Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Смирнов, Полудискретные цепочки Тоды, *ТМФ*,
2012, том 172, номер 3, 387–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:12:06

© 2012 г.

С. В. Смирнов*

ПОЛУДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Изучаются интегрируемые условия обрыва для полудискретной цепочки Тоды. Построено представление Лакса для полудискретного аналога цепочек, соответствующих простым алгебрам Ли серии C . Введены нелокальные переменные, в терминах которых записываются симметрии бесконечной полудискретной цепочки, и классифицируются условия обрыва определенного вида, совместимые с симметриями бесконечной цепочки.

Ключевые слова: полудискретная цепочка Тоды, представление Лакса, симметрии, интегрируемые условия обрыва.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных цепочек Тоды имеет уже довольно большую историю. Одномерная цепочка была впервые введена Тодой в 1967 г. в работе [1] в связи с задачей о системе частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием ближайших соседей. Затем Богдаевым в 1976 г. в работе [2] были рассмотрены и изучены обобщенные одномерные цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли. В конце 70-х–начале 80-х гг. прошлого века практически одновременно появилось несколько работ, посвященных изучению обобщенных двумеризованных цепочек Тоды [3]–[7]¹⁾. В 1991 г. Сурисом в работе [8] были изучены одномерные дискретные обобщенные цепочки Тоды. Настоящая работа посвящена рассмотрению полудискретных двумеризованных цепочек Тоды.

Хорошо известно (см., например, работу [9]), что в непрерывном случае инварианты Лапласа $h(j) = c(j) - a(j)b(j) - b_y(j)$ последовательности гиперболических дифференциальных операторов второго порядка

$$\mathcal{L}_j = \partial_x \partial_y + a(j) \partial_x + b(j) \partial_y + c(j), \quad (1)$$

связанных преобразованиями Дарбу–Лапласа

$$\mathcal{L}_{j+1} \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1} \mathcal{L}_j, \quad (2)$$

¹⁾Приведенные здесь ссылки, безусловно, не полны, однако, формат настоящей статьи не позволяет проводить обзор всей достаточно обширной литературы по данному вопросу.

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b(j)$, удовлетворяют уравнениям *двумеризованной цепочки Тоды*:

$$(\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1). \quad (3)$$

Легко убедиться, что замена $h(j) = e^{q(j+1)-q(j)}$ приводит цепочку (3) к виду

$$q_{xy}(j) = e^{q(j+1)-q(j)} - e^{q(j)-q(j-1)}, \quad (4)$$

а замена $h(j) = u_{xy}(j)$ – к виду

$$u_{xy}(j) = e^{u(j-1)-2u(j)+u(j+1)}. \quad (5)$$

Последняя система (точнее, ее замыкание граничными условиями вида $u(-1) = u(r) = -\infty$ для некоторого натурального r) является частным случаем так называемых *систем экспоненциального типа*, т. е. систем вида $\mathbf{u}_{xy} = e^{K\mathbf{u}}$, где K – некоторая постоянная матрица, а под $e^{K\mathbf{u}}$ понимается вектор, j -я координата которого равна экспоненте от j -й координаты вектора $K\mathbf{u}$. В работах [6], [7] показано, что система экспоненциального вида интегрируема по Дарбу (т. е. обладает полным набором y -интегралов) тогда и только тогда, когда K – матрица Картана некоторой простой алгебры Ли, а в работе [4] системы экспоненциального типа, соответствующие простым алгебрам Ли, проинтегрированы в явном виде. Это полное описание интегрируемых систем экспоненциального типа основано на рассмотрении *характеристической алгебры* таких систем: показано, что наличие полного набора y -интегралов эквивалентно конечномерности характеристической алгебры, а последнее условие реализуется тогда и только тогда, когда матрица K является матрицей Картана серий A – D или исключительных алгебр Ли. Эти интегрируемые системы получили название *обобщенных* или *конечных* двумеризованных цепочек Тоды. В работе [5] для всех обобщенных двумеризованных цепочек Тоды средствами теории алгебр Ли были построены представления Лакса. В самом простом случае граничного условия $u(-1) = u(1) = -\infty$ система (5) сводится к уравнению Лиувилля – гиперболическому уравнению, которое было проинтегрировано в явном виде Лиувиллем [10] еще в 1853 г.

