Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, В. Я. Томашпольский, Неустойчивость
солитонов при изгибе и кручении упругого стержня,
ТМФ, 2012, том 172, номер 3, 375–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6959>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:10:59

© 2012 г. А. Т. Ильичев*, В. Я. Томашпольский†

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Изучается устойчивость плоских солитонных решений уравнений, описывающих динамику бесконечного нерастяжимого и бессдвигового стержня, относительно пространственных трехмерных возмущений. В результате линеаризации вокруг солитонного решения получено неоднородное скалярное уравнение. Это уравнение приводит к обобщенной спектральной задаче. Для установления неустойчивости необходимо убедиться в существовании неустойчивого собственного значения (собственного значения с положительной вещественной частью). Соответствующее доказательство неустойчивости проводится при помощи локального построения функции Эванса, зависящей только от спектрального параметра. Эта функция аналитична в правой комплексной полуплоскости и имеет по крайней мере один ноль на положительной вещественной полуоси, совпадающий с неустойчивым собственным значением обобщенной спектральной задачи.

Ключевые слова: упругий стержень, солитон, линеаризация, неустойчивый спектр, функция Эванса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе проводится исследование устойчивости солитонного решения динамических уравнений теории упругих стержней Кирхгоффа [1] и Клебша [2] (см. также работу [3]). Солитонное решение описывает уединенную волну, которая для краткости будет называться солитоном, хотя всеми свойствами солитона эта волна не обладает. Теория Кирхгоффа–Клебша применима к движениям тонких стержней с малыми деформациями, хотя смещения и вращения стержня могут быть достаточно велики. Рассматривается бессдвиговый нерастяжимый стержень, т. е. стержень, описание движения которого сводится к описанию движения его срединной линии $\mathcal{G}(t)$, и длина нормированного касательного вектора к $\mathcal{G}(t)$ остается единичной все время движения. Иными словами, рассматриваются только изгибные деформации стержня и деформации, вызванные кручением.

---

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: ilichev@mi.ras.ru

†Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Формы бегущих волн изгиба описаны, по-видимому, еще Эйлером [4]. Динамика изгиба плоских стержней обсуждается в работе [5], где дана классификация бегущих волн, а также замечено, что система динамических уравнений может быть сведена к единственному дифференциальному уравнению в частных производных и алгебраическому уравнению, представляющему собой условие нерастяжимости. Это наблюдение вызвало предположение, что система уравнений, описывающая динамику плоского нерастяжимого стержня, является вполне интегрируемой. Однако численные результаты, полученные в работе [6], заставляют думать, что система неинтегрируема, так как уединенные волны на плоских стержнях взаимодействуют неупруго, т. е. не являются солитонами в строгом смысле. В работе [7] в замкнутой форме получены решения типа бегущих волн в линейно растяжимом и бесдвиговом (тонком) плоском стержне. В работе [8] авторы представили описание нерастяжимых стержней с кручением и получили выражения для пространственных (трехмерных) бегущих волн при наличии крутящего момента. В работе [9] обсуждается динамика изгиба плоского нерастяжимого стержня при условии пренебрежения вращательной частью кинетической энергии, которая мала по сравнению с полной энергией стержня. Доказана орбитальная устойчивость солитонов (солитонных решений в форме петли) по отношению к плоским возмущениям. Анализ устойчивости обобщен в работе [10] для случая, когда такого пренебрежения нет. Для случая малых отклонений стержня от главной плоскости изгиба, когда можно пренебречь кручением, в работах [11], [12] была установлена неустойчивость солитонов по отношению к пространственным (выводящим из главной плоскости изгиба) возмущениям. В работе [13] авторы рассматривают вопрос существования уединенных волн в общей модели стержня, которая учитывает эффекты сдвига и сжатия/растяжения. В работе [14] выведена гамильтонова система, описывающая динамику таких стержней.

