $\Delta_1 = \Delta$ и $\Delta_2 = \varphi_*\Delta$. Тогда если $[\Delta_1, \Delta_2] = 0$, то M становится двойным векторным расслоением, при этом M несет на себе две структуры касательных расслоений TQ_1 и TQ_2 .

Аналогичным образом можно определить структуру касательного расслоения с помощью пары (Δ, θ) (где снова Δ – частичная линейная структура на M , а θ – конкретная 1-форма такая, что $d\theta$ – симплектическая форма, $i_\Delta d\theta = \theta$), потребовав при этом, чтобы решения уравнения $\mathcal{L}_\Delta f = 0$ попарно находились в инволюции и определяли максимальную абелеву подгруппу по отношению к скобке Пуассона, определенной выражением $\omega = d\theta$. Заметим, что это эквивалентно требованию лагранжевости по отношению к $d\theta$ многообразия Q , определенного условием $\Delta(m) = 0$. Таким образом, $M = T^*Q$, а каноническая 1-форма Лиувилля для T^*Q просто совпадает с указанной выше 1-формой θ . Снова, как и в случае структур касательных расслоений, альтернативные структуры кокасательных расслоений на M могут быть построены с помощью диффеоморфизмов φ таких, что $\varphi^*\theta \neq \theta$.

Итак, цель настоящей работы – изучить геометрию интегрируемой системы Γ . Для этого мы ассоциируем с системой Γ соответствующую ей подгруппу группы диффеоморфизмов многообразия, записав систему в “нормальной форме” вместо того, чтобы выделять такую подгруппу из подгруппы диффеоморфизмов, которая определяется некоторой задаваемой ею геометрической структурой. В частности,

мы рассматриваем системы с орбитами, обладающими компактными замыканиями, хотя, к примеру, системы, обладающие неограниченными орбитами, также имеют отношение к теории рассеяния. Чтобы найти таким образом подгруппы диффеоморфизмов, соответствующие (супер)интегрируемым системам, напомним стандартное определение интегрируемых систем.

2. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Интегрируемость и альтернативные гамильтоновы описания. Говорят, что векторное поле Γ на $2n$ -мерном симплектическом многообразии (M, ω) такое, что $i_\Gamma \omega = dH$, *интегрируемо*, если существуют n функционально независимых первых интегралов $f_1, \dots, f_n$,

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0,$$

таких, что $\{f_j, f_k\} = 0$ и $\{H, f_k\} = 0$ для всех $j, k = 1, 2, \dots, n$. Условие независимости $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$ может быть справедливо на некотором плотном открытом подмногообразии многообразия M или, в более слабом виде, на некотором открытом инвариантном подмногообразии. Мы столкнемся с такой ситуацией, например, при рассмотрении задач рассеяния, в которых мы предпочитаем удалить из фазового пространства замкнутые области, состоящие из ограниченных орбит.

Говорят, что система Γ является *суперинтегрируемой*, если она имеет более чем n первых интегралов $f_1, \dots, f_{n+k}$. В этом случае $df_1 \wedge \dots \wedge df_{n+k} \neq 0$, и $\{H, f_j\} = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n+k$. Если $n+k = 2n-1$, то говорят, что система является *максимально суперинтегрируемой*. Отметим, что большинство интегрируемых систем являются также суперинтегрируемыми.

Чтобы изучать подгруппу диффеоморфизмов в M , соответствующую интегрируемой системе, удобно ввести “нормальную форму” векторного поля Γ . В разделе 1 мы обсуждали, что при поиске нормальных форм вполне естественно задать вопрос, какие преобразования допускает система. Так, для гамильтоновых систем было бы естественно использовать канонические преобразования, чтобы рассмотреть преобразования систем, принадлежащие замкнутой подгруппе симплектических диффеоморфизмов на нашем многообразии M . Однако любая интегрируемая система допускает альтернативные гамильтоновы представления, т. е. существуют (ω_a, H_a) , $a = 1, 2$, такие, что $i_\Gamma \omega_1 = dH_1$, $i_\Gamma \omega_2 = dH_2$. Какие канонические преобразования следует использовать в таком случае: симплектические диффеоморфизмы по отношению к ω_1 или к ω_2 ?