Несмотря на наличие полного описания всех интегрируемых в явном виде конечных двумеризованных цепочек Тоды, некоторые вопросы еще долгое время оставались открытыми. В частности, было не ясно, является ли двумеризованная цепочка серии D редукцией цепочки серии A . Положительный ответ на этот вопрос был дан Хабибуллиным [11] только в 2005 г. (цепочки, соответствующие сериям B и C , являются редукциями цепочки серии A , порожденными инволютивными условиями $h(-j) = h(j-1)$ и $h(-j) = h(j)$ соответственно). Кроме того, явная интегрируемость или наличие полного набора y -интегралов не исчерпывают всех современных представлений об интегрируемых уравнениях. В работе [11] на основе определения интегрируемости как наличия представления Лакса был предложен некий систематический (хотя и не очень эффективный) подход к поиску интегрируемых граничных условий для двумеризованной цепочки Тоды, который дает интегрируемое граничное условие *вместе* с парой Лакса для соответствующей системы (для систем экспоненциального типа, соответствующих простым алгебрам Ли, пары Лакса приходилось искать отдельно).

Еще один подход к поиску интегрируемых обрывов двумеризованной цепочки Тоды, предложенный в работе [12], основан на изучении граничных условий, совместимых с симметриями бесконечной цепочки Тоды.

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 описан метод Хабибуллина непосредственного поиска пар Лакса и соответствующих интегрируемых условий обрыва. В разделе 3 изложены метод построения симметрий для двумеризованной цепочки Тоды, предложенный Шабатом [13], и симметричный подход Гюреля и Хабибуллина [12] к поиску интегрируемых граничных условий в непрерывном случае. В разделе 4, следуя работе Адлера и Старцева [14], вводится полудискретная цепочка Тоды. Раздел 5 посвящен построению представления Лакса для полудискретного аналога двумеризованной цепочки Тоды серии $C^{(2)}$, а раздел 6 – построению симметрий полудискретной цепочки и поиску граничных условий, с ними совместимых.

2. ЗАМЫКАНИЕ ПАР ЛАКСА В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ

Прежде чем описывать метод Хабибуллина непосредственного поиска пар Лакса для конечных цепочек, приведем в явном виде условия обрыва, соответствующие сериям A – D в терминах переменной $q(j)$. Цепочка серии A порождается граничными условиями вида

$$q(-1) = \infty, \quad q(r+1) = -\infty \quad (6)$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии B порождается граничными условиями вида

$$q(0) = 0, \quad q(r+1) = -\infty \quad (7)$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии C задается условиями вида

$$q(0) = q(1), \quad q(r+1) = -\infty, \quad (8)$$

а цепочка серии D – несколько более сложным условием

$$q(0) = -\ln\left(e^{q(2)} - \frac{q_x(1)q_y(1)}{2 \operatorname{sh} q(1)}\right), \quad q(r+1) = -\infty. \quad (9)$$

Хорошо известно, что преобразования Дарбу–Лапласа дают возможность записать бесконечную двумеризованную цепочку Тоды в форме Лакса: уравнения (4) представляют собой условие совместности линейной системы

$$\begin{aligned} \psi_x(j) &= \psi(j+1) + q_x(j)\psi(j), \\ \psi_y(j) &= -h(j-1)\psi(j-1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $h(j) = e^{q(j+1)-q(j)}$. Но изучение конечных систем приводит к необходимости строить пары Лакса для оборванных цепочек. Рассмотрим произвольное условие обрыва вида

$$q(-1) = F(q(0), q(1), \dots, q(k)) \quad (11)$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Естественная идея состоит в том, чтобы попытаться выразить переменную $\psi(-1)$ через динамические переменные $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(k)$ согласованным с условием (11) образом, замкнув тем самым пару Лакса (10) и построив

²⁾Когда эта статья была уже почти дописана, автор обнаружил препринт статьи [15], в котором, в частности, строится представление Лакса для полудискретной цепочки Тоды серии C .