В настоящей работе установлена неустойчивость петлевого солитона относительно трехмерных возмущений. Динамика стержня описывается уравнениями (2.1), (2.2) (см. ниже), учитывающими кручение. Используется малость вращательной части кинетической энергии по сравнению с полной энергией стержня. В силу этого обстоятельства в линеаризованном уравнении слагаемые, отвечающие вращательной кинетической энергии, считаются имеющими второй порядок малости и, следовательно, не учитываются. Результат о неустойчивости получен при помощи свойств функции Эванса. Уравнение (3.7) для определения неустойчивой собственной функции имеет такой же вид, как соответствующее уравнение в работе [15], однако потенциал p^0 в этом уравнении отличен от потенциала из работы [15], что приводит к нетривиальному анализу и отличию функций Эванса в обоих случаях (см. работу [12]). Использование функции Эванса для установления неустойчивости уединенных волн впервые было предпринято в статье [16]. Идеи Эванса [17] в параболических задачах были развиты в работах [18]–[20]. Авторы работы [15] обобщили результаты работы [16] на случай уравнений типа Буссинеска, когда в решениях соответствующей обобщенной спектральной задачи присутствуют две моды, убывающие на бесконечности. Использование функции Эванса для исследования устойчивости волновых движений в различных областях физики было предпринято в работах [11], [21]–[28].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Основные уравнения. Выберем декартову систему координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Будет рассматриваться пространственная кривая $\mathcal{G}(t)$, которая является серединной кривой призматического динамически симметричного (главные моменты инерции равны) и нерастяжимого стержня. Кривая $\mathcal{G}(t)$ параметризована длиной дуги s . Предположим, что в начальный момент времени эта кривая совпадает с осью z . Положение кривой может изменяться со временем, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$. В каждой точке кривой определим базис $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$, где $\mathbf{d}_3 = \partial \mathbf{x} / \partial s$ и $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ – единичные векторы в плоскости, ортогональной $\mathbf{d}_3$. Тройка векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ образует правосторонний ортонормальный базис в каждой точке $\mathcal{G}(t)$. Углы Эйлера θ, ψ и ϕ при движении стержня зависят от s и t ; θ является углом между осью z и касательным вектором $\mathbf{d}_3$, угол ψ измеряет отклонение кривой $\mathcal{G}(t)$ от главной плоскости изгиба (x, z) , а ϕ – угол кручения (см. рис. 1 в работе [8]). Касательный вектор $\mathbf{d}_3(s, t)$ имеет компоненты τ_1, τ_2, τ_3 :

$$\tau_1 = \cos \theta, \quad \tau_2 = \cos \psi \sin \theta, \quad \tau_3 = \sin \psi \sin \theta.$$

Выражения для $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ через углы θ, ψ и ϕ даны в работе [8]. Наряду с “захваченным” базисом $\{\mathbf{d}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим ортонормальный базис $\{\tilde{\mathbf{d}}_i\}$, который получается вращением по часовой стрелке пары векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ вокруг $\mathbf{d}_3$ на угол кручения ϕ , т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_1 &= (\cos \phi) \mathbf{d}_1 - (\sin \phi) \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\mathbf{d}}_2 &= (\sin \phi) \mathbf{d}_1 + (\cos \phi) \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\mathbf{d}}_3 &= \mathbf{d}_3. \end{aligned}$$

В модели динамики стержня Кирхгоффа полная сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(s, t)$ и полный момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}(s, t)$ разлагаются по базису $\mathbf{d}_i$: $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{d}_i$, $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 M_i \mathbf{d}_i$. Уравнение состояния линейной упругости до членов порядка $O(S/R^2)$ (S – площадь поперечного сечения, R – радиус кривизны $\mathcal{G}(t)$) записывается в виде [3], [8]

$$\mathbf{M} = EI\kappa_1 \mathbf{d}_1 + EI\kappa_2 \mathbf{d}_2 + \mu J\kappa_3 \mathbf{d}_3, \quad (2.1)$$

где E – модуль Юнга, μ – модуль сдвига, I – момент инерции поперечного сечения. Упругий параметр J дается в работе [8] (формула (2.24)); для стержней круглого сечения он равен $2I$. Величины κ_i , $i = 1, 2, 3$, являются компонентами вектора кривизны

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 \mathbf{d}_1 + \kappa_2 \mathbf{d}_2 + \kappa_3 \mathbf{d}_3.$$

Сохранение импульса и углового момента и уравнения состояния (2.1) приводят к уравнениям для силы и момента [3], [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \rho S \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{M}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{F} &= \rho I (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по s , а точка вверху – по t ; ρ – начальная плотность материала стержня.

Произведем далее следующие масштабные преобразования:

$$s \rightarrow \nu s, \quad \mathbf{x} \rightarrow \nu \mathbf{x}, \quad t \rightarrow \beta t, \quad \mathbf{F} \rightarrow \frac{\nu^2}{\beta^2} \mathbf{F},$$

где ν – характерная длина волны, а $\beta = \nu^2 \sqrt{\rho S / (EI)}$. Эти масштабные преобразования влекут за собой замены $\mathbf{d}_i \rightarrow \mathbf{d}_i$, $\kappa \rightarrow \kappa / \nu$, $M \rightarrow EI \nu^{-1} M$. В новых безразмерных переменных уравнения (2.1), (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'' &= \ddot{\mathbf{d}}_3, \\ \mathbf{M}' + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} &= \varepsilon (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \\ M_1 &= \kappa_1, \quad M_2 = \kappa_2, \quad M_3 = \Omega \kappa_3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Omega = \mu J / (EI)$, $\varepsilon = I / (\nu^2 S) \sim S / R^2$ – малая величина. В базисе $\{\mathbf{d}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, κ_i выражаются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \partial_s \theta \sin \phi - \partial_s \psi \sin \theta \cos \phi, \\ \kappa_2 &= \partial_s \theta \cos \phi - \partial_s \psi \sin \theta \sin \phi, \\ \kappa_3 &= \partial_s \psi \cos \theta + \partial_s \phi. \end{aligned}$$

