Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Джорджадзе, В. Пехотский, Релятивистская частица в поле Лиувилля,
ТМФ, 1999, том 118, номер 2, 229–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:31:58

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА В ПОЛЕ ЛИУВИЛЛЯ

Исследуется модель релятивистской частицы в поле Лиувилля. Модель обладает симметрией $SL(2, R)/Z_2$. Соответствующие динамические интегралы полностью описывают множество классических траекторий. Эти интегралы используются для калибровочно-инвариантной гамильтоновой редукции. Предложена новая схема квантования редуцированной системы. Полученная квантовая система воспроизводит классическую симметрию. Обсуждаются физические аспекты модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гравитационное поле $g_{\mu\nu}(X)$ в двумерном пространстве ($X := (x^0, x^1)$, $\mu, \nu = 0, 1$) задается одним полем $\varphi(X)$, т.к. выбором координат $g_{\mu\nu}$ всегда можно привести (по крайней мере, локально) к виду [1]

$$g_{\mu\nu}(X) = \exp \varphi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Скалярная кривизна $R(X)$, отвечающая метрическому тензору (1.1), дается выражением

$$R(X) = e^{-\varphi(X)} (\partial_1^2 - \partial_0^2) \varphi(X). \quad (1.2)$$

Поэтому лагранжиан Эйнштейна–Гильберта $\mathcal{L} = -\sqrt{|g(X)|} R(X)$ в двумерном пространстве сводится к полной дивергенции ($\mathcal{L} = (\partial_0^2 - \partial_1^2) \varphi(X)$) и не приводит к динамическому уравнению для поля $\varphi(X)$.

Можно определить двумерную модель общей теории относительности, потребовав, чтобы поле φ удовлетворяло динамическому уравнению. В качестве такого уравнения обычно выбирают [2, 3] уравнение поля Лиувилля

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) \varphi(x^0, x^1) + R_0 \exp \varphi(x^0, x^1) = 0, \quad (1.3)$$

*Отдел теоретической физики, Математический институт им. А. М. Размадзе, Тбилиси, Грузия. E-mail: jorj@rmi.acnet.ge

†Группа теории поля, Институт ядерных исследований, Варшава, Польша. E-mail: piech@fuw.edu.pl

где R_0 – константа, отличная от нуля. Поле $\varphi(x^0, x^1)$, удовлетворяющее уравнению (1.3), отвечает многообразию постоянной кривизны $R(X) = R_0$ (см. (1.2)). Обладая конформной инвариантностью, уравнение (1.3) возникает во многих задачах математической физики [2–7]. Общее решение уравнения (1.3) было получено Лиувиллем [8]. Оно имеет следующий вид:

$$\varphi = \ln \frac{4A^{+'}(x^+)A^{-'}(x^-)}{m^2[A^+(x^+) - \epsilon A^-(x^-)]^2}, \quad (1.4)$$

где $x^\pm := x^0 \pm x^1$ – координаты “светового конуса”, $A^\pm(x^\pm)$ – любые функции, удовлетворяющие условию $A^{\pm'} > 0$, ϵ – знак R_0 ($\epsilon := R_0/|R_0|$), $m := (|R_0|/2)^{1/2}$. Решение (1.4) инвариантно относительно преобразований Бьянки [9]

$$A^+(x^+) \rightarrow \frac{aA^+(x^+) + b}{cA^+(x^+) + d}, \quad A^-(x^-) \rightarrow \frac{aA^-(x^-) + \epsilon b}{\epsilon cA^-(x^-) + d}, \quad (1.5)$$

где $ad - bc = 1$.

Цель настоящей работы – изучение динамики релятивистской частицы, движущейся “свободно” в гравитационном поле (1.1), когда φ является решением уравнения (1.3).

Известное действие, описывающее такую динамическую систему, пропорционально длине мировой линии частицы:

$$S = -m_0 \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(X)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}, \quad (1.6)$$

где τ – параметр эволюции вдоль траектории $x^\mu(\tau)$, $\dot{x}^\mu := dx^\mu/d\tau$, а m_0 – массовый параметр.

Действие инвариантно относительно репараметризаций $\tau \rightarrow f(\tau)$. В гамильтоновом формализме наличие этой группы симметрии приводит к динамике со связями [10–12]. Связь имеет вид

$$\Phi := g^{\mu\nu}(X)p_\mu p_\nu - m_0^2 = 0, \quad (1.7)$$

где $p_\mu := \partial L / \partial \dot{x}^\mu$ – канонические импульсы, а L – лагранжиан, соответствующий (1.6). Канонический гамильтониан $H_c = (\partial L / \partial \dot{x}^\nu)\dot{x}^\nu - L$ обращается в нуль. Используя процедуру Дирака, получаем гамильтонову систему с действием

$$\tilde{S} = \int p_\mu dx^\mu - \lambda(\tau)[g^{\mu\nu}(X)p_\mu p_\nu - m_0^2] d\tau, \quad (1.8)$$

где $\lambda(\tau)$ – множитель Лагранжа.

Для квантования калибровочно-инвариантной системы (1.8) мы применяем калибровочно-инвариантную схему работ [13, 14]. Используется система единиц, где $\hbar = 1$.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 излагаются подход и методы исследования системы. Описываются общая схема калибровочно-инвариантной гамильтоновой редукции и процедура канонического квантования, обеспечивающая представление классической группы симметрии. Если эта схема не работает, мы обращаемся к другой процедуре, основанной на методе геометрического квантования.

В разделе 3 изучается классическая динамика частицы в простом сингулярном поле Лиувилля. Динамика существенно различна для положительной и отрицательной кривизны пространства-времени. В обоих случаях получены полный набор динамических интегралов, порождаемых симметрией $SL(2, R)/Z_2$, аналитическое описание траекторий частицы и гамильтонова редукция в калибровочно-инвариантных переменных. В случае $R_0 > 0$ редуцированное физическое фазовое пространство Γ_{ph} является коприсоединенной орбитой группы $SL(2, R)$ с положительным “числом Казимира” $C = 2m_0/R_0$. В случае $R_0 < 0$ физическое фазовое пространство Γ_{ph} представляет собой плоскость с канонической симплектической формой и не обладает глобальной $SL(2, R)$ -симметрией.

В разделе 4 проводится квантование рассматриваемых классических систем. Для положительной кривизны мы приходим к унитарному неприводимому представлению универсальной накрывающей группы $\overline{SL(2, R)}$, которая воспроизводит классическую симметрию $SL(2, R)/Z_2$ только при дискретных значениях числа Казимира. Так как число Казимира связано с параметром m_0 , масса частицы m_0 оказывается квантованной. В случае отрицательной кривизны генераторы группы симметрии являются эрмитовыми операторами, самосопряженные расширения которых не единственны. Неоднозначность расширения характеризуется параметром α на окружности $z = \exp(i\alpha)$. Соответственно возникает непрерывное множество унитарно-неэквивалентных представлений $\overline{SL(2, R)}$. Только представление с $z = 1$ воспроизводит симметрию $SL(2, R)/Z_2$.

