Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Двумерные уравнения полей Тоды, связанные с исключительной алгеброй $\mathfrak{g}_2$. Спектральные свойства операторов Лакса, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 236–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:19:50

© 2012 г.

В. С. Герджиков*

ДВУМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЕЙ ТОДЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ $\mathfrak{g}_2$. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ЛАКСА

Проведен анализ спектральных свойств оператора Лакса, ответственного за двумерные уравнения полей Тоды, связанные с алгеброй $\mathfrak{g}_2$. Построены два минимальных набора данных рассеяния T_s , $s = 1, 2$, при этом отображение между потенциалом и каждым из наборов T_s понимается как обобщенное преобразование Фурье. В явном виде построен рекуррентный оператор, обладающий особыми свойствами по отношению к факторизации.

Ключевые слова: теория поля Тоды, рекуррентный оператор, спектральное разложение, обобщенное преобразование Фурье.

1. ВВЕДЕНИЕ

Тема нелинейных эволюционных уравнений (НЛЭУ) и динамических систем [1] привлекает внимание многих ученых [2]–[5]. Найдены и проанализированы многие классы новых интегрируемых уравнений такие, как уравнение главного кирального поля [6], уравнения многих спинорных полей [7], нелинейные уравнения Шредингера в симметричных пространствах [8]. Важные продвижения сделаны в направлении построения обобщений $(2+1)$ -мерных солитонных уравнений, обладающих локализованными решениями (см. работы [9], [10] и библиографию в них).

После знаменитой обзорной статьи Соколова и Дринфельда [11] стало широко известно, что каждый “хороший” оператор Лакса может быть связан с полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. В частности, в работе [11] было показано, что скалярные операторы Лакса, порождающие уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и модифицированное КдФ (мКдФ), можно связать со специальными редукциями алгебр Ли, используя их автоморфизмы Кокстера.

Целью настоящей работы является более глубокое объяснение иерархии НЛЭУ, содержащей двумерную теорию поля Тоды, связанную с исключительной алгеброй $\mathfrak{g}_2$. Она может быть выписана в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x \partial t} = \alpha_1 (e^{2(\alpha_1, \vec{u})} - 3e^{-2(3\alpha_1 + 2\alpha_2, \vec{u})}) + \alpha_2 (e^{2(\alpha_2, \vec{u})} - 2e^{-2(3\alpha_1 + 2\alpha_2, \vec{u})}), \quad (1)$$

*Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria. E-mail: gerjnikov@inrne.bas.bg

где α_1 и α_2 – простые корни алгебры $\mathfrak{g}_2$ (см. далее (5)), а трехкомпонентная вектор-функция $\vec{u}(x, t)$ ограничена требованием ортогональности по отношению к вектору $e_1 - e_2 - e_3$.

Мы также кратко изложим спектральные свойства соответствующего оператора Лакса. Пара Лакса для них получается наложением редукции на обобщенные системы Захарова–Шабата с автоморфизмом Кокстера. Число Кокстера алгебры $\mathfrak{g}_2$ порядка 6, так что соответствующее условие существования редукции принимает вид

$$\begin{aligned} L\psi &\equiv i \frac{d\psi}{dx} + (U(x, t) - \lambda J)\psi(x, t, \lambda) = 0, \\ M\psi &\equiv i \frac{d\psi}{dt} + \left(V(x, t) - \frac{1}{\lambda} K \right) \psi(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \psi(x, t, \lambda) K, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} U(x, t) &= q_1(x, t)H_1 + q_2(x, t)H_2, & J(x, t) &= r_{10}E_{10} + r_{01}E_{01} + r_{32}F_{32}, \\ V(x, t) &= v_1(x, t)H_1 + v_2(x, t)H_2, & K(x, t) &= p_{10}F_{10} + p_{01}F_{01} + p_{32}E_{32}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\{10, 01, \overline{32}\}$ – набор допустимых корней алгебры $\mathfrak{g}_2$, который в нашем случае содержит два простых корня, причем минимальный набор таков: $\{\alpha_1, \alpha_2, -3\alpha_1 - 2\alpha_2\}$. В дальнейшем парой положительных целых чисел km мы будем обозначать положительный корень $\alpha = k\alpha_1 + m\alpha_2$ алгебры $\mathfrak{g}_2$, отрицательный корень $-\alpha = -k\alpha_1 - m\alpha_2$ будем обозначать $\overline{km}$. Тогда набор допустимых корней есть $\{10, 01, \overline{32}\}$. Обозначим через $\text{ht } \alpha$ высоту α , определяемую по формуле $\text{ht } \alpha = k + m$.

Условие совместности $[L, M] = 0$ выполняется тождественно по отношению к λ в том случае, если

$$\begin{aligned} \vec{u}_x &= q_1(x, t)\alpha_1 + q_2(x, t)\alpha_2, & \vec{u}_t &= v_1(x, t)\alpha_1 + v_2(x, t)\alpha_2, \\ r_{10} &= e^{(\alpha_1, \vec{u})}, & r_{01} &= e^{(\alpha_2, \vec{u})}, & r_{32} &= r_{10}^{-3} r_{01}^{-2}, \\ p_{10} &= e^{-(\alpha_1, \vec{u})}, & p_{01} &= e^{-(\alpha_2, \vec{u})}, & p_{32} &= p_{10}^{-3} p_{01}^{-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Наконец, потребуем, чтобы вектор $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ удовлетворял НЛЭУ (1).