Проецируя первое из уравнений (2.3) на оси фиксированной декартовой системы координат, а второе – на векторы базиса $\tilde{\mathbf{d}}_i$, $i = 1, 2, 3$, получим шесть уравнений для θ , ψ , ϕ , F^x , F^y , F^z :

$$\begin{aligned} \partial_{ss}^2 F^x &= \partial_{tt}^2 (\cos \psi \cos \theta), \\ \partial_{ss}^2 F^y &= \partial_{tt}^2 (\sin \psi \sin \theta), \\ \partial_{ss}^2 F^z &= \partial_{tt}^2 (\cos \theta), \\ \partial_{ss}^2 \psi \sin \theta + 2 \partial_s \psi \partial_s \theta \cos \theta - \Omega (\partial_s \psi \cos \theta + \partial_s \phi) \partial_s \theta - \\ &\quad - F^x \sin \psi + F^y \cos \psi = \varepsilon (\partial_{tt}^2 \psi \sin \theta - 2 \partial_t \theta \partial_t \phi), \\ \partial_{ss}^2 \theta - (\partial_s \psi)^2 \sin \theta \cos \theta + \Omega (\partial_s \psi \cos \theta + \partial_s \phi) \partial_s \psi \sin \theta + \\ &\quad + (F^x \cos \psi + F^y \sin \psi) \cos \theta - F^z \sin \theta = \\ &= \varepsilon (\partial_{tt}^2 \theta + (\partial_t \psi)^2 \sin \theta \cos \theta + 2 \partial_t \psi \partial_t \phi \sin \theta), \\ \Omega \partial_s (\partial_s \psi \cos \theta + \partial_s \phi) &= 2 \varepsilon \partial_t (\partial_t \psi \cos \theta + \partial_t \phi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. Солитонные решения. Плоская динамика (чистый изгиб) стержня описывается системой уравнений, которая следует из (2.4) при $\psi = \phi = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 (\cos \theta) &= \partial_{ss}^2 (T \cos \theta - G \sin \theta), \\ \partial_{tt}^2 (\sin \theta) &= \partial_{ss}^2 (T \sin \theta + G \cos \theta), \\ \varepsilon \partial_{tt}^2 \theta - \partial_{ss}^2 \theta &= G, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где T – натяжение, G – сила сдвига:

$$\mathbf{F} = F^x \mathbf{i} + F^z \mathbf{k} = T \mathbf{d}_3 + G \mathbf{n},$$

а $\mathbf{d}_3$ и $\mathbf{n}(= \mathbf{d}_1)$ – касательный и нормальный векторы к кривой соответственно:

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta.$$

Рис. 1

Предположим, что $T(s = \infty, t) = T_\infty = \text{const}$.

Система уравнений (2.5) описывает плоскую динамику стержня без кручения. Она имеет солитонное решение [9], [10], которое описывает бегущую с постоянной скоростью c волну:

$$\tau_1^s = \tau_1^0 + O(\varepsilon), \quad \tau_2^s = \tau_2^0 + O(\varepsilon), \quad T^s = T^0 + O(\varepsilon), \quad T^0 = (T_\infty - c^2)\tau_1^0 - c^2, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1^0 &= 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{T_\infty - c^2} \zeta, \\ \tau_2^0 &= \mp 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{T_\infty - c^2} \zeta \operatorname{sh} \sqrt{T_\infty - c^2} \zeta, \quad \zeta = s - ct, \quad 0 \leq c < T_\infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что натяжение на бесконечности T_∞ может быть приравнено к единице при помощи нормировок $t \rightarrow t/T_\infty$, $s \rightarrow s/\sqrt{T_\infty}$. Введем новые координаты (x_1, x_2) и кривую $\mathcal{K}$ так, что вдоль $\mathcal{K}$

$$\frac{dx_1}{d\zeta} = \tau_1^0, \quad \frac{dx_2}{d\zeta} = \tau_2^0.$$

Форма кривой $\mathcal{K}$ (форма солитона возвышения в низшем порядке по ε) и касательный вектор $\{\tau_1^0, \tau_2^0, 0\}^T$ показаны на рис. 1.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Линеаризация. Рассмотрим углы Эйлера в виде

$$\theta = \theta^s, \quad \psi = \psi^s + \delta\psi, \quad \phi = \phi^s + \delta\phi,$$

где $(\theta^s, \psi^s, \phi^s)$ – углы Эйлера, отвечающие солитонному решению, а $(\delta\psi, \delta\phi)$ – малые возмущения. Тогда возмущение третьей компоненты касательного вектора принимает вид

$$\delta\tau_3 = \delta\psi \sin \theta^s. \quad (3.1)$$

Будем полагать, что

$$\{\varepsilon\delta\psi, \varepsilon\delta\phi\} \sim \{(\delta\psi)^2, (\delta\phi)^2\}, \quad (3.2)$$

так как ε мало.