В связи с этим любопытно вспомнить спор на эту тему между Леви-Чивитой и Биркхофом. Действительно, в своей статье [8] Леви-Чивита почувствовал необходимость написать главу с названием “Строгость Биркхофа к каноническим переменным и методам. Извинение за мягкое отношение”. С точки зрения Биркхофа, следует рассматривать орбиту векторных полей, полученную действием $\text{Diff}(M)$ на Γ . Все векторные поля на одной орбите имеют одни и те же свойства. Таким образом, имеет смысл сосредоточить внимание на одном представителе. Рассмотрим развитие этой точки зрения для частного случая линейной системы.

Заметим, что гамильтоново векторное поле допускает факторизацию в виде пуассонова тензора и точной 1-формы:

$$\Gamma = \Lambda(dH). \quad (2)$$

Ясно, что любое векторное поле Γ на орбите можно разложить таким же образом. Более того, если рассмотреть диффеоморфизмы $\varphi \in \text{Diff}(M)$ такие, что $\varphi_*\Gamma = \Gamma$, и применить их к разложению (2), то мы получим $\Gamma = \varphi_*(\Lambda)d(\varphi_*H)$. В результате мы приходим к выводу, что любое неканоническое преобразование, которое является симметрией поля Γ , порождает альтернативное гамильтоново описание. В терминах бесконечно малых, если X – бесконечно малая симметрия динамики поля Γ , $[\Gamma, X] = 0$, то $\mathcal{L}_X(i_\Gamma\omega) = d\mathcal{L}_XH$ и тогда $i_\Gamma(\mathcal{L}_X\omega) = d(\mathcal{L}_XH)$. Таким образом, предыдущее уравнение представляет собой альтернативное гамильтоново описание поля Γ , если $\mathcal{L}_X\omega$ невырожден. В связи с альтернативными описаниями заметим, что существуют дополнительные способы их получения. К примеру, рассмотрим $(1, 1)$ -тензор T такой, что

$$\mathcal{L}_\Gamma T = 0. \quad (3)$$

Как и раньше в (1), определим скрученный дифференциал $d_T f(X) = df(TX)$. Тогда из любой константы движения F получим замкнутую 2-форму $\omega_{T,F} = dd_T F$. Если эта форма невырожденная, то она порождает альтернативное гамильтоново описание поля Γ . В самом деле, заметим, что

$$i_\Gamma\omega_{T,F} = \mathcal{L}_\Gamma d_T F - d(i_\Gamma d_T F),$$

но $\mathcal{L}_\Gamma d_T F = 0$ вследствие условия инвариантности (3) и того факта, что F является константой движения. Следовательно, $-dF(T\Gamma)$ есть функция Гамильтона для векторного поля Γ по отношению к симплектической структуре $\omega_{T,F}$.

2.2. Интегрируемость и нормальные формы. С учетом предыдущих рассуждений можно предположить, что для векторных полей с большой группой симметрий всегда найдется альтернативное гамильтоново описание. Однако следует подчеркнуть, что существуют альтернативные гамильтоновы описания, которые не порождаются диффеоморфизмами.

Отметим, что любой диффеоморфизм может быть использован для того, чтобы привести векторное поле Γ к его нормальной форме. Если орбита, проходящая через Γ , содержит вполне интегрируемую систему, то мы можем сосредоточить наше внимание на стандартной нормальной форме, с которой мы познакомились при построении переменных действие–угол, т. е. можно рассматривать форму

$$\Gamma = \nu_j(I) \frac{\partial}{\partial \varphi_j}.$$

Таким образом, следует рассмотреть нормальную форму интегрируемых систем, которая порождается следующими условиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть $\Gamma = \nu^j(f_1, \dots, f_n)X_j$ *нормальной формой* векторного поля Γ (следовательно, Γ является интегрируемым полем), если:

- 1) существуют n функционально независимых первых интегралов $f_1, \dots, f_n$ таких, что $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$;
- 2) существуют n полных векторных полей $X_1, \dots, X_n$, попарно коммутирующих, $[X_j, X_l] = 0$, и независимых, $X_1 \wedge \dots \wedge X_n \neq 0$;
- 3) имеет место равенство $\mathcal{L}_{X_j} f_l = 0$ для всех $j, l = 1, \dots, n$.