Работа организована следующим образом. Раздел 2 содержит некоторые предварительные замечания. В разделе 3 рассматривается обратная задача рассеяния (ОЗР) для оператора Лакса L . Мы построим фундаментальное аналитическое решение для L и сведем решение ОЗР для L к задаче Римана–Гильберта (ЗРГ) на совокупности трех прямых линий, сходящихся под углами 60° . В разделе 4 мы определим минимальный набор данных рассеяния и определим разложение потенциала и его вариации по системе “квадратичных решений”. Далее, введем рекуррентные операторы $\Lambda_{[p]}^\pm$, для которых “квадратичные решения” являются собственными функциями. Мы покажем, что каждый оператор $\Lambda_{[p]}^\pm$ представляется как произведение шести множителей. В разделе 5 даны краткие выводы.

Рис. 1. Система корней алгебры $\mathfrak{g}_2$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

2.1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$. Начнем с напомним некоторые основные факты, касающиеся системы корней и базиса Картана–Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$. Выберем простые корни и положительные корни алгебры $\mathfrak{g}_2$ следующим образом (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3}(e_1 - e_2 + 2e_3), & \alpha_2 &= e_2 - e_3, \\ \alpha_1 &= 10, & \alpha_2 &= 01, & \alpha_1 + \alpha_2 &= 11, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 21, & 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 31, & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 32. \end{aligned} \quad (5)$$

Корень 32 – максимальный корень алгебры $\mathfrak{g}_2$, его высота равна $3 + 2 = 5$.

Базис Картана–Вейля удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} [H, E_\alpha] &= \alpha(H)E_\alpha, & F_\alpha &\equiv E_{-\alpha} = (E_\alpha)^T, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta}E_{\alpha+\beta}, & [E_\alpha, F_\alpha] &= H_\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Нам также будут нужны некоторые автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}_2$ конечного порядка, которые могут быть реализованы в виде элементов группы Вейля. Она генерируется отображениями S_{α_1} и S_{α_2} , где по определению $S_\alpha \vec{x} = \vec{x} - (2(\vec{x}, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha$. Элемент Кокстера в ней задается выражением

$$C = S_{\alpha_2}S_{\alpha_1}, \quad C^6 = \mathbb{1}, \quad (7)$$

которое означает, что число Кокстера алгебры $\mathfrak{g}_2$ равняется 6. Базис Картана–Вейля для типичного семимерного представления алгебры $\mathfrak{g}_2$ приведен в приложении.

2.2. Группа редукций Михайлова [12], [13]. Группа редукций G_R является конечной и налагает конечное число ограничений на НЛЭУ. Лучше всего ее сформулировать в терминах симметрий пары Лакса, причем она должна нетривиально действовать как на спектральный параметр λ , так и на матричнозначные коэффициенты операторов L и M .

Далее в наших примерах группы G_R являются изоморфными по отношению к циклическим $\mathbb{Z}_k$ и диэдральным $\mathbb{D}_k$ группам порядка k , где число k , равное 2 или 6, – число Кокстера алгебры $\mathfrak{g}_2$. Их генерирующие коды $z_1^k = 1$ для $\mathbb{Z}_k$ и $z_1^k = z_2^2 = (z_1 z_2)^2 = 1$ для $\mathbb{D}_k$.

Мы будем говорить, что G_R – группа редукций данной пары Лакса, при условии, что:

- а) G_R является группой $\text{Aut } g$, т. е. $z_k \rightarrow U_k \in \text{Aut } g$; точнее, $G_R \subset \mathcal{W}_g$;
- б) G_R является подгруппой конформных отображений на комплексной λ -плоскости $z_k: \lambda \rightarrow g_k(\lambda)$;
- в) пара Лакса инвариантна по отношению к G_R в том смысле, что

$$C_k(L(g_k(\lambda))) = L(\lambda), \quad C_k(M(g_k(\lambda))) = M(\lambda), \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

В частности, пара Лакса (2) подвержена двум редукциям: $\mathbb{Z}_2$ -редукции, которая обращает коэффициенты u_1 , u_2 и u_3 вектора $\vec{u}$ в действительные числа, и $\mathbb{Z}_6$ -редукции, которая эквивалентна автоморфизму Кокстера.

Ограничения (8) имеют чисто ли-алгебраическую структуру и будут совместны с НЛЭУ.

2.3. Градуировка Кокстера в алгебре $\mathfrak{g}_2$. Каждый автоморфизм конечного порядка алгебры $\mathfrak{g}_2$ индуцирует градуировку [14], [15], т. е. позволяет разбить алгебру на совокупность подпространств. Начнем с реализации автоморфизма Кокстера в виде элемента подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}_2$

$$C(X) \equiv CXC^{-1}, \quad C = e^{2\pi i H_p/6}, \quad (9)$$

где вектор $\vec{\rho} = 5\alpha_1 + 3\alpha_2$. Такой выбор гарантирует, что $(\vec{\rho}, \alpha_1) = (\vec{\rho}, \alpha_2) = 1$; очевидно, что $C^6 = 1$. Тогда градуировка $\mathfrak{g}_2$ принимает вид $\mathfrak{g}_2 = \bigoplus_{p=0}^5 \mathfrak{g}_2^{(p)}$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2^{(0)} &= \text{l.c.}\{H_1, H_2\}, & \mathfrak{g}_2^{(1)} &= \text{l.c.}\{E_{10}, E_{01}, E_{\overline{32}}\}, \\ \mathfrak{g}_2^{(2)} &= \text{l.c.}\{E_{11}, E_{\overline{31}}\}, & \mathfrak{g}_2^{(3)} &= \text{l.c.}\{E_{21}, E_{\overline{21}}\}, \\ \mathfrak{g}_2^{(4)} &= \text{l.c.}\{E_{31}, E_{\overline{11}}\}, & \mathfrak{g}_2^{(5)} &= \text{l.c.}\{E_{\overline{10}}, E_{\overline{01}}, E_{32}\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, каждое подпространство $\mathfrak{g}_2^{(p)}$, $p \geq 1$, натягивается на корневые векторы, соответствующие корням высоты $p \pmod{6}$; $\mathfrak{g}_2^{(0)}$ совпадает с подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}_2$.