Линеаризуем уравнения (2.4) вокруг солитонного решения (принимая во внимание (3.2)) и положим, что крутящий момент M_3 в возмущенном состоянии отсутствует (“не крутящие” возмущения):

$$\begin{aligned}\partial_{ss}^2 \delta F^y &= \partial_{tt}^2 (\delta \psi \sin \theta^s), \\ \partial_{ss}^2 \delta \psi \sin \theta^s + 2\partial_s \delta \psi \partial_s \theta^s \cos \theta^s - F^{xs} \delta \psi + \delta F^y &= 0, \\ \Omega \partial_s (\partial_s \delta \psi \cos \theta^s + \partial_s \delta \phi) &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Из уравнений (3.3), используя выражение (3.1), получим

$$\partial_{tt} \delta \tau_3 = \partial_{ss} (p^0 \delta \tau_3) + \partial_{ss} \delta \tau_3 - \partial_s^4 \delta \tau_3, \quad (3.4)$$

где

$$p^0 = T^0 - (\partial_\zeta \tau_1^0)^2 - (\partial_\zeta \tau_2^0)^2 - 1 = -6(1 - c^2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - c^2} \zeta. \quad (3.5)$$

3.2. Неустойчивость солитонов. Будем искать решение уравнения (3.4) в виде

$$\delta \tau_3 = e^{\lambda t} w(\lambda, \zeta), \quad \zeta = s - ct, \quad 0 \leq c < 1, \quad (3.6)$$

где w убывает экспоненциально при $\zeta \rightarrow \pm\infty$, а $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Легко понять, что функция $w(\lambda, \zeta)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению с коэффициентами, зависящими от c и λ :

$$\left(\lambda - c \frac{d}{d\zeta} \right)^2 w = \frac{d^2}{d\zeta^2} w - \frac{d^4}{d\zeta^4} w + \frac{d^2}{d\zeta^2} (p^0 w). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) записывается в матричной форме

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \mathcal{M}(\lambda, \zeta) \mathbf{y}, \\ \mathbf{y} &= \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T, \quad y_1 = w, \quad y_2 = w', \quad y_3 = w'', \quad y_4 = w''',\end{aligned}\quad (3.8)$$

где штрих означает дифференцирование по ζ , а

$$\mathcal{M}(\lambda, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 + p^{0''} & 2\lambda c + 2p^{0'} & 1 - c^2 + p^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение, сопряженное (3.7), записывается в виде

$$\left(\lambda + c \frac{d}{d\zeta} \right)^2 w^* = \frac{d^2}{d\zeta^2} w^* - \frac{d^4}{d\zeta^4} w^* + p^0 \frac{d^2}{d\zeta^2} w^*, \quad (3.9)$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{z}' &= -\mathbf{z} \mathcal{M}(\lambda, \zeta), \\ \mathbf{z} &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \quad z_4 = w^*, \quad z_3 = -w^{*'}, \quad z_2 = w^{*''} - (1 - c^2 + p^0)w^*, \\ z_1 &= -w^{*'''} + (1 - c^2 + p^0)w^{*'} - (2\lambda c + p^{0'})w^*.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Так как $\mathbf{y}(\lambda, \zeta)$ и $\mathbf{z}(\lambda, \zeta)$ удовлетворяют (3.8), (3.10) соответственно, мы имеем

$$\partial_\zeta (\mathbf{z}(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}(\lambda, \zeta)) = 0,$$

где точка обозначает скалярное произведение двух векторов.

3.2.1. *Локальный анализ.* Обозначим $\mathcal{M}_\infty(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \mathcal{M}(\lambda, \zeta)$ и $\mu_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, – собственные числа матрицы $\mathcal{M}_\infty(\lambda)$; $\mathbf{r}_\alpha(\lambda)$ – правый, а $\mathbf{l}_\alpha(\lambda)$ – левый собственные векторы $\mathcal{M}_\infty(\lambda)$. Матрица $\mathcal{M}_\infty(\lambda)$ имеет такой же вид, как соответствующая матрица в работе [15]:

$$\mathcal{M}_\infty(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda c & 1 - c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[\mathcal{M}_\infty(\lambda) - \mu\mathcal{E}] = 0$, где $\mathcal{E}$ – единичная матрица, имеет вид

$$\mu^4 - (1 - c^2)\mu^2 - 2\mu c\lambda + \lambda^2 = 0. \quad (3.11)$$

Асимптотическое поведение решений (3.4) очевидным образом определяется этими собственными значениями.