представление Лакса для оборванной цепочки. Однако этот подход дает представление Лакса лишь для тривиальных граничных условий (6) серии A (см. работу [11]). Это обстоятельство привело Хабибуллина к другой идее: поскольку бесконечная цепочка (4) симметрична относительно замены $x \leftrightarrow y$, она допускает также и другую пару Лакса:

$$\begin{aligned}\varphi_x(j) &= -h(j-1)\varphi(j-1), \\ \varphi_y(j) &= \varphi(j+1) + q_y(j)\varphi(j).\end{aligned}\tag{12}$$

Это означает, что можно пытаться замыкать пару Лакса (10) не только на себя, а замыкать обе пары Лакса вместе, т.е. попробовать выразить $\psi(-1)$ и $\varphi(-1)$ через весь набор переменных

$$\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(r), \varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(r)$$

согласованным с условием (11) образом. Подобный подход дает пары Лакса для обобщенных цепочек Тоды серий A – D , причем в некоторых случаях построенные таким образом пары Лакса отличаются от построенных ранее средствами теории алгебр Ли. Таким образом, имеет место [11] следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k < k_1$ и $m < m_1$ – некоторые целые числа. Рассмотрим векторы

$$\Psi = (\psi(k+1), \psi(k+2), \dots, \psi(k_1-1))^t, \quad \Phi = (\varphi(m+1), \varphi(m+2), \dots, \varphi(m_1-1))^t.$$

Тогда обобщенные двумеризованные цепочки Тоды серий A – D допускают представление Лакса вида

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_x = \left(\begin{array}{c|c} A & K \\ \hline M & C \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_y = \left(\begin{array}{c|c} B & L \\ \hline N & D \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где матрицы $A, B, \dots, N$ устроены так:

$$A = \begin{pmatrix} q_x(k+1) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_x(k+2) & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_x(k_1-2) & 1 \\ A_{k+1} & A_{k+2} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{k_1-1} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{m+1} & K_{m+2} & \cdots & K_{m_1-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{k+1} & B_{k+2} & \cdots & \cdots & B_{k_1-1} \\ -h(k+1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -h(k+2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -h(k_1-2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{m+1} & L_{m+2} & \cdots & L_{m_1-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{m+1} & C_{m+2} & \cdots & \cdots & C_{m_1-1} \\ -h(m+1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -h(m+2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -h(m_1-2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{k+1} & M_{k+2} & \cdots & M_{k_1-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} q_y(m+1) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_y(m+2) & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_y(m_1-2) & 1 \\ D_{m+1} & D_{m+2} & \cdots & \cdots & \cdots & D_{m_1-1} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ N_{k+1} & N_{k+2} & \cdots & N_{k_1-1} \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При таком подходе граничные условия на левом и правом концах независимы, поэтому представление Лакса вида (13) допускают не только обобщенные цепочки серий A – D , но и любая цепочка, которая с каждого конца оборвана

одним из условий (6)–(9). Более того, как показано в работе [11], представление Лакса вида (13) допускают и такие условия обрыва цепочки (4), которые выводят за рамки систем экспоненциального типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вполне вероятно, что цепочка (4) допускает бесконечно много интегрируемых в этом смысле условий обрыва, однако полное их описание едва ли возможно, поскольку для этого потребуются в явном виде решить огромную систему дифференциально-разностных уравнений для неизвестных коэффициентов матриц $A, B, \dots, N$. Кроме того, подход Хабибуллина не слишком эффективен в том смысле, что даже если мы интересуемся парой Лакса для определенного условия обрыва, то неясно, как выбрать целые числа k, m, k_1, m_1 , и не существует абсолютно никаких указаний на то, сколько элементов в вышеприведенных матрицах следует оставить неопределенными.

Функции $\psi(j)$ и $\varphi(j)$, удовлетворяющие системам (10) и (12) соответственно, являются решениями гиперболических уравнений $\mathcal{L}^\psi(j)\psi(j) = 0$ и $\mathcal{L}^\varphi(j)\varphi(j) = 0$, где

$$\mathcal{L}^\psi(j) = \partial_x \partial_y - q_x(j) \partial_y + h(j-1), \quad \mathcal{L}^\varphi(j) = \partial_x \partial_y - q_y(j) \partial_x + h(j-1).$$