Второй реализацией автоморфизма Кокстера $\tilde{C}$ является реализация в виде элемента группы Вейля алгебры $\mathfrak{g}_2$. При этом альтернативная градуировка алгебры $\mathfrak{g}_2$ принимает вид

$$\mathfrak{g}_2 = \bigoplus_{p=0}^5 \tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)}, \quad (11)$$

где линейные пространства $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{C}\tilde{X}^{(p)} = \omega^p \tilde{X}^{(p)} \quad \forall \tilde{X}^{(p)} \in \tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)}. \quad (12)$$

Можно проверить (см. приложение), что $\tilde{C}$ расщепляет систему корней алгебры $\mathfrak{g}_2$ на две орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ (см. формулу (48)). Это позволяет ввести в каждом пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)}$ два базисных элемента:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)} &\equiv \{\tilde{X}^{(p)}, \tilde{Y}^{(p)}\}, \\ \tilde{X}^{(p)} &= \frac{1}{6} \sum_{s=1}^6 \omega^{-sp} C^s E_{01} C^{-s}, \quad \tilde{Y}^{(p)} = \frac{1}{6} \sum_{s=1}^6 \omega^{-sp} C^s E_{10} C^{-s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для $p = 0, 2, 3, 4$ приведенный выше базис в $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{(p)}$ является полным. Для $p = 1, 5$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_2^{(1)} \equiv \{\tilde{X}^{(1)}, \tilde{Y}^{(1)}, A\}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_2^{(5)} \equiv \{\tilde{X}^{(5)}, \tilde{Y}^{(5)}, B\}, \quad (14)$$

где $A = \tilde{J}_{(0)}$ и $B = \tilde{K}_{(0)}$ (см. ниже уравнение (16)).

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА L

3.1. Решения Йоста и матрица рассеяния. Операторные уравнения Лакса вида (2), где U и J зависят от x и t , решить трудно. Однако функции $J(x, t)$ и $K(x, t)$ специально выбраны таким образом, что все их собственные значения различны и не зависят от x и t . Это позволяет сделать простое преобразование подобия, которое оставляет инвариантными спектральные свойства операторов L и M , сводя проблему к уже изученной [16].

Далее мы рассмотрим класс потенциалов $\vec{u}(x, t)$, которые являются функциями типа Шварца. Тогда $J(x, t)$ и $K(x, t)$ обращаются в постоянные матрицы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} J(x, t) &\equiv J_{(0)} = E_{10} + E_{01} + F_{32}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} K(x, t) &\equiv K_{(0)} = F_{10} + F_{01} + E_{32}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя явные выражения для генераторов Вейля (см. приложение), можно показать, что

$$\begin{aligned} J_{(0)} &= u_{(0)} \tilde{J}_{(0)} \hat{u}_{(0)}, & \tilde{J}_{(0)} &= \text{diag}(1, \omega, -\omega^2, 0, \omega^2, -\omega, -1), \\ K_{(0)} &= u_{(0)} \tilde{K}_{(0)} \hat{u}_{(0)}, & \tilde{K}_{(0)} &= \text{diag}(1, -\omega^2, \omega, 0, -\omega, \omega^2, -1). \end{aligned} \quad (16)$$

Технически более удобно рассмотреть такую пару Лакса

$$\tilde{L} = \hat{u}_{(0)} L u_{(0)}, \quad \tilde{M} = \hat{u}_{(0)} M u_{(0)}, \quad (17)$$

которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{\psi} &\equiv i \frac{d\tilde{\psi}}{dx} + (w(x, t) - \lambda A) \tilde{\psi}(x, t, \lambda) = 0, \\ \tilde{M}\tilde{\psi} &\equiv i \frac{d\tilde{\psi}}{dt} + \left(V(x, t) - \frac{1}{\lambda} B \right) \tilde{\psi}(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \tilde{\psi}(x, t, \lambda) B, \\ A &= \tilde{J}_{(0)}, \quad B = \tilde{K}_{(0)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Решения Йоста вводятся с помощью выбора их асимптотик при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(x, t, \lambda) e^{i\lambda A x} = \mathbb{1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x, t, \lambda) e^{i\lambda A x} = \mathbb{1}. \quad (19)$$

Матрица рассеяния определяется следующим образом:

$$\tilde{T}(t, \lambda) = \tilde{\psi} \tilde{\phi}(x, t, \lambda), \quad (20)$$

и принимает значения в группе $\mathcal{G}_2$.

Решения Йоста $\tilde{\psi}(x, t, \lambda)$ и $\tilde{\phi}(x, t, \lambda)$ являются фундаментальными решениями и для оператора $\tilde{M}$. Это позволяет доказать, что $\tilde{T}(t, \lambda)$ эволюционирует во времени следующим образом:

$$i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} [B, \tilde{T}(t, \lambda)] = 0. \quad (21)$$

3.2. Фундаментальные аналитические решения для оператора L . Более строгий анализ (см. работы [17]–[19]) показывает, что решения Йоста существуют только для класса потенциалов, имеющих конечный носитель. Тем не менее можно построить фундаментальные аналитические решения для оператора L . Отметим, что преобразование (19) выявляет собственные значения J в виде степеней $\omega = e^{\pi i/3}$. Хорошо известно [16]–[18], что построение фундаментальных аналитических решений для таких операторов Лакса требует дополнительных усилий. Поэтому далее мы переформулируем результаты работы [16] для особого случая, когда в качестве простой алгебры Ли выбрана $\mathfrak{g}_2$ и, кроме того, оператор Лакса удовлетворяет условиям редукции (9).