В работе [15] показано, что:

- если $|c| < 1$, а λ лежит не на мнимой оси, то (3.11) имеет два корня в правой полуплоскости и два – в левой полуплоскости комплексной плоскости; для λ , принадлежащего правой полуплоскости, обозначим два корня, принадлежащих левой полуплоскости, через μ_1 и μ_3 ;
- $\mu_1(\lambda)$ и $\mu_3(\lambda)$ имеют точки ветвления для λ , принадлежащего правой полуплоскости, и они аналитичны в окрестности начала координат:

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= -\sqrt{1 - c^2} + \frac{c\lambda}{1 - c^2} + \frac{1 + 2c^2}{2(1 - c^2)^{5/2}}\lambda^2 + O(\lambda^3), \\ \mu_3(\lambda) &= -\frac{\lambda}{1 - c} + O(\lambda^3); \end{aligned} \quad (3.12)$$

- решения (3.8) и (3.10) $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{z}_k$, $k = 1, 3$, имеющие асимптотику

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} e^{-\mu_k(\lambda)} \mathbf{y}_k(\lambda, \zeta) &= \mathbf{r}_k(\lambda), \\ \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} e^{\mu_k(\lambda)} \mathbf{z}_k(\lambda, \zeta) &= \mathbf{l}_k(\lambda), \quad k = 1, 3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

аналитичны по λ в окрестности начала координат.

Пусть Y_k – первая, а Z_k – последняя компоненты векторов $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{z}_k$, $k = 1, 3$, удовлетворяющих (3.8), (3.10) соответственно. Из (3.12), (3.13) имеем

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{-\sqrt{1-c^2}\zeta} \left(1 + \frac{c\zeta}{1 - c^2} \lambda + \left[\frac{c^2\zeta^2}{2(1 - c^2)^2} + \frac{1 + 2c^2}{2(1 - c^2)^{5/2}} \zeta \right] \lambda^2 \right) + O(\lambda^3), \\ Y_3 &= 1 - \frac{\zeta}{1 - c} \lambda + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(1 - c)^2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $\zeta \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} Z_1 &= e^{\sqrt{1-c^2}\zeta} \left(1 - \frac{c\zeta}{1 - c^2} \lambda + \left[\frac{c^2\zeta^2}{2(1 - c^2)^2} - \frac{1 + 2c^2}{2(1 - c^2)^{5/2}} \zeta \right] \lambda^2 \right) + O(\lambda^3), \\ Z_3 &= 1 + \frac{\zeta}{1 - c} \lambda + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(1 - c)^2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

при $\zeta \rightarrow -\infty$.

Ищем решение (3.7), (3.9) при λ , принадлежащих окрестности начала координат, в форме разложений

$$\begin{aligned} Y_k(\lambda) &= Y_{k0} + \lambda Y_{k1} + \frac{1}{2}\lambda^2 Y_{k2} + O(\lambda^3), \\ Z_k(\lambda) &= Z_{k0} + \lambda Z_{k1} + \frac{1}{2}\lambda^2 Z_{k2} + O(\lambda^3), \quad k = 1, 3. \end{aligned}$$

Коэффициенты этих разложений удовлетворяют определенным уравнениям [15], которые могут быть аналитически решены.

3.2.2. *Внешние системы.* Рассмотрим векторы $\mathbf{y}^\wedge(\lambda, \zeta)$, $\mathbf{z}^\wedge(\lambda, \zeta)$ с компонентами

$$\begin{aligned} y_{\alpha\wedge\beta}^\wedge &= y_{1\alpha}y_{3\beta} - y_{1\beta}y_{3\alpha}, \\ z_{\alpha\wedge\beta}^\wedge &= z_{1\alpha}z_{3\beta} - z_{1\beta}z_{3\alpha}, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где $y_{\mathbf{k}\alpha}$, $z_{\mathbf{k}\alpha}$ – компоненты векторов $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{z}_k$ соответственно. Установим соответствие между индексами $\alpha\wedge\beta$ и числами следующим образом: $1\wedge 2 \rightarrow 1$, $1\wedge 3 \rightarrow 2$, $1\wedge 4 \rightarrow 3$, $2\wedge 3 \rightarrow 4$, $2\wedge 4 \rightarrow 5$, $3\wedge 4 \rightarrow 6$. Векторы $\mathbf{y}^\wedge(\lambda, \zeta)$, $\mathbf{z}^\wedge(\lambda, \zeta)$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\mathbf{y}^{\wedge'} = \mathcal{M}^\wedge(\lambda, \zeta)\mathbf{y}^\wedge, \quad \mathbf{z}^{\wedge'} = -\mathbf{z}^\wedge\mathcal{M}^\wedge(\lambda, \zeta), \quad (3.16)$$

где матрица

$$\mathcal{M}^\wedge(\lambda, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda c + 2p^{0'} & 1 - c^2 + p^0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 - p^{0''} & 0 & 0 & 1 - c^2 + p^0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - p^{0''} & 0 & -2\lambda c - 2p^{0'} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет асимптотику

$$\mathcal{M}_\infty^\wedge(\lambda) = \mathcal{M}^\wedge(\lambda, \pm\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda c & 1 - c^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 1 - c^2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & -2\lambda c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрица $\mathcal{M}_\infty^\wedge(\lambda)$ имеет собственные значения

$$\mu_\alpha(\lambda) + \mu_\beta(\lambda), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 4, \quad \alpha < \beta.$$