В разделе 5 показано, что динамика частицы в произвольном поле Лиувилля локально та же самая, что и в разделе 3. Однако, вообще говоря, Γ_{ph} покрывает только часть коприсоединенной орбиты $SL(2, R)$, и иногда соответствующая динамическая система не является хорошо определенной. Эта проблема связана со свойствами глобальной симметрии многообразия пространства-времени. Для обоих знаков R_0 приведены примеры многообразий, свободные от этих трудностей, и описаны соответствующие системы.

2. СХЕМА КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОГО КВАНТОВАНИЯ

Начнем с краткого описания схемы гамильтоновой редукции в калибровочно-инвариантных переменных (ср. [13, 14]).

В гамильтоновом формализме калибровочно-инвариантному лагранжиану $L(Q, \dot{Q})$ отвечают расширенное фазовое пространство Γ и связи первого рода. Пусть $P := (P_1, \dots, P_N)$ и $Q := (Q^1, \dots, Q^N)$ — координаты на Γ , а $\Phi_\alpha(P, Q)$ ($\alpha = 1, \dots, M$) — связи первого рода. Поверхность связей $\Gamma_c := \{(P, Q) \mid \Phi_\alpha(P, Q) = 0; \alpha = 1, \dots, M\}$

имеет размерность $2N - M$. Для такой системы существуют $2n$ ($n = N - M$) калибровочно-инвариантных функций $\xi^a(P, Q)$ ($a = 1, \dots, 2n$), функционально независимых на Γ_c . Вообще говоря, не существует прямого практического метода построения $\xi^{a'}$ s. В некоторых моделях их можно угадать исходя из структуры калибровочных преобразований. Еще одним источником этих функций является глобальная симметрия лагранжиана $L(Q, \dot{Q})$. В частности, динамические интегралы, построенные по теореме Нетер, автоматически калибровочно-инвариантны, и если группа симметрии достаточно велика, можно построить все $2n$ калибровочно-инвариантных переменных.

Предположим, нам известны все ξ^a ($a = 1, \dots, 2n$). Дополним их M переменными η^α ($\alpha = 1, \dots, M$) так, чтобы получить полную координатную систему (ξ^a, η^α) на Γ_c . Канонический гамильтониан на поверхности Γ_c является функцией только $\xi^{a'}$ s, т.к. он калибровочно-инвариантен. Каноническая 1-форма $\theta := P_\mu dQ^\mu$ на Γ_c в координатах (ξ^a, η^α) представляется в виде

$$P_\mu dQ^\mu|_{\Gamma_c} = \theta_a(\xi) d\xi^a + dF(\xi, \eta), \quad a = 1, \dots, 2n, \quad \mu = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^{2n})$, $\eta := (\eta^1, \dots, \eta^M)$. Первый член в (2.1) $\theta_1 := \theta_a(\xi) d\xi^a$ зависит только от калибровочно-инвариантных переменных ξ^a . Он определяет 1-форму на редуцированном физическом фазовом пространстве Γ_{ph} . Вторым членом $\theta_2 := dF(\xi, \eta)$ можно пренебречь, поскольку он является точной формой (следовательно, не дает вклада в вариацию интеграла действия). Дифференциал 1-формы θ_1 определяет симплектическую форму на Γ_{ph} :

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ab}(\xi) d\xi^a \wedge d\xi^b \quad (a, b = 1, \dots, 2n), \quad (2.2)$$

где $\omega_{ab}(\xi) := \partial_a \theta_b(\xi) - \partial_b \theta_a(\xi)$.

Вычисление ограничения 1-формы $P_\mu dQ^\mu|_{\Gamma_c}$ в переменных (ξ^a, η^α) – эффективный метод построения симплектической структуры на Γ_{ph} . Вообще говоря, описанная процедура является локальной, и иногда возникают проблемы с глобальным расширением 1-формы θ_1 .

Пусть $\xi^{a'}$ s – динамические интегралы, построенные по теореме Нетер соответственно группе симметрии лагранжиана $L(Q, \dot{Q})$. Тогда скобки Пуассона (определяемые по симплектической форме ω) для переменных $\xi^{a'}$ s совпадают с коммутационными соотношениями алгебры Ли соответствующей группы симметрии. Последовательное квантование такой системы должно давать представление этих коммутационных соотношений в соответствующем гильбертовом пространстве.

Чтобы применить метод канонического квантования, необходимо ввести новые координаты $p := (p_1, \dots, p_n)$, $q := (q^1, \dots, q^n)$ на Γ_{ph} , приводящие форму (2.2) к каноническому виду $\omega = dp_k \wedge dq^k$ ($k = 1, \dots, n$).

Стандартное каноническое квантование предполагает следующие предписания: $q^k \rightarrow \hat{q}^k := q^k$, $p_k \rightarrow \hat{p}_k := -i\partial_{q^k}$ и $\xi^a(q, p) \rightarrow \hat{\xi}^a := \xi^a(\hat{q}, \hat{p})$. Однако при этом, вообще говоря, существует произвол операторного упорядочения; неизвестно, какой порядок операторов $\hat{q}, \hat{p}$ в наблюдаемых $\hat{\xi}^a = \xi^a(\hat{q}, \hat{p})$ воспроизводит классические коммутационные соотношения для $\xi^{a'}s$. Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассматриваем следующие уравнения для $q^k = q^k(\xi)$:

$$\{\{\xi^a, q^k\}, q^l\} = 0, \quad \{q^k, q^l\} = 0 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (2.3)$$

где $\xi^{a'}$ s – калибровочно-инвариантные переменные, построенные по симметрии лагранжиана.

Пусть $q^k = q^k(\xi)$ ($k = 1, \dots, n$) – решения (2.3). Дополним их каноническими сопряженными “импульсами” $p_k = p_k(\xi)$ ($k = 1, \dots, n$). В этом случае $\xi^a \in \tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} | q, p)$, где $\tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} | q, p)$ – множество наблюдаемых вида

$$f(q, p) = p_k A^k(q) + U(q) \quad (2.4)$$

с произвольными функциями A^k и U , зависящими только от координат q . Ясно, что множество $\tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} | q, p)$ замкнуто относительно скобки Пуассона.