Придерживаясь работы [16] (см. также работы [20], [21]), можно построить фундаментальное решение $\chi(x, \lambda) = m(x, \lambda) e^{-i\lambda J x}$ таким образом, что $m(x, \lambda)$ будет сегментно-аналитической функцией λ в каждом секторе Ω_a , заключенном между l_a и l_{a+1} , [16]; обозначим через $m_a(x, \lambda)$ ветвь Ω_a . Скачки на лучах l_a задаются выражениями

$$m_a(x, t, \lambda) = m_{a+1}(x, t, \lambda) \mathcal{E}^{-1}(x, t, \lambda) g_{a,0}(\lambda) \mathcal{E}(x, t, \lambda), \quad \lambda \in l_a, \quad (22)$$

$$g_{a,0}(\lambda) = \hat{S}_a^+(\lambda, 0) S_a^-(\lambda, 0) = \hat{D}_a^+(\lambda) \hat{T}_a^-(\lambda, 0) T_a^+(\lambda, 0) D_a^-(\lambda). \quad (23)$$

Здесь $S_a^\pm(\lambda, 0)$, $T_a^\pm(\lambda, 0)$, $D_a^\pm(\lambda)$ определены асимптотиками функции $m_a(x, t, \lambda)$ при $t = 0$ и $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} S_a^\pm(\lambda, 0) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} P_a(e^{i\lambda J x} m_a(x, 0, \lambda e^{\pm i0}) e^{-i\lambda J x t}), \quad \lambda \in l_a, \\ T_a^\mp(\lambda, 0) D_a^\pm(\lambda) &= \lim_{x \rightarrow \infty} P_a(e^{i\lambda J x} m_a(x, 0, \lambda e^{\pm i0}) e^{-i\lambda J x}), \quad \lambda \in l_a, \end{aligned} \quad (24)$$

а P_a – проекторы на подгруппу $\mathfrak{G}_a$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_a$, причем $\alpha \in \delta_a^+$, если $\text{Im } \lambda e^{i0} \alpha(J) > 0$. Можно проверить, что по отношению к этому упорядочению $\delta_1^+ \cup \delta_2^+ \equiv \pi$ – набор простых корней алгебры $\mathfrak{g}_2$; кроме того, $(\alpha, \beta) = 0$ для любой пары корней из δ_k^+ , $k = 1, 2$.

Рис. 2. Непрерывный спектр оператора Лакса L .

Опуская детали, сформулируем спектральные свойства оператора L следующим образом.

Непрерывный спектр L заполняет шесть лучей

$$l_a \equiv \left\{ \lambda \in l_a : \arg(\lambda) = \frac{2\pi i(a-1)}{6} \right\},$$

где $a = 1, \dots, 6$ (см. рис. 2). Ориентация лучей l_1 , l_3 и l_5 – от начала координат к бесконечности; ориентация лучей l_2 , l_4 и l_6 – от бесконечности к началу координат. Отметим, что с каждым из лучей l_a можно связать некоторое подмножество корней $\delta_a \simeq \{\alpha_a \in \delta_a : \text{Im } \alpha_a(\lambda \tilde{J}) = 0, \lambda \in l_a\}$. Можно проверить, что δ_a – системы корней либо $sl(2)$, либо прямой суммы большего числа копий $sl(2)$.

3.3. Минимальный набор данных рассеяния. Введем наборы $\mathcal{T}_{1,2}$ с помощью формул $\tilde{\mathcal{T}}_p \equiv \bigcup_{a=1}^6 \mathcal{T}_{p,a}$, $p = 1, 2$, где

$$\mathcal{T}_{1,a} \equiv \{s_{a,\alpha}^\pm(\lambda), \alpha \in \delta_a^+, \lambda \in l_a\}, \quad \mathcal{T}_{2,a} \equiv \{t_{a,\alpha}^\pm(\lambda), \alpha \in \delta_a^+, \lambda \in l_a\} \quad (25)$$

и $s_{a,\alpha}^\pm(\lambda)$, $t_{a,\alpha}^\pm(\lambda)$ – коэффициентные функции в $S_a^\pm(\lambda)$ и $T_a^\pm(\lambda)$:

$$S_a^\pm(\lambda) = \exp\left(\sum_{\alpha \in \delta_a^+} s_{a,\alpha}^\pm(\lambda) E_{\pm\alpha}\right), \quad T_a^\pm(\lambda) = \exp\left(\sum_{\alpha \in \delta_a^+} t_{a,\alpha}^\pm(\lambda) E_{\pm\alpha}\right). \quad (26)$$

Можно доказать, что $D_{a,\alpha}^\pm(\lambda) = \exp(\pm \sum_{\alpha \in \delta_a^+} d_{a,\alpha}^\pm(\lambda) H_\alpha)$ являются кусочно-аналитическими функциями параметра λ , которые порождают интегралы движения соответствующего НЛЭУ. Их можно построить с помощью любого из наборов $\tilde{\mathcal{T}}_1$ или $\tilde{\mathcal{T}}_2$, используя дисперсионные соотношения, которым они удовлетворяют [22], и тот факт, что согласно (8)

$$S_{a+2}^\pm(\lambda \omega^{-1}) = C_1(S_a^\pm(\lambda)), \quad T_{a+2}^\pm(\lambda \omega^{-1}) = C_1(T_a^\pm(\lambda)). \quad (27)$$

Аналогичные соотношения верны и для $D_a^\pm(\lambda)$. Если оператор L обладает дискретными собственными значениями, то нужно включить дополнительные данные, которые их характеризуют.

