Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Разрушение решений уравнения теплопроводности с двойной нелинейностью, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 339–343

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:19:41

© 2012 г.

М. О. Корпусов*

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрена модельная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с двойной нелинейностью. Для доказательства разрушения решения использован модифицированный метод Левина.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, нелинейная теплопроводность, нелинейные параболические уравнения с двойной нелинейностью, нелинейные смешанные краевые задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу с двойной нелинейностью из теории горения [1]:

$$\frac{\partial \phi(x, u)}{\partial t} - \Delta(|u|^{q_1} u) = |u|^{q_2} u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\phi(x, u) = u + \sum_{k=1}^n a_k(x) |u|^{p_k-2} u, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

где $q_1, q_2 > 0$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Отметим, что уравнения с двойными нелинейностями изучались в работах [2]–[10]. Для исследования задачи мы используем модифицированный метод Левина, развитый в работе [11].

Постановка задачи. Предположим, что выполнены следующие условия для функции $\phi(x, u)$: коэффициенты $a_k(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и $a_k(x) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega$, а показатели $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1, n}$. Решение задачи (1)–(3) будем понимать в классическом смысле: $u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$ при некотором $T > 0$.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
E-mail: korpusov@gmail.com

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Выпишем основное дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0,$$

где $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0), \quad \left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0),$$

причем $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$. Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1}, \quad (4)$$

где

$$A^2 \equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0) \right]. \quad (5)$$

При этом

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty. \quad (6)$$

3. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Прежде всего предположим, что найдется некоторое $T > 0$, для которого существует классическое решение задачи (1)–(3). Введем ряд обозначений. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi(t) \equiv & \frac{1}{q_1 + 2} \int_0^t \|u\|_{q_1+2}^{q_1+2} ds + \sum_{k=1}^n \frac{p_k - 1}{q_1 + p_k} \int_0^t \int_{\Omega} a_k(x) |u|^{p_k+q_1} dx ds + \\ & + \frac{1}{(q_1 + 2)(q_1 + p_{k_0})} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k - 1}{(q_1 + p_k)(q_1 + p_{k_0})} \int_{\Omega} a_k(x) |u_0|^{p_k+q_1} dx, \end{aligned}$$

где $p_{k_0} = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ и $\|u\|_q^q = \int_{\Omega} |u|^q dx$. Пусть также

$$\begin{aligned} J(t) \equiv & \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{q_1} (u')^2 dx ds + \sum_{k=1}^n (p_k - 1) \int_0^t \int_{\Omega} a_k(x) |u|^{q_1+p_k-2} (u')^2 dx ds + \\ & + \frac{1}{q_1 + 2} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k - 1}{q_1 + p_k} \int_{\Omega} a_k(x) |u_0|^{p_k+q_1} dx. \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для всех $t \in [0, T]$ имеет место следующее неравенство:

$$(\Phi')^2 \leq (q_1 + p_{k_0})\Phi J. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на неравенстве Коши–Буняковского.

Приступим к выводу энергетических равенств. Сначала умножим обе части уравнения (1) на $|u|^{q_1}u$ и проинтегрируем по области Ω . После интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2 dx = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}. \quad (8)$$

Теперь умножим обе части уравнения (1) на $(|u|^{q_1}u)'$ и проинтегрируем по области Ω , тогда после интегрирования по частям получим равенство

$$(q_1 + 1)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2 dx = \frac{q_1 + 1}{q_1 + q_2 + 2} \frac{d}{dt} \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2},$$

из которого после ряда преобразований имеем

$$(q_1 + q_2 + 2)\frac{dJ}{dt} + \frac{q_1 + q_2 + 2}{2q_1 + 2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2 dx = \frac{d}{dt} \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по времени и получим следующее равенство:

$$(q_1 + q_2 + 2)J + \frac{q_1 + q_2 + 2}{2q_1 + 2} \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2 dx - E(0) = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} E(0) \equiv & (q_1 + q_2 + 2) \left(\frac{1}{q_1 + 2} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k - 1}{q_1 + p_k} \int_{\Omega} a_k(x) |u_0|^{p_k+q_1} dx \right) + \\ & + \frac{q_1 + q_2 + 2}{2q_1 + 2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2 dx - \|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (8) и (9) выводим равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + E(0) = (q_1 + q_2 + 2)J + \left(\frac{q_1 + q_2 + 2}{2q_1 + 2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2 dx. \quad (11)$$

Теперь потребуем выполнения условия $q_2 \geq q_1$, тогда из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + E(0) \geq (q_1 + q_2 + 2)J.$$

Отсюда и из неравенства (7) получаем искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha = \frac{q_1 + q_2 + 2}{q_1 + p_{k_0}}, \quad \beta = E(0). \quad (12)$$

Потребуем выполнения условия $q_2 + 2 > p_{k_0}$, тогда, очевидно, $\alpha > 1$.

Рассмотрим случаи $E(0) > 0$ и $E(0) \leq 0$. Начнем со случая $E(0) > 0$, поскольку он более сложный. Воспользуемся теоремой 1 и получим, что при выполнении условий

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > \left(\frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right)^{1/2} > 0 \quad (13)$$

имеет место разрушение за конечное время. Рассмотрим подробнее второе неравенство в (13). После ряда преобразований оно приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2} &> \frac{q_1 + q_2 + 2}{2q_1 + 2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_0|^{q_1} u_0)|^2 dx + \\ &+ \frac{q_1 + p_{k_0}}{2} \left(\frac{1}{q_1 + 2} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k - 1}{q_1 + p_k} \int_{\Omega} a_k(x) |u_0|^{p_k+q_1} dx \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Случай $E(0) \leq 0$ значительно проще, и результат о разрушении решения получается из тех же формул теоремы 1, в которых формально нужно положить $\beta = 0$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены указанные в разделе 1 условия для функции $\phi(x, s)$, тогда при выполнении начального условия (14) и условий $q_2 \geq q_1$, $q_2 + 2 > p_{k_0}$ время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно найдется такое T_0 , что выполнено соотношение (4) и имеет место предельное равенство (6), где A^2 задано в (5), постоянная α – в (12), постоянная β определяется как

$$\beta = \begin{cases} E(0) & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0 \end{cases}$$

и $E(0)$ задано формулой (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В точности так же, как и для задачи (1)–(3), можно получить результат о разрушении решения для следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \phi(x, u)}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla(|u|^{q_1} u)|^{p-2} \nabla(|u|^{q_1} u)) = |u|^{q_2} u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где, как и выше, $\phi(x, u)$ имеет вид (2), параметры $q_1, q_2 > 0$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением для квазилинейных уравнений параболического типа*, Наука, М., 1987.
- [2] А. С. Калашников, *УМН*, **42**:2(254) (1987), 135–176.
- [3] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [4] Р. А. Raviart, *J. Functional Analysis*, **5**:2 (1970), 299–328.
- [5] А. В. Иванов, *Алгебра и анализ*, **4**:6 (1992), 114–130.
- [6] Г. И. Лаптев, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 83–112.
- [7] Г. И. Лаптев, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 43–64.
- [8] Н. А. Levine, S. R. Park, J. Serrin, *J. Differential Equations*, **142**:1 (1998), 212–229.
- [9] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, 2001.
- [10] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **69** (1977), 77–102.
- [11] A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **15**, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

Поступила в редакцию 23.12.2011