Определим квантовые наблюдаемые $\hat{f}$, отвечающие $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} | q, p)$, как

$$\hat{f} := \frac{1}{2} [A^k(q) \hat{p}_k + \hat{p}_k A^k(q)] + U(q) = -iA^k(q) \partial_{q^k} - \frac{i}{2} \partial_{q^k} A^k(q) + U(q). \quad (2.5)$$

Легко проверить, что $\hat{f}$ является эрмитовым и что для $f, g \in \tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} | q, p)$ справедливо соотношение

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\{\widehat{f, g}\}. \quad (2.6)$$

Поэтому если мы сможем решить уравнения (2.3), то получим квантовую реализацию классических коммутационных соотношений.

Описанная схема квантования дает правила нахождения канонических координат, удобных для построения квантового представления данной классической симметрии. Правда, может случиться, что эта процедура не приводит к глобальной канонической структуре в координатах (p, q) . В таком случае описанный метод не работает. Иногда можно найти глобальные канонические координаты (p, q) , но соответствующие квантовые наблюдаемые (2.5) являются только эрмитовыми операторами, самосопряженные расширения которых не единственны или вообще не существуют [15] (см. раздел 4).

Может случиться также, что уравнения (2.3) имеют решение только для комплекснозначных функций $q^k = q^k(\xi)$. В таком случае мы предлагаем следующую схему. Вводится гильбертово пространство $L_2(\Gamma_{\text{ph}})$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle := \int \frac{d^{2n}\xi}{(2\pi)^n} \sqrt{\omega(\xi)} \psi_2^*(\xi) \psi_1(\xi), \quad (2.7)$$

где $\omega(\xi) = \det[\omega_{ab}(\xi)]$ (см. (2.2)). Очевидно, что такое гильбертово пространство слишком велико для нашей системы. Определим физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{ph}}(q^1, \dots, q^n)$ как подпространство $L_2(\Gamma_{\text{ph}})$, образованное решениями уравнений

$$[iV_{q^k} + \theta(V_{q^k})]\psi(\xi) = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.8)$$

где

$$V_{q^k} := \omega^{ab}(\xi) \partial_b q^k \partial_{\xi^a} := V_{q^k}^a \partial_{\xi^a}, \quad \theta(V_{q^k}) := \theta_a(\xi) V_{q^k}^a(\xi), \quad (2.9)$$

а ω^{ab} — матрица, обратная симплектической матрице (2.2) ($\omega_{ac} \omega^{cb} = \delta_a^b$). Ясно, что если q^k — комплекснозначное решение (2.3), то q^{k*} также является решением. Оказывается, что если уравнения (2.8) имеют решения в $L_2(\Gamma_{\text{ph}})$, то решения соответствующих уравнений при замене q^k на q^{k*} не являются квадратично-интегрируемыми в Γ_{ph} и обратно.

Пусть уравнения (2.8) имеют решение в $L_2(\Gamma_{\text{ph}})$. Введем операторы преквантования $\hat{\xi}^a$, определяемые как [16]

$$\hat{\xi}^a := \xi^a - \theta(V_{\xi^a}) - iV_{\xi^a}, \quad (2.10)$$

где V_{ξ^a} — гамильтоновы векторные поля, соответствующие наблюдаемым ξ^a (см. (2.9)).

Операторы преквантования $\hat{\xi}^a$ являются эрмитовыми в $L_2(\Gamma_{\text{ph}})$ и удовлетворяют соотношениям [16]

$$[\hat{\xi}^a, \hat{\xi}^b] = -i \{ \widehat{\xi^a \xi^b} \}. \quad (2.11)$$

Можно показать [17], что $\mathcal{H}_{\text{ph}}(q^1, \dots, q^n)$ инвариантно относительно $\hat{\xi}^a$, если выполнены уравнения (2.3). Следовательно, мы получаем представление классических коммутационных соотношений на $\mathcal{H}_{\text{ph}}(q^1, \dots, q^n)$.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим релятивистскую частицу в двумерном пространстве Минковского с группой симметрии Пуанкаре. Соответствующее действие дается (1.6), где $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1)$. На поверхности связи (1.7) получаем

$$p_0 = -E(p_1) := -\sqrt{(p_1)^2 + m_0^2} \quad (2.12)$$

(мы предполагаем, что $\dot{x}^0(\tau) > 0$). Ограничение канонической 1-формы θ на Γ_c дает

$$\theta|_{\Phi=0} = p_1 dx^1 - E(p_1) dx^0. \quad (2.13)$$

Инфинитезимальные преобразования Пуанкаре в двух измерениях имеют вид

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu + b \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор с $\varepsilon^{01} = 1$, a^μ и b — групповые параметры. Соответствующие три интеграла:

$$B := p_\mu \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu, \quad P_\mu := p_\mu \quad (\mu, \nu = 0, 1), \quad (2.14)$$

калибровочно-инвариантны, поскольку коммутируют со связью $\phi = p_0^2 - p_1^2 - m_0^2$. На поверхности связи только два из них независимы. Выберем в качестве независимых интегралов $P := P_1$ и B . С помощью (2.12) и (2.14) получаем уравнение $x^1 = (B + Px^0)/E(P)$, которое описывает множество классических траекторий, а (2.13) принимает вид

$$\theta|_{\Phi=0} = Pd\left(\frac{B}{E(P)}\right) - d\left(\frac{m_0^2 x^0}{E(P)}\right). \quad (2.15)$$

Поэтому симплектическая 2-форма $\omega := d\theta$ в переменных B, P записывается следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{E(P)} dP \wedge dB. \quad (2.16)$$

Рассмотрим уравнения (2.3) для координаты q :

$$\{\{E(P), q\}, q\} = 0, \quad \{\{P, q\}, q\} = 0, \quad \{\{B, q\}, q\} = 0, \quad (2.17)$$

решением которых является $q = P$, сопряженный “импульс” есть $p = -B/E(P)$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ – это пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(P)$ со скалярным произведением:

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \int dP \psi_2^*(P) \psi_1(P).$$

Квантовые операторы для генераторов группы Пуанкаре имеют вид (см. (2.5))

$$\hat{P}_0 = E(P), \quad \hat{P}_1 = P, \quad \hat{B} = iE(P) \frac{\partial}{\partial P} + \frac{i}{2} \frac{P}{E(P)}.$$

Легко видеть, что полученная квантовая система унитарно-эквивалентна стандартной теории релятивистской частицы со скалярным произведением:

$$\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = \int \frac{dP}{E(P)} \phi_2^*(P) \phi_1(P),$$

унитарное отображение определяется как $\phi(P) = \sqrt{E(P)} \psi(P)$.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ЛИУВИЛЛЯ

Конформное преобразование метрического тензора (1.1) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x^\pm &\longrightarrow y^\pm(x^\pm), \\ \varphi(x^+, x^-) &\longrightarrow \tilde{\varphi}(x^+, x^-) := \varphi(y^+(x^+), y^-(x^-)) + \ln[y^{+'}(x^+)y^{-'}(x^-)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(Производные $y^{\pm'}$ считаются положительными, чтобы фиксировать направление времени.)