Следует заметить, что мы опустили требование гамильтоновости поля Γ и, следовательно, требование, чтобы “частоты” ν^j являлись производными гамильтоновой функции. Обычная теорема Лиувилля–Арнольда теперь дает нам частный способ нахождения таких функций (координат), которые приводят поле Γ к нормальной форме.

Возникают несколько вопросов. Если все интегрируемые системы имеют одну и ту же нормальную форму, то что же отличает одну систему от другой, и существует ли такое отличие? Какие аспекты указанной выше нормальной формы для данной интегрируемой системы дают возможность различить интегрируемые и суперинтегрируемые системы?

По поводу первого вопроса сразу же заметим, что из нормальной формы можно извлечь много интересных аспектов качественной структуры орбит системы, поскольку нам известно, что обычно конкретные интегрируемые системы не должны быть диффеоморфны друг другу. Можно переформулировать наши вопросы и исследовать, сколько различных орбит существуют в $\mathfrak{X}(M)$ под действием группы диффеоморфизмов, если требуется, чтобы каждая орбита содержала хотя бы один вполне интегрируемый элемент.

Чтобы получить представление о разнообразии ситуаций, с которыми мы можем столкнуться, рассмотрим некоторые аспекты теории гармонических осцилляторов.

2.3. Гамильтоновы линейные системы. В качестве частного примера реализации проведенного выше анализа рассмотрим изотропный гармонический осциллятор. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ и линейная система Γ записана в декартовых координатах (x_j, y_j) как

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega y_j, \quad \frac{dy_j}{dt} = -\omega x_j.$$

Тогда

$$\Gamma = \sum_j \omega \left(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Вводя комплексные координаты $z_j = y_j + ix_j$, получим

$$\frac{dz_j}{dt} = i\omega z_j, \quad \frac{d\bar{z}_j}{dt} = -i\omega \bar{z}_j.$$

Алгебра первых интегралов порождается квадратичными формами $z_l \bar{z}_m$ и, поскольку векторное поле Γ пропорционально линейному векторному полю, определенному с помощью комплексной структуры на $\mathbb{C}^n$, группой его линейных симметрий является $GL(n, \mathbb{C})$. Однородное пространство $GL(n, \mathbb{C}) / GL(n, \mathbb{C}) \cap \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ для данной факторизации $\Gamma = \Lambda(dH)$ параметризует некоторые, но не все альтернативные гамильтоновы описания.

Что при этом произойдет с линейной системой общего вида? Линейная система, заданная матрицей A , допускает разложение

$$A = \Lambda H \quad (4)$$

(где Λ – невырожденная кососимметричная матрица и H – симметричная матрица) тогда и только тогда, когда $\text{Tr } A^{2k+1} = 0$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Доказательство этого утверждения в одном направлении провести легко. В самом деле, $A^t = -\Lambda \Lambda$,

поэтому $\text{Tr } A = -\text{Tr } A^t = 0$, и все нечетные степени A^{2k+1} должны удовлетворять подобному равенству. Для нетипичных матриц доказательство обратного утверждения, т. е. условий, гарантирующих возможность факторизации (4), более громоздко, и для их подробного обсуждения мы ссылаемся на статью [9].

Если линейное преобразование T таково, что $TAT^{-1} = A$, то

$$A = (T\Lambda T^t)((T^{-1})^t H T^{-1}),$$

в результате мы имеем альтернативное разложение для A , если только преобразование T не является каноническим.

Если A – матрица общего вида, то все симметрии порождаются степенями A . Неканонические симметрии порождаются четными степенями, поэтому $T = e^{\lambda A^{2k}}$, $k = 1, 2, \dots$, представляют собой неканонические симметрии для любого λ . Например, два альтернативных описания изотропного гармонического осциллятора в $\mathbb{R}^4$ могут быть представлены уравнениями

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \wedge \frac{\partial}{\partial q_2}, & H_1 &= \frac{1}{2}\omega(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2), \\ \Lambda_2 &= \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial p_2} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1}, & H_2 &= \omega(p_1 p_2 + q_1 q_2). \end{aligned}$$

В частности, $(1, 1)$ -тензорное поле определяется следующим образом:

$$T = dq_1 \otimes \frac{\partial}{\partial q_2} + dq_2 \otimes \frac{\partial}{\partial q_1} + dp_1 \otimes \frac{\partial}{\partial p_2} + dp_2 \otimes \frac{\partial}{\partial p_1}.$$