Далее мы увидим, что $\tilde{T}_k$ однозначно определяет и фундаментальные аналитические решения $m_a(x, t, \lambda)$ в виде решений ЗРГ (22) с каноническим условием нормировки

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(x, t, \lambda) = \mathbb{1},$$

и соответствующий потенциал оператора L через выражение (25). Ряд соотношений (22) для $a = 1, \dots, 6$ можно рассматривать как ЗРГ на Σ – непрерывный спектр оператора L . В самом деле, $\mathcal{T}_1$ однозначно определяет сшивающие функции $g_{a;0}(\lambda, t)$ для ЗРГ. Для данного решения ЗРГ мы можем однозначно определить потенциал $w(x, t)$ как

$$w(x, t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(A - m_a A \hat{m}_a(x, t, \lambda)) = [A, m_a^{(1)}(x, t)], \quad (28)$$

где $m_a^{(1)}(x, t)$ – первый нетривиальный коэффициент в асимптотическом разложении функции $m_a(x, t, \lambda)$:

$$m_a(x, t, \lambda) = \mathbb{1} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{-s} m_a^{(s)}(x, t). \quad (29)$$

4. МЕТОД ОЗР – ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

4.1. Соотношения вронскиана и “квадратичные решения”. Впредь для удобства мы будем рассматривать только спектральные свойства оператора $\tilde{L}$. Очевидно, что соответствующие результаты для L можно получить, применив преобразование подобия с $u_{(0)}$. Чтобы упростить обозначения, далее мы опускаем все тильды.

Анализ, основанный на соотношениях вронскиана [16], [22], [23], можно обобщить на систему L с группами редукций $\mathbb{Z}_h$ и $\mathbb{D}_h$. Опуская детали, напомним основные соотношения.

1. Соотношения вронскиана:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\chi}_a J \chi_a(x, t, \lambda), E_\alpha \rangle|_{x=-\infty}^\infty &= i \int_{-\infty}^\infty dx \langle w(x, t), [J, e_{a;\alpha}(x, t, \lambda)] \rangle, \\ \langle \hat{\chi}_a \delta \chi_a(x, t, \lambda), E_\alpha \rangle|_{x=-\infty}^\infty &= i \int_{-\infty}^\infty dx \langle \text{ad}_A^{-1} \delta w(x, t), [J, e_{a;\alpha}(x, t, \lambda)] \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $e_{a;\alpha}(x, t, \lambda)$ обозначает “квадратичные решения” для $\tilde{L}$,

$$\mathcal{E}_{a;\alpha}^\pm(x, t, \lambda) = \chi_a^\pm E_\alpha \hat{\chi}_a^\pm(x, t, \lambda), \quad e_{a;\alpha}^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{P}_{0A} \mathcal{E}_{a;\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \quad (31)$$

где $\mathbb{P}_{0J}$ – проектор $\mathbb{P}_{0A} X \equiv \text{ad}_A^{-1} \text{ad}_A X$, $\text{ad}_A X \equiv [A, X]$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – форма Киллинга на $\mathfrak{g}$.

2. Далее, введем кососкалярное произведение

$$[[X, Y]] = \int_{-\infty}^\infty dx \langle X, [A, Y] \rangle. \quad (32)$$

Выражая левые части соотношений вронскиана (30) через $S_a^\pm$, $T_a^\pm$ и их вариации $\delta S_a^\pm$, $\delta T_a^\pm$, перепишем соотношения (30) в виде

$$\begin{aligned} [[w, e_{a;\mp\alpha}^\pm(x, t, \lambda)]] &= \pm i\alpha(A)s_{a;\pm\alpha}^\pm, \\ [[\text{ad}_A^{-1}\delta w, e_{a;\mp\alpha}^\pm(x, t, \lambda)]] &= i\delta s_{a;\pm\alpha}^\pm. \end{aligned} \quad (33)$$

3. Соотношения полноты для “квадратичных решений” [16], [22], [23], позволяющие любую гладкую функцию $Z(x, t)$, принимающую значения в $\mathfrak{g}_2$ и такую, что $P_{0A}Z \equiv Z$, разложить по “квадратичным решениям”, приводят к следующему результату:

$$Z(x, t) = \sum_{a=1}^6 \frac{(-1)^a}{2\pi i} \int_{l_a} d\mu \sum_{\alpha \in \delta_a^+} (\zeta_{a;\alpha}^+ e_{a;\alpha}^+ - \zeta_{a;-\alpha}^- e_{a;-\alpha}^-)(x, t, \mu), \quad (34)$$

где коэффициенты разложения имеют вид

$$\zeta_{a;\mp\alpha}^\pm = i[[Z(x, t), e_{a;\mp\alpha}^\pm(x, t, \lambda)]]. \quad (35)$$

4. Соотношение полноты “квадратичных решений” позволяет доказать, что если $Z(x, t) = 0$, то коэффициенты разложения $\zeta_{a;\mp\alpha}^\pm$ исчезают, и наоборот.

4.2. Минимальный набор данных рассеяния и обобщенные преобразования Фурье. Идея интерпретировать метод ОЗР как обобщенное преобразование Фурье имеет свое начало в знаменитой работе Абловица, Каупа, Ньюэлла, Сегура [24]. Для системы Захарова–Шабата она была доказана в работах [25], [26] и далее расширена на различные обобщения системы Захарова–Шабата [16], [22], [23], [27]–[29] (см. также книгу [5]).

Здесь мы изучим отображение из фазового пространства $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}_2} \simeq \{w(x, t) \in \mathfrak{g}_2^{(0)}\}$ на один из минимальных наборов данных рассеяния $\tilde{T}_k$, $k = 1, 2$ (25).