Легко проверить, что если φ является решением уравнения Лиувилля (1.3), то $\check{\varphi}$ также – решение (1.3). Поэтому с помощью преобразований (3.1) по известному решению можно получить множество решений (1.3). Простыми решениями (1.3) являются

$$\begin{aligned}\varphi_+ &= -2 \ln(m|x|) = -2 \ln\left(\frac{m|x^+ - x^-|}{2}\right) \quad \text{при } R_0 > 0, \\ \varphi_- &= -2 \ln(m|t|) = -2 \ln\left(\frac{m|x^+ + x^-|}{2}\right) \quad \text{при } R_0 < 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $t := x^0$, $x := x^1$.

Применяя конформное преобразование (3.1) к решению (3.2), получаем общее решение (1.4), где $A^{\pm}(x^{\pm}) = y^{\pm}(x^{\pm})$. Поэтому поля Лиувилля (при фиксированном R_0) связаны с φ_+ (или φ_-) конформными преобразованиями. Вообще говоря, это справедливо лишь локально, т.к. при произвольной функции $A^{\pm}(x^{\pm})$ соответствующее отображение (3.1) с $y^{\pm} = A^{\pm}(x^{\pm})$ может быть глобально не определено. Действие (1.6) инвариантно относительно любых преобразований координат. Таким образом, локально динамика частицы в произвольном поле Лиувилля выглядит так же, как в поле (3.2).

В этом разделе мы рассматриваем классическую динамику частицы в полях Лиувилля (3.2). Будем следовать схеме, использованной в разделе 2 для динамики частицы в пространстве Минковского. Координаты t и x соответствующих систем интерпретируются как временная и пространственная координаты. Мы рассматриваем только времениподобные траектории с монотонно возрастающим временем ($\dot{x}^{\pm} > 0$). Не зависящее от времени поле φ_+ приводит к сохранению энергии частицы, в то время как однородность φ_- в пространстве обеспечивает сохранение импульса частицы.

3.1. Случай положительной кривизны $R_0 > 0$. Лагранжиан для поля φ_+ записывается (см. (1.6) и (3.2)) следующим образом:

$$L = -2c \sqrt{\frac{\dot{x}^+ \dot{x}^-}{(x^+ - x^-)^2}} \quad \left(c := \frac{m_0}{m}\right).\tag{3.3}$$

Поскольку (3.3) сингулярно при $x = (1/2)(x^+ - x^-) = 0$, мы “устраиваем” эту линию и рассматриваем две системы при $x > 0$ и $x < 0$ отдельно. Действие (3.3) инвариантно относительно следующих инфинитезимальных преобразований:

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\pm} + \alpha_0,\tag{3.4a}$$

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\pm} + \alpha_1 x^{\pm},\tag{3.4б}$$

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\pm} + \alpha_2 (x^{\pm})^2.\tag{3.4в}$$

Инфинитезимальные преобразования (3.4а) и (3.4б) определяют глобальные преобразования полуплоскости $x > 0$ (так же как и полуплоскости $x < 0$), в то время как глобальное преобразование, генерируемое преобразованием (3.4в), имеет сингулярную точку на плоскости (t, x) . Глобальные преобразования, генерируемые (3.4), можно объединить в дробно-линейные преобразования вида

$$x^\pm \rightarrow \frac{ax^\pm + b}{cx^\pm + d} \quad \text{при} \quad ad - bc = 1. \quad (3.5)$$

Эта “симметрия” лагранжиана (3.3) связана с бьянки-инвариантностью полей Лиувилля (см. (1.4) и (1.5)).

Динамические интегралы, соответствующие преобразованиям симметрии (3.4), имеют вид

$$E = -(p_+ + p_-), \quad K = p_+ x^+ + p_- x^-, \quad L = -(p_+ (x^+)^2 + p_- (x^-)^2). \quad (3.6)$$

Так как мы рассматриваем времениподобные траектории ($\dot{x}^\pm > 0$), то импульсы $p_\pm$ отрицательны и наш выбор знаков в (3.6) приводит к положительной энергии E (которая отвечает временным трансляциям).

Скобки Пуассона динамических интегралов (3.6) дают алгебру $\mathfrak{sl}(2, R)$:

$$\{E, K\}_* = E, \quad \{K, L\}_* = L, \quad \{E, L\}_* = 2K, \quad (3.7)$$

где скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_*$ вычисляются в канонических координатах $(p_\pm, x^\pm)$ расширенного фазового пространства Γ .

Условие массовой оболочки (1.7) принимает вид

$$\Phi := m^2 (x^+ - x^-)^2 p_+ p_- - m_0^2 = 0. \quad (3.8)$$

Динамические интегралы (3.6) калибровочно-инвариантны, т.к. они коммутируют с Φ . На поверхности связи (3.8) выполняется соотношение

$$EL - K^2 = c^2. \quad (3.9)$$

Оно определяет верхний гиперboloид в пространстве E, K, L ($E > 0, L > 0$), который является коприсоединенной орбитой группы $SL(2, R)$. Можно выбрать E и K в качестве глобальных координат на этом гиперboloиде. Таким образом, физическое фазовое пространство Γ_{ph} задается на полуплоскости ($E > 0, K$), но нужно проверить, покрывает ли Γ_{ph} всю полуплоскость.

При $t = 0$ уравнения (3.6), (3.9) имеют вид

$$E = \sqrt{P^2 + \frac{c^2}{x^2}}, \quad K = Px, \quad (3.10)$$

где $P := p_+ - p_-$. Уравнение (3.10) определяет диффеоморфизм полуплоскостей ($x > 0, P$) и ($E > 0, K$). Поэтому все точки полуплоскости ($E > 0, K$) достижимы для системы с $x > 0$ (аналогично для $x < 0$).

Уравнения (3.6) и (3.9) определяют траектории

$$\left(x^+ + \frac{K}{E}\right) \left(x^- + \frac{K}{E}\right) = -\frac{c^2}{E^2}, \quad (3.11)$$

которые являются гиперболами со светоподобными асимптотиками. Траектория частицы никогда не пересекает сингулярности при $x = 0$. Таким образом, наши две системы при $x > 0$ и $x < 0$ независимы.