В таком случае можно рассмотреть 2-форму $d d_T F$, в которой

$$F = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)^2,$$

и получить

$$\begin{aligned} d d_T F &= d(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) \wedge d(p_1 p_2 + q_1 q_2) + \\ &+ 2(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)(dq_2 \wedge dq_1 + dp_1 \wedge dp_2). \end{aligned}$$

В заключение данного раздела отметим, что выбор конкретного разложения с положительно определенным гамильтонианом задает группу канонических симметрий, которая является унитарной, $GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n, \mathbb{R}) = U(n)$, поэтому систему можно рассматривать как “квантовоподобную” [10].

3. ГРУППА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Пусть Γ – интегрируемая система, которая обладает нормальной формой, подобной той, что задана в определении 1. Тогда, поскольку $X_1, \dots, X_n$ образуют полный набор попарно коммутирующих полей, можно определить действие абелевой группы $\mathbb{R}^n$ на M . Более того, поскольку $\mathcal{L}_{X_j} \nu^k = 0$, можно переопределить векторное поле X_j как $Y_j = \nu^j X_j$ (здесь по j нет суммирования), и полученные векторные поля также будут попарно коммутирующими, $[Y_j, Y_k] = 0$ при всех $j, k = 1, \dots, n$. Заметим, что при таком переопределении векторные поля Y_k также будут образовывать

полный набор (но с другой параметризацией), следовательно, можно определить альтернативное действие группы $\mathbb{R}^n$ на M .

Как представляется, имеет место не конкретное действие группы $\mathbb{R}^n$, а скорее интегральные листы инволютивного распределения, порожденного векторными полями $X_1, \dots, X_n$. В тех случаях, когда листы компактны, скажем, представляют собой торы, мы можем выбрать такое действие группы $\mathbb{R}^n$, которое факторизуется через действия групп $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Более того, мы можем выделить особый базис векторных полей такой, что каждый элемент из $X_1, \dots, X_n$ порождает действие замкнутой подгруппы. Придерживаясь этих установок, разложим наше векторное поле Γ . Обозначим специальным образом выбранные генераторы замкнутой подгруппы через $Z_1, \dots, Z_n$, тогда $\Gamma = \omega^j Z_j$.

Таким образом, если замыкание обычных орбит поля Γ является n -мерным, то система не имеет дополнительных первых интегралов. Если на некоторых листах замыкание орбит не совпадает с полным тором, то существуют дополнительные инвариантные связи. Если для любого начального условия замыкание орбиты является k -мерным тором, $k < n$, то система обладает дополнительными первыми интегралами и является суперинтегрируемой. Если замыкание является одномерным при любых начальных условиях, то система является максимально суперинтегрируемой.

Теперь ясно, что геометрия интегрируемых и суперинтегрируемых систем связана с обобщенным тороидальным расслоением, т. е. с проекциями на многообразие M , имеющими слои, диффеоморфные торами размерности от единицы до n . Это в точности та ситуация, которая имеет место, если M – компактное $2n$ -мерное симплектическое многообразие и динамика инвариантна относительно действия тороидальной группы $\mathbb{T}^n$. Тогда в силу теоремы Атьи о выпуклости отображение моментов $J: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ является эпиморфным отображением в выпуклый политор $P \subset \mathfrak{t}^*$. Слои отображения J суть инвариантные торы, которые имеют размерность n во внутренних точках P . Слои, соответствующие границе политора, представляют собой торы меньшей размерности [11].

Итак, соответствующая подгруппа диффеоморфизмов многообразия M , определенная полем Γ , представляет собой подгруппу автоморфизмов расслоений такого обобщенного тороидального расслоения. Как мы увидим далее в связи с конкретной интегрируемой или суперинтегрируемой системой, наиболее важным препятствием для существования диффеоморфизма является теорема о связи энергии и периода, которая в сущности налагает ограничения на природу тороидальных расслоений системы и, как следствие, на группу диффеоморфизмов системы.

4. ОСЦИЛЛЯТОРЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Чтобы проиллюстрировать предыдущие рассуждения, приведем несколько примеров.