В работе [22] доказано, что $e_{a;\alpha}^\pm(x, t, \lambda)$ образует полный набор решений в $\mathcal{F}$ для общего потенциала. Принимая во внимание упрощения, которые возникают благодаря симметрии редукции, и пренебрегая возможным дискретным спектром оператора L , получим следующие разложения для $[A, w]$ и δw :

$$w(x, t) = \sum_{a=1}^6 \frac{(-1)^a}{2\pi i} \int_{l_a} d\mu \sum_{\alpha \in \delta_a^+} \alpha(A)(s_{a;\alpha}^+ e_{a;\alpha}^+ + s_{a;\alpha}^- e_{a;-\alpha}^-)(x, t, \mu), \quad (36)$$

$$\text{ad}_A^{-1}\delta w(x, t) = \sum_{a=1}^6 \frac{(-1)^a}{2\pi i} \int_{l_a} d\mu \sum_{\alpha \in \delta_a^+} (\delta s_{a;\alpha}^+ e_{a;\alpha}^+ - \delta s_{a;\alpha}^- e_{a;-\alpha}^-)(x, t, \mu). \quad (37)$$

Теперь мы можем распознать минимальный набор данных рассеяния $\tilde{T}_{1,2}$ в коэффициентах разложения потенциала $w(x, t)$ по “квадратичным решениям”.

ТЕОРЕМА 1. *Минимальный набор данных рассеяния $\tilde{T}_1$ однозначно определяет потенциал $w(x, t)$ оператора $\tilde{L}$.*

Для доказательства нужно использовать соотношение вронскиана в виде (33) и свойство 4.

4.3. Факторизация рекуррентного оператора. Разложения (36) и (37) можно рассматривать как обобщенные преобразования Фурье, которые линейаризуют соответствующее НЛЭУ. Для этого введем генерирующие операторы $\Lambda^\pm$ с помощью соотношений

$$(\Lambda^+ - \lambda^h)e_{a,\mp\alpha}^\pm(x, \lambda) = 0, \quad (\Lambda^- - \lambda^h)e_{a,\pm\alpha}^\pm(x, \lambda) = 0, \quad (38)$$

где h – некоторое целое число. Чтобы вывести явную форму для $\Lambda_\pm$, начнем с уравнения, которому удовлетворяет $\mathcal{E}_\alpha^\pm(x, t, \lambda)$:

$$i\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha^\pm}{\partial x} + [w(x, t), \mathcal{E}_\alpha^\pm(x, t, \lambda)] - \lambda[A, \mathcal{E}_\alpha^\pm(x, t, \lambda)] = 0. \quad (39)$$

Кроме того, следует разделить “ортогональную” и “параллельную” части $\mathcal{E}_\alpha^\pm$:

$$\mathcal{E}_\alpha^\pm = e_\alpha^\pm(x, t, \lambda) + k_{1,\alpha}^\pm(x, t)A + k_{5,\alpha}^\pm(x, t)B, \quad (40)$$

и учесть градуировку алгебры. Это означает, что

$$e_\alpha^\pm(x, t, \lambda) = \sum_{p=0}^5 e_{p,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \quad e_{p,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) \in \mathfrak{g}_2^{(p)}. \quad (41)$$

Теперь подставим уравнения (40), (41) в формулу (39) и приравняем нулю все проекции на $\mathfrak{g}_2^{(p)}$ для $p = 0, \dots, 5$. После некоторых трудоемких вычислений получим

$$\begin{aligned} k_{1,\alpha}^\pm(x, t) &= \kappa_{1,\alpha;0}^\pm + \frac{i}{6} \int_{\pm\infty}^x dy \langle [w(y, t), e_{1,\alpha}^\pm(y, t, \lambda)], B \rangle, \\ k_{5,\alpha}^\pm(x, t) &= \kappa_{5,\alpha;0}^\pm + \frac{i}{6} \int_{\pm\infty}^x dy \langle [w(y, t), e_{5,\alpha}^\pm(y, t, \lambda)], A \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

для “параллельных” членов и ряд рекуррентных соотношений для “ортогональных”:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 e_{0,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{5,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \\ \Lambda_1^\pm e_{1,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{0,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) + w(x, t) \kappa_{1,\alpha;0}^\pm, \\ \Lambda_0 e_{2,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{1,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \\ \Lambda_0 e_{3,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{2,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \\ \Lambda_0 e_{4,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{3,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \\ \Lambda_5^\pm e_{5,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) &= \lambda e_{4,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) + \text{ad}_A^{-1}[B, w(x, t)] \kappa_{5,\alpha;0}^\pm, \end{aligned} \quad (43)$$

где операторы Λ_0 , $\Lambda_1^\pm$ и $\Lambda_5^\pm$ имеют вид

$$\Lambda_0 Z = \text{ad}_A^{-1} \left\{ i \frac{\partial Z}{\partial x} + [w(x, t), Z(x, t)] \right\}, \quad Z \in \mathfrak{g}_2^{(p)}, \quad p = 0, 2, 3, 4, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\pm X &= \text{ad}_A^{-1} \left\{ i \frac{\partial X}{\partial x} + P_{0A}[w(x, t), X(x, t)] \right\} - \\ &- \frac{i}{6} w(x, t) \int_{\pm\infty}^x dy \langle [w(y, t), X(y, t)], B \rangle, \quad Z \in \mathfrak{g}_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Lambda_5^\pm X = \text{ad}_A^{-1} \left\{ i \frac{\partial Y}{\partial x} + P_{0A}[w(x, t), Y(x, t)] - \right. \\ \left. - \frac{i}{6} [B, w(x, t)] \int_{\pm\infty}^x dy \langle [w(y, t), X(y, t)], B \rangle \right\}, \quad Y \in \mathfrak{g}_2^{(5)}.$$