Можно выполнить гамильтонову редукцию (2.1), выбирая калибровочно-инвариантные переменные E и K в качестве переменных ξ^a , а t – в качестве переменных η . В результате имеем

$$\theta|_{\Gamma_c} = p_+ dx^+ + p_- dx^-|_{\Phi=0} = Ed \left(\frac{K}{E}\right) + \left(\frac{y}{y^2 + c^2} - 1\right) dy, \quad (3.12)$$

где $y := Et - K$. Соответственно симплектическая форма на Γ_{ph} дается выражением

$$\omega = \frac{dE \wedge dK}{E}. \quad (3.13)$$

Симплектическая форма (3.13) воспроизводит $\mathfrak{sl}(2, R)$ -алгебру (3.7) для наблюдаемых E, K и $L = (K^2 + c^2)/E$.

Так как канонический гамильтониан нашей системы равен нулю, то на Γ_{ph} динамика отсутствует. Каждая точка Γ_{ph} определяет траекторию, задаваемую уравнением (3.11). Таким образом, Γ_{ph} ассоциируется с пространством траекторий (пространством движений [16]). Это пространство обладает глобальной $SL(2, R)/Z_2$ -симметрией, в то время как соответствующие преобразования “симметрии” (3.5) для лагранжиана (3.3) не определены глобально.

3.2. Случай отрицательной кривизны $R_0 < 0$. В этом случае лагранжиан (см. φ_- в (3.2)) имеет вид

$$L = -2c \sqrt{\frac{\dot{x}^+ \dot{x}^-}{(x^+ + x^-)^2}} \quad \left(c := \frac{m_0}{m}\right). \quad (3.14)$$

При $t = (1/2)(x^+ + x^-) = 0$ имеется сингулярность, и мы рассматриваем динамику частицы для $t > 0$ и $t < 0$ отдельно.

Теперь инфинитезимальные преобразования симметрии

$$x^\pm \rightarrow x^\pm \pm \alpha_0, \quad x^\pm \rightarrow x^\pm + \alpha_1 x^\pm, \quad x^\pm \rightarrow x^\pm \pm \alpha_2 (x^\pm)^2 \quad (3.15)$$

порождают соответствующие динамические интегралы

$$P = p_+ - p_-, \quad K = p_+ x^+ + p_- x^-, \quad M = p_+ (x^+)^2 - p_- (x^-)^2, \quad (3.16)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры $\mathfrak{sl}(2, R)$ на расширенном фазовом пространстве Γ :

$$\{P, K\}_* = P, \quad \{K, M\}_* = M, \quad \{P, M\}_* = 2K. \quad (3.17)$$

Принимая во внимание условия массовой оболочки (1.7), получаем однополостный гиперboloид

$$K^2 - PM = c^2, \quad (3.18)$$

а соотношения (3.16) принимают вид

$$K = Px - t\sqrt{P^2 + \left(\frac{c}{t}\right)^2}, \quad M = P(t^2 + x^2) - 2tx\sqrt{P^2 + \left(\frac{c}{t}\right)^2}. \quad (3.19)$$

Сначала рассмотрим систему при $t > 0$. Видно, что Γ_{ph} есть гиперboloид без линии $P = 0$, $K = c$. Это многообразие диффеоморфно плоскости $\mathbf{R}^2$. При $P = 0$ уравнение (3.19) сводится к уравнению

$$K = -c, \quad x = -\frac{M}{2c}, \quad (3.20)$$

описывая покоящуюся частицу. При $P \neq 0$ траектория является гиперболой со светоподобными асимптотиками

$$x = \frac{K + \sqrt{P^2 t^2 + c^2}}{P}. \quad (3.21)$$

Процедура редукции (2.1) в этом случае приводит к уравнению

$$\theta|_{\Gamma_c} = Pd \left(\frac{K+c}{P} \right) + yd \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + c^2} + c} \right) - c \frac{dt}{t}, \quad \text{где } y := Pt. \quad (3.22)$$

Введя новую переменную $Q := (K+c)/P$, получаем каноническую симплектическую форму $\omega = dP \wedge dQ$. В канонических координатах (P, Q) (3.19) записывается как

$$K = PQ - c, \quad M = PQ^2 - 2Qc. \quad (3.23)$$

Ясно, что плоскость (P, Q) представляет Γ_{ph} .

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести новый набор динамических интегралов J_α ($\alpha = 0, 1, 2$)

$$J_0 := \frac{1}{2}(P + M), \quad J_1 := \frac{1}{2}(P - M), \quad J_2 := K \quad (3.24)$$

с коммутационными соотношениями

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J^k, \quad (3.25)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, причем $\varepsilon_{012} = 1$, $J^k = \eta^{kl} J_l$ (где $\eta^{kl} = \text{diag}(+, -, -)$).

Γ_{ph} — пространство траекторий, так же как и при $R_0 > 0$. Однако теперь $SL(2, R)/Z_2$ не является глобальной симметрией на Γ_{ph} . Преобразования глобальной симметрии генерируются только наблюдаемыми P и K . То же самое верно для системы с $t < 0$. В этом случае Γ_{ph} — гиперboloид без линии $P = 0$, $K = -c$. Таким образом, Γ_{ph} снова диффеоморфно плоскости. Траектории теперь определяются уравнениями

$$x = \frac{K - \sqrt{P^2 t^2 + c^2}}{P} \quad \text{при } P \neq 0, \quad x = \frac{M}{2c} \quad \text{при } P = 0. \quad (3.26)$$

Редуцированная 1-форма записывается в виде

$$\theta|_{\Gamma_c} = Pd\left(\frac{K-c}{P}\right) - yd\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + c^2} + y}\right) + c\frac{dt}{t} \quad \text{при } y = Pt. \quad (3.27)$$

Координата, канонически-сопряженная P , есть $Q := (K - c)/P$. Таким образом, $\omega = dP \wedge dQ$ и

$$K = PQ + c, \quad M = PQ^2 + 2cQ. \quad (3.28)$$

Можно рассматривать обе системы, при $t > 0$ и $t < 0$, как две части одной системы с единым временем t , непрерывно бегущим в положительном направлении. В таком случае нужно найти способ склеить траектории при $t = 0$. Это соответствует определенному отождествлению некоторых точек двух физических фазовых пространств: Γ_{ph} при $t < 0$ и Γ_{ph} при $t > 0$. Если мы настаиваем на непрерывности траекторий при $t = 0$, то динамические интегралы P , K и M меняют знак (ср. (3.20), (3.21) с (3.26)). Имеется другая возможность склеить эти два фазовых пространства, если потребовать сохранения динамических интегралов P , K и M . Однако это приводит к разрывности траекторий (см. снова (3.20), (3.21) и (3.26)). В разделе 4 мы покажем, что в квантовом случае соответствующая неоднозначность предстает в форме унитарно-неэквивалентных квантований.