Рассмотрим изотропный гармонический осциллятор с двумя степенями свободы. Пусть

$$M = \mathbb{R}^4, \quad \omega = \sum_a dp_a \wedge dq_a, \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_a (p_a^2 + q_a^2).$$

В этом случае динамика системы порождает орбиты на открытом плотном многообразии $\mathbb{R}_0^4 = \mathbb{R}^4 - \{0\}$, совпадающие со своими замыканиями и являющиеся одномерными. Тороидальное расслоение определяется выражением $S^1 \rightarrow \mathbb{R}_0^4 \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}^+$.

Мы имеем $\mathbb{R}_0^4 \cong S^3 \times \mathbb{R}^+$, и динамика приводит к расслоению Хопфа $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$. Подгруппа диффеоморфизмов группы $\mathbb{R}_0^4$, которая выбрана с помощью данного расслоения, является группой проективных диффеоморфизмов. Ясно, что эта большая группа симметрий, будучи примененной к выбранному гамильтонову описанию, порождает много альтернативных описаний.

Следует заметить, что альтернативное гамильтоново описание, обусловленное формой и гамильтонианом

$$dp_1 \wedge dq_1 - dp_2 \wedge dq_2, \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2),$$

нельзя получить из стандартного описания с положительно определенным гамильтонианом H_0 , потому что диффеоморфизм сохраняет сигнатуру H (поскольку он не может отобразить компактные энергетические уровни гамильтониана H_0 в некомпактные уровни гамильтониана H). На самом деле система является суперинтегрируемой, поскольку фактор-многообразие под воздействием динамики является не двумерным, а трехмерным.

Данный пример можно обобщить на любое конечное число измерений. При этом для n -мерного изотропного гармонического осциллятора мы опять получаем расслоение $S^1 \rightarrow \mathbb{R}_0^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{R}^+$. Группа симметрий для этой динамики вновь является группой проективных диффеоморфизмов, связанных с проецированием, описанным выше. Следовательно, она диффеоморфна по отношению к центральному расширению группы $Diff(\mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$ с помощью $U(1)$.

Далее, 1-форма

$$\frac{1}{n} \sum_k \frac{p_k dq_k - q_k dp_k}{\omega(p_k^2 + q_k^2)} = d\tau$$

удовлетворяет равенству $i_\Gamma d\tau = 1$. Любая замкнутая 2-форма на фактор-многообразии и любая функция на фактор-многообразии без критических точек на инвариантном открытом плотном подмногообразии, заданном условием $p_k^2 + q_k^2 \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, приводит к альтернативному гамильтонову описанию. Данный пример представляет нормальную форму для максимально суперинтегрируемой системы с одномерными замкнутыми орбитами и постоянным периодом.

В случае более высоких размерностей можно рассмотреть гамильтониан

$$H = \sum_a \omega_a H_a, \quad H_a = \frac{1}{2}(p_a^2 + q_a^2), \quad \omega_a \in \mathbb{R}.$$

Подгруппы, связанные с гамильтоновыми векторными полями Γ_a , $i_{\Gamma_a} \omega = dH_a$, являются замкнутыми. Если все частоты попарно иррациональны, т.е. отношение ω_a/ω_b иррационально, то замыкание общей орбиты группы Γ есть полный тор, и в этом случае дополнительных констант движения быть не может. Если некоторые из частот попарно рациональны, то замыкание общей орбиты представляет собой тор меньшей размерности. Частным примером, в котором замыкание орбит переходит от одномерного тора к n -мерному в зависимости от начальных условий, является $H = \sum_a \pm (H_a)^2$. В этом случае можно также найти инвариантные связи для конкретных значений начальных условий. Данный пример приводит к так называемым нелинейным осцилляторам и рассматривается в квантовой механике с целью получения интересных следствий на уровне планковского закона распределения, а также для альтернативных коммутационных соотношений [12], [13].

5. ПРЕПЯТСТВИЯ К ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Если говорить о препятствиях для существования диффеоморфизмов, связывающих две интегрируемые системы, то теорема о связи энергии и периода обуславливает первое наиболее важное из них. Сошлемся на литературу [14], [15], где изложены различные версии этой теоремы. Однако “дешевое” доказательство можно провести следующим образом. Рассмотрим 2-форму $dp_k \wedge dq^k - dH \wedge dt$ на несущем пространстве нашей динамической системы. Теперь рассмотрим эволюцию $t \mapsto t + \tau$, $p_k(t) = p_k(t + \tau)$, $q^k(t) = q^k(t + \tau)$ и $H(t) = H(t')$ для всех $t' \in \mathbb{R}$. Поскольку эволюция является канонической, получим, что $dH \wedge d\tau = 0$ на том подмногообразии, где период есть дифференцируемая функция от (q^k, p_k) . Следовательно, период τ и гамильтониан H функционально зависимы.