3.2.3. *Функция Эванса.* Для λ , принадлежащих правой полуплоскости комплексной плоскости, матрица $\mathcal{M}_\infty(\lambda)$ имеет два собственных значения, принадлежащих левой полуплоскости. Таким образом, матрица $\mathcal{M}_\infty^\wedge(\lambda)$ имеет простое (а значит, аналитическое) собственное значение с наименьшей действительной частью

$\mu^\wedge(\lambda) = \mu_3(\lambda) + \mu_1(\lambda)$. По прямой аналогии с (3.13) имеют место решения (3.16) такие, что

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow \infty} e^{-\mu^\wedge(\lambda)} \mathbf{y}^\wedge(\lambda, \zeta) &= \mathbf{r}^\wedge(\lambda), \\ \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} e^{\mu^\wedge(\lambda)} \mathbf{z}^\wedge(\lambda, \zeta) &= \mathbf{I}^\wedge(\lambda),\end{aligned}$$

где $\mathbf{r}^\wedge(\lambda)$, $\mathbf{I}^\wedge(\lambda)$ – собственные векторы, отвечающие собственному числу $\mu^\wedge(\lambda)$. Может быть показано, что $\mathbf{y}^\wedge(\lambda, \zeta)$ и $\mathbf{z}^\wedge(\lambda, \zeta)$ – аналитические функции λ для λ , лежащих в правой комплексной полуплоскости [15].

Определим ненормированную функцию Эванса

$$\widehat{D}(\lambda) = \mathbf{z}^\wedge \cdot \mathbf{y}^\wedge = \det \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}_1(\lambda, \zeta) & \mathbf{z}_1(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}_3(\lambda, \zeta) \\ \mathbf{z}_3(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}_1(\lambda, \zeta) & \mathbf{z}_3(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}_3(\lambda, \zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Последнее равенство в формуле (3.17) справедливо в окрестности $U_\lambda(0)$ начала координат, где вектор-функции $\mathbf{y}_k(\lambda, \zeta)$, $\mathbf{z}_k(\lambda, \zeta)$, $k = 1, 3$, аналитичны.

Для $\operatorname{Re} \lambda > 0$ функция $\widehat{D}(\lambda)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда решение (3.7) экспоненциально убывает при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ [15], [19].

Нормированная функция Эванса $D(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \frac{\widehat{D}(\lambda)}{\mathbf{I}^\wedge(\lambda) \cdot \mathbf{r}^\wedge(\lambda)}.$$

При $\lambda \in U_\lambda(0)$ имеем

$$\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge = \det \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(\lambda) \cdot \mathbf{r}_1(\lambda) & \mathbf{l}_1(\lambda) \cdot \mathbf{r}_3(\lambda) \\ \mathbf{l}_3(\lambda) \cdot \mathbf{r}_1(\lambda) & \mathbf{l}_3(\lambda) \cdot \mathbf{r}_3(\lambda) \end{pmatrix} = -4(1 - c^2)^{3/2} \lambda + O(\lambda^2).$$

В работе [15] (см. также работу [16]) доказано, что $D(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

При помощи выражений для коэффициентов Y_{k0} , Y_{k1} , Y_{k2} , Z_{k0} , Z_{k1} и Z_{k2} и условий (3.14), (3.15) можно доказать следующую теорему [12].

ТЕОРЕМА 1. *Функция Эванса $D(\lambda)$, построенная для функции $w(\lambda, \zeta)$ из (3.6), аналитична в окрестности начала координат и разлагается там в сходящийся ряд Тейлора вида*

$$D(\lambda) = \frac{1 - 2c^2}{4(1 - c^2)^3} \lambda^2 + \sum_{n=3}^{\infty} e_n(c) \lambda^n. \quad (3.18)$$

При $c^2 < 1/2$ первый коэффициент разложения (3.18) отрицателен. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности начала координат функция Эванса $D(\lambda)$ отрицательна на положительной вещественной полуоси (так как $D(\lambda)$ вещественна для вещественных λ). Сравнение поведения аналитической функции Эванса в окрестности начала координат и на бесконечности показывает, что эта функция должна обращаться в нуль в конечной области на вещественной полуоси. Этот нуль совпадает с неустойчивым собственным значением обобщенной спектральной задачи (3.7).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей статье обсуждаются вопросы динамической устойчивости теории упругих стержней Кирхгофа и Клебша. Стержень считается тонким и нерастяжимым. В каждый момент времени t длина дуги s срединной кривой $\mathcal{G}(t)$ (эластики) рассматривается как пространственная координата. Динамика стержня полностью определяется эволюцией трех углов Эйлера θ , ψ и ϕ . Стержень считается динамически симметричным. Движение стержня является плоским, если $\psi = \phi = 0$, $\mathcal{G}(t)$ лежит в плоскости, содержащей главные оси инерции поперечного сечения (главная плоскость изгиба). Если $\psi \neq 0$, кривую $\mathcal{G}(t)$ нельзя вложить в плоскость, и движение стержня трехмерное. Заметим, что в общем случае отличие ψ от нуля влечет за собой ненулевое кручение стержня, т.е. $\phi \neq 0$ и трехмерное движение стержня происходит при ненулевом кручении. Энергией кручения можно пренебречь только в случае малых отклонений с нулевым крутящим моментом ($M_3 = 0$) от главной плоскости изгиба (см., например, работу [12]). Уравнения, задающие динамику стержня в общем случае, имеют вид (2.1), (2.2).