Рассмотрение плоскости (t, x) с сингулярным полем Лиувилля φ приводит к сингулярной пространственно-временной структуре, которая является тонким моментом общей теории относительности. Мы собираемся обсудить соответствующие аспекты этой модели позднее.

4. КВАНТОВАНИЕ

Для квантования полученных редуцированных гамильтоновых систем мы используем метод, описанный в разделе 2.

4.1. Случай $R_0 > 0$. Если q является решением уравнений (2.3), то $f(q)$ также является решением, где f – любая функция. Однако обе конструкции (2.4) и (2.8) инвариантны относительно этого выбора. Используя эту свободу, будем искать решения уравнений (2.3) в виде $q = A(E)B(K)$ (где A, B – некоторые функции). Тогда решение (2.3) при $\xi^1 = E$, $\xi^2 = K$ и $\xi^3 = L$ фиксирует функции A и B , и мы получаем комплекснозначные функции

$$q = \frac{K + ic}{E}, \quad q^* = \frac{K - ic}{E}. \quad (4.1)$$

Операторы преквантования в переменных (q, q^*) имеют вид (см. (2.10))

$$\hat{E} = -i(\partial_q + \partial_{q^*}), \quad \hat{K} = -i(q\partial_q + q^*\partial_{q^*}), \quad \hat{L} = ic(q^* - q) - i(q^2\partial_q + q^{*2}\partial_{q^*}). \quad (4.2)$$

При нашем выборе переменных (см. (4.1)) физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{ph}}(q)$ определяется как решения уравнения (см. (2.8))

$$\left(\partial_{q^*} + \frac{c}{q - q^*} \right) \Psi(q, q^*) = 0. \quad (4.3)$$

Общее решение (4.3) есть

$$\Psi(q, q^*) = \left(\frac{q - q^*}{2i} \right)^c \psi(q), \quad (4.4)$$

где $\psi(q)$ – функция, голоморфная в верхней полуплоскости $\text{Im } q > 0$ (см. (4.1)).

Скалярное произведение (2.7) принимает вид

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \int \frac{dq dq^*}{2\pi} \left(\frac{q - q^*}{2i} \right)^{2(c-1)} \psi_2^*(q) \psi_1(q),$$

при этом мы должны потребовать, чтобы c было больше $1/2$ во избежание неинтегрируемой особенности при $q - q^* = 0$. Множество квадратично-интегрируемых функций определяется так:

$$\psi(q) = (q + i)^{-2c} \sum_{n \geq 0} c_n \left(\frac{q - i}{q + i} \right)^n, \quad \text{где} \quad \sum_{n \geq 0} |c_n|^2 < \infty.$$

Нетрудно показать, что (4.2) и (4.4) определяют следующее представление алгебры $\text{sl}(2, R)$ на голоморфных функциях $\psi(q)$:

$$\hat{E} \rightarrow -i\partial_q, \quad \hat{K} \rightarrow -iq\partial_q - ic, \quad \hat{L} \rightarrow -iq^2\partial_q - 2icq. \quad (4.5)$$

Оператор Казимира $\hat{C} := (\hat{E}\hat{L} + \hat{L}\hat{E})/2 - \hat{K}^2$ для представления (4.5) имеет вид $\hat{C} = c(c-1)\hat{1}$. Выберем $c > 1$, чтобы и в квантовом случае иметь положительное число Казимира (см. (3.9)). Соответственно приходим к унитарному неприводимому представлению алгебры $\mathfrak{sl}(2, R)$ [18].

Вследствие простой формы операторов (4.5) проблема собственных значений может быть легко решена. Операторы $\hat{E}$ и $\hat{L}$ имеют положительные непрерывные спектры, в то время как спектр оператора

$$\hat{N} := \frac{\hat{E} + \hat{L}}{2} \quad (4.6)$$

является дискретным с собственными значениями $N_n = c + n$ ($n = 0, 1, \dots$) и собственными функциями

$$\psi_n \sim (q+i)^{-2c} \left(\frac{q-i}{q+i} \right)^n.$$

Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, R)$ операторами (4.5) приводит к соответствующему представлению универсальной накрывающей группы $\overline{SL(2, R)}$. При $c = k/2$ ($k = 3, 4, \dots$) получается представление группы $SL(2, R)$ [18]. Аналогично для $c = l$ ($l = 2, 3, \dots$) мы приходим к представлению группы $SL(2, R)/Z_2$. Поэтому требование, чтобы квантовая система воспроизводила классическую симметрию $SL(2, R)/Z_2$, приводит к тому, что c является дискретным. Это означает, что масса частицы m_0 дискретна ($c := m_0/m$, m – параметр в уравнении Лиувилля).

4.2. Случай $R_0 < 0$. В данном случае координаты (P, Q) редуцированного фазового пространства являются каноническими, а генераторы (3.23) и (3.24) группы симметрии принадлежат $\tilde{\mathcal{O}}(\Gamma_{\text{ph}} \mid P, Q)$, поэтому мы можем применить процедуру (2.5). Для квантовых наблюдаемых имеем

$$\begin{aligned} \hat{J}_0 &= -\frac{i}{2}(1+Q^2)\partial_Q - \left(c + \frac{i}{2}\right)Q, \\ \hat{J}_1 &= -\frac{i}{2}(1-Q^2)\partial_Q + \left(c + \frac{i}{2}\right)Q, \\ \hat{J}_2 &= -iQ\partial_Q - \left(c + \frac{i}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти генераторы эрмитовы в $L_2(\mathbf{R})$ и задают представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, R)$ (3.17) [18]. Однако согласно принципам квантования квантовые наблюдаемые должны быть самосопряженными операторами. Поэтому нужно найти самосопряженные расширения операторов (4.7). Как упоминалось в разделе 2, иногда такое расширение не единственно. Например [15], оператор

$$\hat{T} := -i\frac{d}{dx} \quad (4.8)$$

является неограниченным эрмитовым оператором в гильбертовом пространстве $L_2([0, 2\pi])$ с областью определения

$$D_{\hat{T}} := \{\psi(x) \mid \psi(0) = 0 = \psi(2\pi)\}.$$

Оператор $\widehat{T}$ имеет множество унитарно-неэквивалентных самосопряженных расширений $\widehat{T}_\alpha$, параметризуемых параметром $\alpha \in S^1$. Областью определения оператора $\widehat{T}_\alpha$ является

$$D_{\widehat{T}_\alpha} := \{ \psi(x) \mid \psi(2\pi) = \exp(i\alpha)\psi(0) \}.$$

Задача на собственные значения для $\widehat{T}_\alpha$ имеет решение

$$\widehat{T}_\alpha \psi_{\lambda_n}(x) = \lambda_n(\alpha) \psi_{\lambda_n}(x), \quad (4.9)$$

где

$$\psi_{\lambda_n}(x) := (2\pi)^{-1/2} \exp\{i\lambda_n(\alpha)x\}, \quad \lambda_n(\alpha) := \frac{\alpha}{2\pi} + n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.10)$$

Оказывается, что самосопряженные расширения операторов (4.7) также не единственны. Чтобы показать это, рассмотрим унитарное преобразование $U: L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2([0, 2\pi])$, определяемое как

$$U\Psi(Q) = \psi(x) := \frac{\exp(-2ic \ln \sin(\frac{x}{2}))}{\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2})} \Psi\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

где $Q \in \mathbf{R}$, $x \in]0, 2\pi[$; $\Psi(Q) \in L_2(\mathbf{R})$, $\psi(x) \in L_2([0, 2\pi])$.