Хорошо известно, что период динамической системы – это свойство векторного поля, инвариантное по отношению к действию диффеоморфизмов. Следовательно, если две гамильтоновы системы имеют разные периоды, то они не могут быть связаны диффеоморфизмами. Например, изотропный гармонический осциллятор и задача Кеплера не могут быть связаны диффеоморфизмом, поскольку отображение, сопоставляющее решениям гармонического осциллятора решения задачи Кеплера (отображение Кустаанеймо–Штифеля), определено на каждом энергетическом уровне, т.е. для орбит, которые имеют один и тот же период. Отображение изменяется при переходе от одного энергетического уровня к другому (см., например, статьи [16], [17]).

Более простой пример представлен гамильтонианами

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad H' = (p^2 + q^2)^2.$$

Для первого из них частота не зависит от энергии, а для второго она зависит от начальных условий. Такие две системы не могут быть диффеоморфны. Это обстоятельство было основной мотивацией для введения классификации динамических систем с точностью до параметризации, т.е. до конформных множителей [18].

Теперь, как мы надеемся, стало ясно, что полученная нами “геометрическая картина” – это лучшее, что можно сделать, поскольку каждая индивидуальная интегрируемая система приводит к бесконечному множеству различных ситуаций, которые невозможно разумно классифицировать иным способом (т.е. путем нахождения конечного или счетного семейства классов эквивалентности).

Благодарности. Работа частично поддержана грантом МЕС, МТМ2010-21186-C02-02 и проектом QUITEMAD. Дж. Мармо благодарит за поддержку, предоставленную Santander/UC3M Chair of Excellence programme 2011–2012.

Список литературы

- [1] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen Program, Univ. Erlangen, Erlangen, 1872.
- [2] F. Klein, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **2** (1893), 215–249.
- [3] F. Klein, *A comparative review of recent researches in geometry*, arXiv:0807.3161.
- [4] A. Banyaga, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**:1 (1986), 113–118.

- [5] A. Banyaga, *J. Differ. Geom.*, **28**:1 (1988), 23–35.
- [6] J. Grabowski, “Isomorphisms of Poisson and Jacobi brackets”, *Poisson Geometry*, Stanislaw Zakrzewski in Memoriam (Warsaw, Poland, August 3–15, 1998), Banach Center Publ., **51**, eds. J. Grabowski, P. Urbański, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000, 79–85.
- [7] S. de Filippo, G. Landi, G. Marmo, G. Vilasi, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **50**:2 (1989), 205–218.
- [8] T. Levi-Civita, *J. Math. Phys.*, **13** (1934), 18–40.
- [9] M. Giordano, G. Marmo, C. Rubano, *Inverse Problems*, **9**:4 (1993), 443–467.
- [10] E. Ercolessi, G. Marmo, G. Morandi, *Riv. Nuovo Cim.*, **33**:8–9 (2010), 401–590.
- [11] M. Atiyah, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **14**:1 (1982), 1–15.
- [12] V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, *Physica Scripta*, **55**:5 (1997), 528–541, arXiv:quant-ph/9612006.
- [13] R. López-Peña, V. I. Man’ko, G. Marmo, *Phys. Rev. A*, **56**:2 (1997), 1126–1130.
- [14] N. N. Nekhoroshev, *Regul. Chaotic Dyn.*, **7**:3 (2002), 239–247.
- [15] W. B. Gordon, *J. Math. Mech.*, **19**:2 (1969), 111–114.
- [16] A. D’Avanzo, G. Marmo, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **2**:1 (2005), 83–109.
- [17] A. D’Avanzo, G. Marmo, A. Valentino, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **2**:6 (2005), 1043–1062.
- [18] A. Ibort, G. Marmo, “A new look at completely integrable systems and double Lie groups”, Secondary calculus and cohomological physics (Moscow, Russia, August 24–31, 1997), *Contemporary Mathematics*, **219** (1998), 159–172.