Инварианты Лапласа $h(j) = c(j) - a(j)b(j) - b_y(j)$ и $k(j) = c(j) - a(j)b(j) - a_x(j)$ этих операторов имеют следующий вид:

$$h^\psi(j) = h(j), \quad k^\psi(j) = h(j-1), \quad h^\varphi(j) = h(j-1), \quad k^\varphi(j) = h(j). \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что в терминах переменных h граничные условия, соответствующие сериям B и C , порождены инволюциями $h(-j) = h(j+1)$ и $h(-j) = h(j)$ соответственно. Сопоставляя это с равенствами (14), получаем, что для цепочки серии B имеют место следующие равенства:

$$h^\varphi(0) = h(-1) = h(2) = h^\psi(2), \quad k^\varphi(0) = h(0) = h(1) = k^\psi(2).$$

Хорошо известно, что инварианты Лапласа двух линейных гиперболических операторов совпадают тогда и только тогда, когда эти операторы связаны калибровочным преобразованием. На языке волновых функций это означает существование такой функции $R = R(x, y)$, что $\varphi(0) = R\psi(2)$, т. е. для любого решения $\psi(2)$ одного гиперболического уравнения $\varphi(0) = R\psi(2)$ будет решением другого. Аналогично нетрудно проверить, что

$$h^\psi(1) = h(1) = h(0) = h^\varphi(1), \quad k^\psi(1) = h(0) = h(1) = k^\varphi(1);$$

это означает существование такой функции $S = S(x, y)$, что $\psi(1) = S\varphi(1)$. Полученные равенства суть не что иное, как описанное выше замыкание друг на друга двух пар Лакса для бесконечной цепочки на левом конце. Аналогично для цепочки серии C имеют место равенства

$$\begin{aligned} h^\varphi(0) &= h(-1) = h(1) = h^\psi(1), & k^\varphi(0) &= h(0) = k^\psi(1), \\ h^\psi(0) &= h(0) = h^\varphi(1), & k^\psi(0) &= h(-1) = h(1) = k^\varphi(1), \end{aligned}$$

т. е. существуют такие функции R и S , что $\varphi(0) = R\psi(1)$, $\psi(0) = S\varphi(1)$. Это тоже частный случай описанной выше конструкции. Замыкание серии D устроено сложнее, в этом случае пары Лакса уже не являются калибровочно-эквивалентными ни

в какой точке. Таким образом, приведенные выше соображения показывают, что общий подход Хабибуллина естественным образом вытекает из уже известных частных случаев.

3. СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ

Другой подход к изучению интегрируемых условий обрыва для двумеризованной цепочки Тоды, предложенный Гюрелем и Хабибуллиным [12], основан на изучении граничных условий, совместимых с симметриями бесконечной цепочки. Однако проблема состоит в том, что симметрии бесконечной цепочки Тоды в двумерном случае (в отличие от одномерного) не выражаются в терминах динамических переменных: для их построения необходимо ввести дополнительные нелокальные переменные.

Введем обозначение $q_x(j) = b(j)$ (эта переменная не имеет никакого отношения к коэффициентам гиперболических операторов из предыдущих разделов). Тогда цепочка Тоды (4) может быть записана следующим образом:

$$b_y(j) = h(j) - h(j-1). \quad (15)$$

Определим нелокальные переменные $b^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b(j) = b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j-1), \quad \partial_y b^{(1)}(j) = \partial_x h(j), \quad (16)$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (15):

$$\partial_y \partial_x b(j) = \partial_y (b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j-1)) = \partial_x (h(j) - h(j-1)) = \partial_x \partial_y b(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b^{(1)}(j) = b^{(1)}(j)(b(j+1) - b(j)) + b^{(2)}(j) - b^{(2)}(j-1);$$

тогда условие совместности $\partial_y \partial_x b^{(1)}(j) = \partial_x \partial_y b^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приведет к соотношению

$$\partial_y b^{(2)}(j) = h(j)b^{(1)}(j+1) - h(j+1)b^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нелокальные переменные $b^{(k)}(j)$, $k = 2, 3, \dots$, связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} \partial_y b^{(k)}(j) &= h(j)b^{(k-1)}(j+1) - h(j+k-1)b^{(k-1)}(j), \\ \partial_x b^{(k)}(j) &= b^{(k)}(j)(b(j+k) - b(j)) + b^{(k+1)}(j) - b^{(k+1)}(j-1), \end{aligned} \quad (17)$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (17) для $k+1$.