Преобразованные операторы (4.7) имеют вид

$$\hat{J}_0 = -i\partial_x, \quad \hat{J}_1 = i \cos x \partial_x - \left(c + \frac{i}{2}\right) \sin x, \quad \hat{J}_2 = i \sin x \partial_x + \left(c + \frac{i}{2}\right) \cos x. \quad (4.11)$$

$\hat{J}_0$ совпадает с оператором (4.8). Таким образом, $\hat{J}_0$ имеет множество самосопряженных расширений $\hat{J}_{0\alpha} = \widehat{T}_\alpha$. Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ в (4.11) являются ограниченными операторами, а $D_{\widehat{T}_\alpha}$ инвариантно относительно них, самосопряженные расширения $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ представляются следующим образом:

$$\hat{J}_{1\alpha} = -\cos x \widehat{T}_\alpha - \left(c + \frac{i}{2}\right) \sin x, \quad \hat{J}_{2\alpha} = -\sin x \widehat{T}_\alpha + \left(c + \frac{i}{2}\right) \cos x. \quad (4.12)$$

Итак, мы приходим к унитарно-неэквивалентным представлениям (параметризованным $\alpha \in S^1$) универсальной накрывающей группы $\overline{SL(2, R)}$ [19]. Число Казимира для всех этих представлений есть $C = -(c^2 + 1/4)$.

5. ОБЩЕЕ ПОЛЕ ЛИУВИЛЛЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ $SL(2, R)/Z_2$ -СИММЕТРИЯ

Для общего решения (1.4) лагранжиан (1.6) имеет вид

$$L = -2c \sqrt{\frac{\dot{A}^+(x^+(\tau)) \dot{A}^-(x^-(\tau))}{[A^+(x^+(\tau)) - \epsilon A^-(x^-(\tau))]^2}} \quad \left(c := \frac{m_0}{m}\right). \quad (5.1)$$

Выбирая координаты $y^\pm = A^\pm(x^\pm)$, мы приходим к (3.3) или (3.14) в зависимости от знака ϵ . Бьянки-инвариантность (1.5) приводит к симметрии лагранжиана (5.1). В координатах $y^\pm$ преобразования симметрии имеют вид

$$y^+ \rightarrow \frac{ay^+ + b}{cy^+ + d}, \quad y^- \rightarrow \frac{ay^- + \epsilon b}{\epsilon cy^- + d}, \quad \text{где } ad - bc = 1. \quad (5.2)$$

Поэтому можно повторить процедуру, описанную в разделе 3 для общего случая, и получить редуцированное фазовое пространство Γ_{ph} с симплектической формой на соответствующей коприсоединенной орбите группы $SL(2, R)$. Однако надо принимать во внимание, что Γ_{ph} , вообще говоря, покрывает только часть гиперboloида.

Если поле Лиувилля (1.4) не сингулярно [20, 21] в $\mathbf{R}^2$, то $A^+(x^+) - \epsilon A^-(x^-) > 0$. Так как $A^+(\cdot)$ и $A^-(\cdot)$ являются функциями разных аргументов, они должны быть ограниченными. Для ограниченных координат $y^\pm = A^\pm(x^\pm)$ преобразования симметрии (5.2) не являются хорошо определенными. В случае сингулярного поля Лиувилля особенности задаются уравнением $A^+(x^+) - \epsilon A^-(x^-) = 0$, которое определяет [22] непересекающиеся времениподобные линии при $\epsilon > 0$ и непересекающиеся пространственноподобные линии при $\epsilon < 0$. Лагранжиан хорошо определен на некоторой области, ограниченной двумя линиями особенностей. В общем случае преобразования симметрии (5.2) для такой области опять-таки не являются глобально определенными. Если лагранжиан (5.1) не обладает глобальной симметрией $SL(2, R)/Z_2$, может случиться, что эта симметрия отсутствует также и на Γ_{ph} . В этом случае Γ_{ph} — только часть коприсоединенной орбиты. Ясно, что динамическая система, задаваемая на части гиперboloида, может оказаться недостаточно хорошо определенной.

Область $\mathbf{R}^2$ с несингулярным полем Лиувилля можно рассматривать как кусок нового пространственно-временного многообразия постоянной кривизны R_0 . Если новое многообразие имеет глобальную симметрию $SL(2, R)/Z_2$, система является хорошо определенной.

Пример такой системы — частица в поле Лиувилля:

$$\varphi = -\ln \sin^2 \rho, \quad (5.3)$$

заданном на цилиндре $\mathbf{C} := \{(\sigma, \rho) \mid \sigma \in S^1, \rho \in]0, \pi[\}$, где использованы “безразмерные” координаты $\rho := mt$, $\sigma := mx$. Соответствующее псевдориманово многообразие

имеет отрицательную кривизну ($R_0 = -2m^2$). Лагранжиан системы есть

$$L = -c \sqrt{\frac{\dot{\rho}^2 - \dot{\sigma}^2}{\sin^2 \rho}} \quad \left(c := \frac{m_0}{m} \right). \quad (5.4)$$

Мы вновь полагаем, что траектории времениподобны: $|\dot{\rho}| > |\dot{\sigma}|$ и $\dot{\rho} > 0$.

Инфинитезимальные преобразования симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho, \quad \sigma \rightarrow \sigma + \alpha_0; \\ \rho &\rightarrow \rho + \alpha_1 \sin \rho \cos \sigma, \quad \sigma \rightarrow \sigma + \alpha_1 \cos \rho \sin \sigma; \\ \rho &\rightarrow \rho + \alpha_2 \sin \rho \sin \sigma, \quad \sigma \rightarrow \sigma - \alpha_2 \cos \rho \cos \sigma \end{aligned} \quad (5.5)$$

и задают хорошо определенное глобальное действие группы $SL(2, R)/Z_2$ на цилиндре $\mathbf{C}$.