Уравнения (2.3) описывают баланс изгибной энергии, энергии кручения, кинетической энергии данной точки элаستي и кинетической энергии вращения поперечного сечения стержня. Члены, отвечающие вращательной энергии сечения, собраны в правой части второго из уравнений (2.3). При помощи естественного масштабного преобразования показано, что вклад кинетической энергии вращения в общую энергию для тонких стержней много меньше вклада кинетической энергии точки элаستي. Поэтому в линеаризованных уравнениях (3.3) допустимо пренебречь возмущениями соответствующих членов, полагая их имеющими второй порядок малости по величине. Рассматривается частный вид возмущений, для которых отсутствует крутящий момент. Неустойчивость основного состояния (солитона) по отношению к возмущениям частного вида тем более означает неустойчивость по отношению к общим возмущениям. Линеаризованные уравнения (3.3) оказываются эквивалентными единственному уравнению (3.4).

Результаты о неустойчивости для уравнения (3.4) были получены ранее в работах [11], [12] при помощи свойств функции Эванса для солитонного решения – решения основных уравнений (2.5) типа плоской уединенной волны в форме петли. Уравнение (3.4) (и, как следствие, спектральная задача (3.7)) появляется в результате линеаризации существенно более простых уравнений для динамики стержня. Для рассматриваемых здесь более общих движений стержня в задаче о спектральной устойчивости тоже возникает уравнение (3.4), и поэтому для полноты изложения эти результаты схематично воспроизводятся в п. 3.2 настоящей работы.

Функция Эванса $D(\lambda)$ строится как аналитическая в правой полуплоскости комплексной плоскости спектрального параметра. Там она обращается в нуль в точках дискретного спектра обобщенной спектральной задачи (3.7). Функция Эванса вещественна на вещественной оси и стремится к единице при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Настоящий результат о неустойчивости следует из сравнения поведения функции Эванса в окрестности начала координат комплексной плоскости λ (где она аналитична) с ее асимптотикой на бесконечности. Прямой подсчет при помощи пакета **Matematica** позволяет получить аналитическое выражение первого коэффициента разложения Тейлора функции Эванса в окрестности начала координат комплексной плоскости λ [12],

который является отрицательным для скоростей $c^2 < 1/2$. Следовательно, для малых положительных значений λ функция Эванса $D(\lambda) < 0$. Отсюда сразу следует, что функция Эванса обращается в нуль на положительной полуоси, т. е. существует по крайней мере одно неустойчивое собственное значение. Это, в свою очередь, означает, что солитоны, движущиеся не очень быстро на нерастяжимом стержне, неустойчивы относительно пространственных (неплоских) возмущений формы волны.

Вопрос об устойчивости солитонов, имеющих скорость $c \in [1/\sqrt{2}, 1)$, по-прежнему открыт, однако нет никаких сомнений, что импульс бегущего солитона для упомянутого диапазона скоростей стабилизирует его. Основанием для этого утверждения служит аналогия с другой задачей. Линейное уравнение (3.4) оказывается абсолютно тождественным соответствующему линейному уравнению в задаче, поставленной в работах [29], [30] (см. также монографию [31]). Эта задача относится к распространению волн в одной модели композиционного материала, который представляет собой идеализированный случай упругой матрицы с непрерывно распределенными в ней упругими стержнями, имеющими значительную жесткость на изгиб. В таком композите существуют два семейства солитонов. Записанное для удобства в безразмерных переменных одно из семейств орбитально (нелинейно) устойчиво для скоростей солитонов $c^2 > 1/2$. В этих переменных линеаризованные вокруг солитонов этого семейства уравнения сводятся к единственному уравнению, имеющему точно такой же вид, как (3.4) с p^0 , которое дается формулой (3.5). Этот результат, как уже упоминалось, скорее всего означает, что линеаризованная задача (3.4) с p^0 , определенным формулой (3.5), не имеет неустойчивых собственных значений для $c^2 > 1/2$.

Был произведен эксперимент с длинной леской. Леска бралась достаточно толстой (хотя ее толщина была мала по сравнению с радиусами кривизны нестационарной элаستيки), чтобы моделировать упругий стержень со значительной величиной модуля Юнга. Статический ($c = 0$) солитон (2.6), (2.7) может быть легко воспроизведен. Видно, что он неустойчив относительно пространственных возмущений. Эксперимент показывает, что неустойчивый солитон под влиянием возмущений с нулевым крутящим моментом ($\partial_s \delta\psi \rightarrow 0$, $\delta\phi \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \pm\infty$) эволюционирует в трехмерную структуру с локализованным кручением (быстро убывающим на бесконечности ϕ).