Формулы (17) были получены Шабатом в работе [13] для построения иерархии высших симметрий двумеризованной цепочки Тоды. Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Потоки*

$$q_t(j) = b^2(j) + b^{(1)}(j) + b^{(1)}(j-1), \quad (18)$$

$$q_t(j) = b^3(j) + b^{(2)}(j) + b^{(2)}(j-1) + b^{(2)}(j-2) + \\ + b^{(1)}(j)(2b(j) + b(j+1)) + b^{(1)}(j-1)(2b(j) + b(j-1)) \quad (19)$$

задают симметрии цепочки (15).

Введенные выше нелокальные переменные также дают возможность находить y -интегралы двумеризованной цепочки Тоды (4). Нетрудно проверить, что функции

$$I_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (b^2(j) + 2b^{(1)}(j)), \quad I_3 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (b^3(j) + 3b^{(1)}(j)(b(j) + b(j+1)) + 3b^{(2)}(j))$$

являются y -интегралами цепочки (4). Симметрии и интегралы более высокого порядка по $b(j)$ записываются в терминах нелокальностей $b^{(k)}(j)$ более высокой градуировки, однако мы не будем заниматься их обсуждением.

Идея Гюреля и Хабибуллина состоит в том, чтобы исследовать, конечные цепочки с граничными условиями какого вида допускают симметрии, и, в частности, классифицировать все граничные условия, совместимые с симметриями (18), (19). Прямая проверка показывает, что симметрия (18) совместима с условием обрыва серии A , а симметрия (19) совместима, например, с условиями обрыва, соответствующими сериям A , B и C . Оказывается, что все известные интегрируемые в том или ином смысле условия обрыва двумеризованной цепочки Тоды совместимы с симметрией (19). Для того чтобы сформулировать соответствующую теорему, нам потребуется перейти к новым переменным, в которых симметрии (18) и (19) записываются более компактно.

Положим $u = e^{-q(-1)}$ и $v = e^{q(0)}$; тогда симметрии (18) и (19) принимают соответственно вид

$$u_t = -u_{xx} - 2ru, \quad v_t = v_{xx} + 2rv, \quad (20)$$

$$u_t = u_{xxx} + 3ru_x - 3su + 3r_xu, \quad v_t = v_{xxx} + 3rv_x + 3sv, \quad (21)$$

где $r = b^{(1)}(0)$ и $s = b^{(2)}(0) + r(\ln v)_x$ — нелокальные переменные, удовлетворяющие соотношениям

$$r_y = (uv)_x, \quad s_y = (uv_x)_x.$$

В статье [12] доказана следующая классификационная теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если условие обрыва вида $u = F(v, v_x, v_y, v_{xy})$ совместимо с симметрией (20), то оно имеет вид $u = 0$. Условие обрыва вида $u = F(v, v_x, v_y, v_{xy})$, совместимое с симметрией (21), принадлежит к одному из следующих трех типов:*

- 1) $u = a$, где $a = \text{const}$;
- 2) $u = av$, где $a = \text{const}$;
- 3) $u = v_{xy}/(a - v^2) + vv_xv_y/(a - v^2)^2$, где $a = \text{const}$.

Эти условия обрыва в точности совпадают с хорошо известными граничными условиями для двумеризованных цепочек Тоды, соответствующих простым алгебрам Ли серий A – D . Рассмотрение условий обрыва более общего вида дает все известные (осмысленные) граничные условия [12].

4. БЕСКОНЕЧНАЯ ЦЕПОЧКА В ПОЛУДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЕ

В полудискретном случае, как и в непрерывном, инварианты Лапласа гиперболических дифференциальных операторов второго порядка, связанных преобразованиями Дарбу–Лапласа, удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений, называемой *полудискретной цепочкой Тоды*. Следуя работе [14], получим из этих соображений уравнения полудискретной цепочки Тоды.

Рассмотрим последовательность гиперболических дифференциально-разностных операторов

$$\mathcal{L}_j = \partial_x T + a_n(j)\partial_x + b_n(j)T + c_n(j),$$

где $a_n(j)$, $b_n(j)$ и $c_n(j)$ – функции, зависящие от дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$ и непрерывной переменной $x \in \mathbb{R}$, а T – оператор сдвига: $T\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x)$. Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}_j$ можно представить в следующих двух видах:

$$\mathcal{L}_j = (\partial_x + b_n(j))(T + a_n(j)) + a_n(j)k_n(j) = (T + a_n(j))(\partial_x + b_{n-1}(j)) + a_n(j)h_n(j),$$

где $k_n(j) = c_n(j)/a_n(j) - (\ln a_n(j))'_x - b_n(j)$ и $h_n(j) = c_n(j)/a_n(j) - b_{n-1}(j)$ – *инварианты Лапласа* дифференциально-разностного оператора $\mathcal{L}_j$.