Эти рекуррентные соотношения позволяют вычислить рекуррентные операторы, для которых $e_{p,\alpha}^\pm(x, t, \lambda)$ являются собственными значениями. Если мы предположим для простоты, что все константы интегрирования $\kappa_{1,\alpha;0}^\pm$ и $\kappa_{5,\alpha;0}^\pm$ исчезают, то получим

$$\Lambda_{[p]}^\pm e_{p,\alpha}^\pm(x, t, \lambda) = \lambda^6 e_{p,\alpha}^\pm(x, t, \lambda), \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{[0]}^\pm &= \Lambda_1^\pm \Lambda_0^3 \Lambda_5^\pm \Lambda_0, & \Lambda_{[1]}^\pm &= \Lambda_0^3 \Lambda_5^\pm \Lambda_0 \Lambda_1^\pm, & \Lambda_{[2]}^\pm &= \Lambda_0^2 \Lambda_5^\pm \Lambda_0 \Lambda_1^\pm \Lambda_0, \\ \Lambda_{[3]}^\pm &= \Lambda_0 \Lambda_5^\pm \Lambda_0 \Lambda_1^\pm \Lambda_0^2, & \Lambda_{[4]}^\pm &= \Lambda_5^\pm \Lambda_0 \Lambda_1^\pm \Lambda_0^3, & \Lambda_{[5]}^\pm &= \Lambda_0 \Lambda_1^\pm \Lambda_0^3 \Lambda_5^\pm. \end{aligned} \quad (47)$$

5. ВЫВОДЫ

Иерархия двумерной теории поля Тоды содержит также уравнения типа мКдФ [11], [30]–[32]. Поскольку показателями алгебры $\mathfrak{g}_2$ являются 1 и 5, простейшее нетривиальное уравнение такого типа должно быть пятого порядка. В соответствующем представлении Лакса $[L', M'] = 0$ оператор Лакса L' подобен оператору в уравнении (2), но теперь r_{10} , r_{01} и r_{32} – действительные постоянные, а второй оператор принимает вид

$$\begin{aligned} M' \psi &\equiv i \frac{d\psi}{dt} + \sum_{k=0}^5 \lambda^k V_k(x, t) \psi(x, t, \lambda) = 0, \\ V_0(x, t) &= v_1(x, t) H_1 + v_2(x, t) H_2, \quad V_k(x, t) = \sum_{\text{ht } \alpha = k \pmod{6}} v_\alpha^{(k)}(x, t) E_\alpha. \end{aligned} \quad (48)$$

Подробное изучение этой темы должно учитывать возможные дискретные собственные значения оператора L , что будет проделано в отдельной работе.

Мы кратко изложили спектральные свойства операторов Лакса L и $\tilde{L}$, которые отвечают за разрешимость двумерных теорий поля Тоды, связанных с исключительной алгеброй Ли $\mathfrak{g}_2$. Мы показали, что метод ОЗР для этих операторов, во-первых, можно рассматривать как ЗРГ на наборе из шести лучей и, во-вторых, можно понимать как обобщенное преобразование Фурье. Мы построили минимальный набор данных рассеяния для L и, наконец, вывели ряд рекуррентных операторов, для которых “квадратичные решения” являются собственными функциями. Специфика алгебры $\mathfrak{g}_2$ приводит к довольно нетривиальным свойствам этих операторов по отношению к факторизации (см. (47)).

Рекуррентные операторы обуславливают все фундаментальные свойства НЛЭУ такие, как порождение класса интегрируемых уравнений, их сохраняющиеся величины, а также иерархии гамильтоновых структур. Мы планируем опубликовать эти результаты позже. Для классического ряда простых алгебр Ли эти факты были получены в работах [5], [16], [22].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Базис Картана–Вейля и автоморфизм Кокстера алгебры $\mathfrak{g}_2$

Здесь мы предложим в явной форме семимерное представление алгебры $\mathfrak{g}_2$ наряду с некоторыми дополнительными свойствами. Ее старший вес $2\alpha_1 + \alpha_2 = 21$. Система весов состоит из коротких корней алгебры $\mathfrak{g}_2$ и $00 = \vec{0}$. Упорядочим их в соответствии с их высотой, а именно

$$\gamma_1 = 21, \quad \gamma_2 = 11, \quad \gamma_3 = 10, \quad \gamma_4 = 00, \quad \gamma_5 = \overline{10}, \quad \gamma_6 = \overline{11}, \quad \gamma_7 = \overline{21}.$$

Веса γ_j помечают элементы ортонормированного базиса нашего представления. Согласно общей теории [15] элемент Картана алгебры $\mathfrak{g}_2$, дуальный вектору $\vec{a}$, является диагональной матрицей, которая имеет вид

$$H_{\vec{a}} = \sum_{j=1}^7 (\vec{a}, \gamma_j) \mathcal{E}_{jj}, \quad (\text{П.1})$$

где $(\mathcal{E}_{km})_{sn} = \delta_{ks} \delta_{mn}$. Далее, для определенности мы предположим, что длины корней равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$. Таким образом, если мы положим последовательно $\vec{a} = 10 \equiv \alpha_1$ и $\vec{a} = 01 \equiv \alpha_2$ и воспользуемся явной формой системы корней (5), то получим

$$H_{10} = \frac{1}{3}(\mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22} + 2(\mathcal{E}_{33} - \mathcal{E}_{55}) + \mathcal{E}_{66} - \mathcal{E}_{77}), \quad H_{01} = \mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33} + \mathcal{E}_{55} - \mathcal{E}_{66}. \quad (\text{П.2})$$