Динамические интегралы, соответствующие (5.5), имеют вид

$$J_0 = p_\sigma, \quad J_1 = p_\rho \sin \rho \cos \sigma + p_\sigma \cos \rho \sin \sigma, \quad J_2 = p_\rho \sin \rho \sin \sigma - p_\sigma \cos \rho \cos \sigma, \quad (5.6)$$

где $p_\sigma := \partial L / \partial \dot{\sigma}$ и $p_\rho := \partial L / \partial \dot{\rho}$ – канонические импульсы. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.25) на расширенном фазовом пространстве Γ . Условие массовой оболочки (1.7) приводит к однополостному гиперboloиду

$$J_k J^k = -c^2. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6) и (5.7) определяют траектории частицы на цилиндре. Для $\rho = \pi/2$ (5.6) и (5.7) дают

$$J_0 = p_\sigma, \quad J_1 = -\sqrt{p_\sigma^2 + c^2} \cos \sigma, \quad J_2 = -\sqrt{p_\sigma^2 + c^2} \sin \sigma.$$

Поэтому физическое фазовое пространство полностью покрывает гиперboloид (5.7), который обладает глобальной симметрией $SL(2, R)/Z_2$.

Процедура гамильтоновой редукции (2.1) дает симплектическую форму $\omega = dJ \wedge d\phi$, а генераторы (5.6) имеют вид

$$J_0 = J, \quad J_1 = -\sqrt{J^2 + c^2} \cos \phi, \quad J_2 = -\sqrt{J^2 + c^2} \sin \phi. \quad (5.8)$$

Редуцированное физическое фазовое пространство Γ_{ph} обладает глобальной канонической структурой, т.к. Γ_{ph} изоморфно T^*S^1 . Таким образом, мы можем использовать правило канонического квантования $\hat{J} = -i\partial_\phi$. Однако имеется проблема операторного упорядочения для $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$. Поэтому мы применяем метод раздела 2. Решение уравнений (2.3) при $\xi^1 = J$, $\xi^2 = \sqrt{J^2 + c^2} \cos \phi$ и $\xi^3 = \sqrt{J^2 + c^2} \sin \phi$ дает циклическую координату $q \in S^1$, где

$$q = \phi + \phi_0 \quad \text{и} \quad \text{ctg } \phi_0 = \frac{J}{c} \quad (\phi_0 \in]0, \pi[), \quad (5.9)$$

J – импульс, канонически-сопряженный q . В новых координатах (J, q) динамические интегралы (5.6) линейны по J :

$$J_0 = J, \quad J_1 = -J \cos q - c \sin q, \quad J_2 = -J \sin q + c \cos q.$$

Используя (2.5), приходим к операторам

$$\hat{J}_0 = -i\partial_q, \quad \hat{J}_1 = i \cos q \partial_q - \left(c + \frac{i}{2}\right) \sin q, \quad \hat{J}_2 = i \sin q \partial_q + \left(c + \frac{i}{2}\right) \cos q. \quad (5.10)$$

Операторы (5.10) самосопряжены в гильбертовом пространстве $L_2(S^1)$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle := \int_0^{2\pi} dq \psi_2^*(q) \psi_1(q).$$

Они определяют неприводимое унитарное представление группы $SL(2, R)/Z_2$ [18] с числом Казимира $C = -(c^2 + 1/4)$.

Сравнивая (5.10) и (4.12), видим, что при $\alpha = 0$ эти представления унитарно-эквивалентны.

В случае положительной кривизны ($R_0 = 2m^2$) можно рассмотреть поле Лиувилля

$$\varphi = -\ln \sin^2 \sigma, \quad (5.11)$$

где снова используются безразмерные координаты $\rho = mt$, $\sigma = mx$. Принимая в качестве “неограниченной” временной координаты $\rho \in \mathbf{R}$, получим поле Лиувилля на полоске $\mathbf{S} := \{(\sigma, \rho) \mid \sigma \in]0, \pi[, \rho \in \mathbf{R}\}$. Соответствующий лагранжиан обладает глобальной симметрией $SL(2, R)$. Не зависящее от времени поле (5.11) приводит к сохранению энергии. Эта система описывает периодическое движение частицы между двумя особенностями: при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$. Редуцированное фазовое пространство есть коприсоединенная орбита $SL(2, R)$. Квантовый оператор энергии совпадает с генератором (4.6) и имеет тот же дискретный спектр.

Благодарности. Г. Джорджадзе благодарит М. Мазиашвили и А. Погребкова за полезные обсуждения. Работа поддержана грантами INTAS, RFBR (96-01-00344) Грузинской академии наук, Польской академии наук и Институтом ядерных исследований Варшавы.

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. К. Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- [2] R. Jackiw. Liouville field theory: a two-dimensional model for gravity. In: Quantum Theory of Gravity. Ed. S.M. Christensen. Bristol: Adam Hilger, Ltd, 1984. P. 403.
- [3] N. Seiberg. Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity. In: Random Surfaces and Quantum Gravity. Eds O. Alvarez et al. New York-London: Plenum Press, 1991. P. 363.
- [4] E. Witten. Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 121.
- [5] A. M. Polyakov. Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
- [6] J. L. Gervais, A. Neveu. Nucl. Phys. B. 1984. V. 238. P. 125.
- [7] R. Jackiw. Geometry and symmetry breaking in the Liouville theory. In: Progress in Quantum Field Theory. Eds H. Ezawa, S. Kamefuchi. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V., 1986. P. 83.
- [8] J. Liouville. J. Math. Pures Appl. 1853. V. 18. P. 71.
- [9] L. Bianchi. Ann. Scuola Norm. Superiore Pisa. 1879. V. 2. Ser. 1. P. 26.
- [10] П. А. М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [11] Л. Д. Фаддеев. ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3.
- [12] M. Henneaux, C. Teitelboim. Quantization of Gauge Systems. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- [13] L. Faddeev, R. Jackiw. Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 1692.
- [14] Г. Чечелашвили, Г. П. Джорджадзе, Н. Кикнадзе. ТМФ. 1996. Т. 109. С. 90.
- [15] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [16] N. M. J. Woodhouse. Geometric Quantization. Oxford: Clarendon, 1992.
- [17] Г. П. Джорджадзе, И. Т. Саришвили. ТМФ. 1992. Т. 93. С. 231.
- [18] Д. П. Желобенко, А. И. Штерн. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
- [19] M. Plyushchay. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 3954.
- [20] А. К. Позребков. ДАН СССР. 1979. Т. 244. С. 873.
- [21] K. Bragić, W. Piechocki. Topology of the Set of Smooth Solutions to the Liouville Equation. (submitted for publication).
- [22] Г. П. Джорджадзе, А. К. Позребков, М. К. Поливанов. ТМФ. 1979. Т. 40. С. 221.

Поступила в редакцию 29.IV.1998 г.