Предположим, что любые два соседних оператора $\mathcal{L}_j$ и $\mathcal{L}_{j+1}$ связаны *преобразованием Дарбу–Лапласа*, т. е. удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b_{n-1}(j)$. Тогда, записав последнее уравнение в терминах коэффициентов операторов, после преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} k_n(j+1) &= h_n(j), \\ \left(\ln \frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)} \right)'_x &= h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1). \end{aligned}$$

Вводя теперь новые переменные $h_n(j) = e^{q_{n+1}(j+1) - q_n(j)}$, приходим к уравнениям *полудискретной цепочки Тоды*:

$$q_{n,x}(j) - q_{n+1,x}(j) = e^{q_{n+1}(j+1) - q_n(j)} - e^{q_{n+1}(j) - q_n(j-1)}. \quad (22)$$

По аналогии с непрерывным случаем естественно задаться вопросом об интегрируемых редукциях полудискретной цепочки Тоды. Тривиальные граничные условия $h_n(-1) = h_n(r) = 0$ приводят к системе, которую естественно называть *полудискретной цепочкой, соответствующей серии А*. В терминах переменной q это замыкание задается условием обрыва $q_n(-1) = \infty$, $q_n(r+1) = -\infty$. Выясним, какие инволюции допускает полудискретная цепочка Тоды, записанная в инвариантах Лапласа, т. е. цепочка

$$\left(\ln \frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)} \right)'_x = h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1). \quad (23)$$

Нетрудно проверить, что отражение $h_n(-j) = h_{n+j+c}(j-d)$ задает редукцию цепочки (23) лишь при $d = -2c$, т. е. в данном случае ситуация несколько отличается от

непрерывного случая, где отражения относительно полуцелой и целой точек порождали редукции цепочки Тоды, отвечающие сериям B и C соответственно. Полагая $c = -1$, получаем граничное условие $h_n(-j) = h_{n+j-1}(j-2)$ (это равенство должно быть выполнено при всех $n \in \mathbb{Z}$). При $j = 2$ в терминах переменной q это приводит к условию обрыва

$$q_n(-1) - q_{n-1}(-2) = q_{n+1}(1) - q_n(0). \quad (24)$$

Цепочку (22), оборванную с помощью условия (24) на левом конце и с помощью тривиального условия $q_n(r+1) = -\infty$ на правом, будем называть *полудискретной цепочкой, соответствующей серии C* : нетрудно проверить, что в континуальном пределе эта система дает непрерывную цепочку Тоды, отвечающую серии C .

Непосредственное вычисление показывает, что граничное условие (24) порождает n -интеграл полудискретной цепочки: действительно, функция

$$\mu(x) = q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) \quad (25)$$

не зависит от n .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие закона сохранения (25) по дискретной переменной эквивалентно условию замыкания (24). В самом деле, прямая проверка показывает, что если для некоторого решения $q_n(j)$ бесконечной цепочки (22) величина (25) не зависит от n , то выполнено равенство (24). Однако функция μ при этом для разных решений может быть разной.

5. ПАРА ЛАКСА ДЛЯ ПОЛУДИСКРЕТНОЙ ЦЕПОЧКИ СЕРИИ C

Как и в непрерывном случае, преобразования Дарбу–Лапласа дают возможность построения представления Лакса для цепочки Тоды (22). Нетрудно проверить, что уравнения (22) представляют собой условие совместности для линейной системы

$$\begin{aligned} \psi_{n,x}(j) &= q_{n,x}(j)\psi_n(j) + \psi_n(j+1), \\ \psi_{n+1}(j) &= \psi_n(j) + h_n(j-1)\psi_n(j-1). \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразования Дарбу–Лапласа по дискретной переменной тоже приводят к представлению Лакса для полудискретной цепочки Тоды, и это представление не эквивалентно первому:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,x}(j) &= e^{q_{n+1}(j)-q_{n+1}(j-1)}\varphi_n(j-1) - \varphi_n(j), \\ \varphi_{n-1}(j) &= -e^{q_n(j)-q_{n+1}(j)}\varphi_n(j) + \varphi_n(j+1). \end{aligned} \quad (27)$$