Опуская остальные детали, выпишем генераторы Вейля:

$$\begin{aligned} E_{10} &= \mathcal{E}_{12} - \mathcal{E}_{67} + \sqrt{2}(\mathcal{E}_{34} - \mathcal{E}_{45}), & E_{01} &= \mathcal{E}_{23} - \mathcal{E}_{56}, \\ E_{11} &= \mathcal{E}_{13} - \mathcal{E}_{57} - \sqrt{2}(\mathcal{E}_{24} - \mathcal{E}_{46}), & E_{31} &= \mathcal{E}_{15} - \mathcal{E}_{37}, \\ E_{21} &= \mathcal{E}_{25} - \mathcal{E}_{36} + \sqrt{2}(\mathcal{E}_{14} - \mathcal{E}_{47}), & E_{32} &= \mathcal{E}_{16} - \mathcal{E}_{27}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Далее, вычислим автоморфизм Кокстера (7) на векторах $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ с ограничением $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Результат таков:

$$C\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

Следовательно, легко проверить, что C расщепляет корни $\mathfrak{g}_2$ на две орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &\equiv \{01 \rightarrow 32 \rightarrow 31 \rightarrow \overline{01} \rightarrow \overline{32} \rightarrow \overline{31}\}, \\ \mathcal{O}_2 &\equiv \{10 \rightarrow \overline{11} \rightarrow \overline{21} \rightarrow \overline{10} \rightarrow 11 \rightarrow 21\}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Наконец, упомянем, что два особых элемента Картана A и B (18), (16) дуальны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ -\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно легко проверить, что

$$C\vec{a} = \omega\vec{a}, \quad C\vec{b} = \omega^5\vec{b}. \quad (\text{П.6})$$

Эти данные помогут вычислить действия операторов ad_A^{-1} и $\text{ad}_A^{-1} \text{ad } B$, которые фигурируют в рекуррентных операторах (45).

Благодарности. Автор выражает признательность А. Погребкову, Г. Ландольфи и Б. Конопельченко за предоставление возможности участвовать в работе конференции, а также за теплый прием в университете г. Лечче. Автор также признателен рецензенту за тщательное чтение статьи.

Список литературы

- [1] M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli (eds.), *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, Proceedings of the Seventh Workshop (NEEDS'91) (Baia Verde, June 19–29, 1991), World Scientific, Singapore, 1992.
- [2] F. Calogero, A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons*, v. 1: *Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*, Studies in Mathematics and its Applications, **13**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1982.
- [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [4] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1990.
- [5] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski (eds.), *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*, Lecture Notes in Physics, **748**, Springer, Berlin, 2008.
- [6] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.
- [7] V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, *Commun. Math. Phys.*, **74**:1 (1980), 21–40.
- [8] A. P. Fordy, P. P. Kulish, *Commun. Math. Phys.*, **89**:3 (1983), 427–443.
- [9] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **165**:1 (2010), 3–24, arXiv: 0911.1675.
- [10] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Probl.*, **17**:4 (2001), 937–957, arXiv: nlin/0101030.
- [11] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **24**, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [12] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [13] A. V. Mikhailov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [14] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*: Ч. 2. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972.
- [15] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, **34**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [16] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *Commun. Math. Phys.*, **103**:4 (1986), 549–568.
- [17] P. J. Caudrey, *Phys. Lett. A*, **79**:4 (1980), 264–268; *Physica D*, **6**:1 (1982), 51–66.
- [18] R. Beals, R. R. Coifman, *Commun. Pure Appl. Math.*, **37**:1 (1984), 39–90; **38**:1 (1985), 29–42.
- [19] R. Beals, D. Sattinger, *Commun. Math. Phys.*, **138**:3 (1991), 409–436, arXiv: math/9712253.
- [20] G. G. Grahovski, “On the reductions and scattering data for the CBC system”, *Proceedings of the 3rd International Conference on Geometry, Integrability and Quantization* (Varna, Bulgaria, June 14–23, 2001), eds. I. M. Mladenov, L. N. Naber, Coral Press Scientific, Sofia, 2002, 262–277; “On the reductions and scattering data for the generalized Zakharov–Shabat systems”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II* (Gallipoli, Italy, June 27–July 6, 2002), eds. M. J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari, World Scientific, Singapore, 2003, 71–78.
- [21] T. Valchev, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **19** (2010), 73–86.
- [22] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *J. Math. Phys.*, **35**:7 (1994), 3687–3725.
- [23] V. S. Gerdjikov, *Inverse Probl.*, **2**:1 (1986), 51–74.

- [24] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [25] D. J. Kaup, *J. Math. Anal. Appl.*, **54**:3 (1976), 849–864.
- [26] V. S. Gerdjikov, E. Kh. Khristov, *Bulg. J. Phys.*, **7**:1 (1980), 28–41; **7**:2 (1980), 119–133.
- [27] V. S. Gerdjikov, P. P. Kulish, *Physica D*, **3**:3 (1981), 549–564.
- [28] D. J. Kaup, A. C. Newell, *Adv. Math.*, **31**:1 (1979), 67–100.
- [29] V. S. Gerdjikov, “Algebraic and analytic aspects of soliton type equations”, *The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics* (South Hadley, MA, USA, June 17–21, 2001), Contemporary Mathematics, **301**, eds. J. Bona, S. R. Choudhury, D. J. Kaup, AMS, Providence, RI, 2002, 35–68.
- [30] A. V. Mikhailov, M. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **79**:4 (1981), 473–490.
- [31] V. S. Gerdjikov, “ Z_N -reductions and new integrable versions of derivative nonlinear Schrödinger equations”, *Nonlinear Evolution Equations: Integrability and Spectral Methods*, ed. A. P. Fordy, A. Degasperis, M. Lakshmanan, Manchester Univ. Press, Manchester, 1981, 367–379.
- [32] D. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood, *Nucl. Phys. B*, **401**:3 (1993), 663–697; **409**:3 (1993), 509–546, arXiv: hep-th/9305160.