Одним из основных вопросов в теории устойчивости течений и состояний является вопрос о типе устойчивой вторичной структуры, формирующейся из неустойчивого состояния. В работе [8] получен весь класс солитонных решений уравнений (2.4). Среди них находятся решения с ненулевым постоянным крутящим моментом M_3 . Они отвечают винтовым структурам с $\phi \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \pm\infty$. (Отметим, что винтовые структуры вблизи порога неустойчивости закрученного прямого стержня и их устойчивость были изучены в серии статей, например, [32]–[34]). Единственным солитонным решением без кручения является солитон (2.6), (2.7) чистого изгиба. Поэтому рассматриваемая вторичная структура (с нулевым крутящим моментом) не принадлежит семейству бегущих солитонов, а значит, представляет собой нестационарную волну.

Благодарности. Настоящее исследование поддержано РФФИ (грант № 11-01-00034_a).

Список литературы

- [1] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik. I. Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1876.
- [2] A. Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*, Teubner, Leipzig, 1862.
- [3] E. H. Dill, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **44**:1 (1992), 1–23.
- [4] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [5] B. D. Coleman, E. H. Dill, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **91**:5 (1992), 2663–2673.
- [6] B. D. Coleman, J.-M. Xu, *Acta Mech.*, **110**:1–4 (1995), 173–182.
- [7] B. D. Coleman, E. H. Dill, D. Swigon, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **129**:2 (1995), 147–174.
- [8] B. D. Coleman, E. H. Dill, M. Lembo, Z. Lu, I. Tobias, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **121**:4 (1993), 339–359.
- [9] A. Beliaev, A. Il'ichev, *Physica D*, **90**:1–2 (1996), 107–118.
- [10] D. J. Dichmann, J. H. Maddocks, R. L. Pego, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **135**:4 (1996), 347–396.
- [11] А. Т. Ильичев, “Теория устойчивости «петли Эйлера» на упругих нерастяжимых стержнях”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 154–172.
- [12] А. Т. Il'ichev, *Z. Angew. Math. Phys.*, **57**:4 (2006), 547–566.
- [13] S. S. Antman, T.-P. Liu, *Quart. Appl. Math.*, **39**:4 (1979), 377–399.
- [14] J. C. Simo, J. E. Marsden, P. S. Krishnaprasad, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **104**:2 (1988), 125–183.
- [15] J. C. Alexander, R. Sachs, *Nonlinear World*, **2**:4 (1995), 471–507.
- [16] R. L. Pego, M. I. Weinstein, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **340**:1656 (1992), 47–94.
- [17] J. V. Evans, *Indiana Univ. Math. J.*, **22**:6 (1972), 577–593.
- [18] C. K. R. T. Jones, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286**:2 (1984), 431–469.
- [19] J. C. Alexander, R. Gardner, C. K. R. T. Jones, *J. Reine Angew. Math.*, **410** (1990), 167–212.
- [20] T. Kapitula, *SIAM J. Math. Anal.*, **30**:2 (1998), 273–297.
- [21] J. Swinton, J. Elgin, *Phys. Lett. A*, **145**:8–9 (1990), 428–433.
- [22] R. L. Pego, P. Smereka, M. I. Weinstein, *Physica D*, **67**:1–3 (1993), 45–65.
- [23] J. C. Alexander, M. G. Grillakis, C. K. R. T. Jones, B. Sandstede, *Z. Angew. Math. Phys.*, **48**:2 (1997), 175–192.
- [24] R. A. Gardner, K. Zumbrun, *Commun. Pure Appl. Math.*, **51**:7 (1998), 797–855.
- [25] T. Kapitula, *Physica D*, **116**:1–2 (1998), 95–120.
- [26] T. Kapitula, B. Sandstede B, *Physica D*, **124**:1–3 (1998), 58–103.
- [27] A. L. Afendikov, T. J. Bridges, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **457**:2006 (2001), 257–272.
- [28] T. J. Bridges, G. Derks, G. Gottwald, *Physica D*, **172**:1–4 (2002), 190–216.
- [29] А. Т. Ильичев, *ЖЭТФ*, **118**:3 (2000), 720–729.
- [30] А. Т. Il'ichev, *Physica D*, **150**:3–4 (2001), 264–277.
- [31] А. Т. Ильичев, *Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях*, Физматлит, М., 2009.
- [32] A. Goriely, M. Tabor, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:17 (1996), 3537–3540.
- [33] S. Lafortune, J. Lega, *Physica D*, **182**:1–2 (2003), 103–124.
- [34] S. Lafortune, J. Lega, *SIAM J. Math. Anal.*, **36**:6 (2005), 1726–1741.