Волновые функции $\psi_n(j)$ и $\varphi_n(j)$, удовлетворяющие системам (26) и (27) соответственно, являются решениями гиперболических дифференциально-разностных уравнений $\mathcal{L}^\psi(j)\psi_n(j) = 0$ и $\mathcal{L}^\varphi(j)\varphi_n(j) = 0$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\psi(j) &= \partial_x T - \partial_x - q_{n+1,x}(j)T + q_{n,x}(j) - h_n(j), \\ \mathcal{L}^\varphi(j) &= \partial_x T^{-1} + e^{q_n(j)-q_{n+1}(j)}\partial_x + T^{-1} + e^{q_n(j)-q_{n+1}(j)} - e^{q_n(j)-q_n(j-1)}. \end{aligned}$$

Инварианты Лапласа этих операторов имеют вид

$$h_n^\psi(j) = h_n(j), \quad k_n^\psi(j) = h_n(j-1), \quad h_n^\varphi(j) = h_n(j-1), \quad k_n^\varphi(j) = h_{n+1}(j). \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что граничное условие $h_n(-j) = h_{n+j-1}(j-2)$, соответствующее серии C , вместе с равенствами (28) приводит к следующим соотношениям:

$$h_n^\varphi(-1) = h_n(-2) = h_{n+1}(0) = h_{n+1}^\psi(0), \quad k_n^\varphi(-1) = h_{n+1}(-1) = k_{n+1}^\psi(0).$$

Как и в непрерывном случае, инварианты Лапласа двух линейных гиперболических дифференциально-разностных операторов совпадают тогда и только тогда, когда эти операторы связаны калибровочным преобразованием. В терминах волновых функций это означает, что существует такая функция $R_n = R_n(x)$, что $\varphi_n(-1) = R_n \psi_{n+1}(0)$. Аналогично нетрудно проверить, что

$$h_n^\psi(-1) = h_n(-1) = h_n^\varphi(0), \quad k_n^\psi(-1) = h_n(-2) = h_{n+1}(0) = k_n^\varphi(0);$$

это означает существование такой функции $S_n = S_n(x)$, что $\psi_n(-1) = S_n \varphi_n(0)$. Таким образом, граничное условие, соответствующее серии C , делает пары Лакса (26), (27) калибровочно-эквивалентными в одной точке. Это позволяет, следуя общей идее Хабибуллина, получить представление Лакса для конечной цепочки путем замыкания. Более точно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Цепочка (22) с граничным условием (24) на левом конце и тривиальным граничным условием $q_n(r+1) = -\infty$ для некоторого $r \geq 1$ на правом конце является условием совместности для линейной системы

$$\begin{aligned} \partial_x(\Psi) &= A\Psi, & T(\Psi) &= B\Psi + L\Phi, \\ \partial_x(\Phi) &= M\Psi + C\Phi, & T^{-1}(\Phi) &= D\Phi, \end{aligned}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(r) \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(r) \end{pmatrix},$$

матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} p_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \nu \cdot a_{n+1}(1) & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1}(2) & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1}(r) & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_n(0) & \nu^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n(1) & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n(r) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} q_{n,x}(0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{n,x}(1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q_{n,x}(r) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_n(0) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_n(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_n(r-1) & 1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} f_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} g_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_n(j) &= e^{q_n(j)-q_n(j-1)}, & b_n(j) &= -e^{q_n(j)-q_{n+1}(j)}, \\ f_n &= (-1)^n e^{-q_n(-1)}, & g_n &= (-1)^n e^{q_{n+1}(0)}, \\ p_n &= u_{n,x}(-1) + u_{n+1,x}(0), & \nu &= \nu(x) = e^{-\int (1+\mu(x)) dx}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что в полудискретной цепочке Тоды переход от переменных $h_n(j)$ к переменным $q_n(j)$ осуществляется с точностью до одновременного прибавления произвольной функции ко всем $q_n(j)$. Кроме того, если $q_n(j)$ – решение системы (22), то $q_n(j) + \varepsilon$ тоже является решением этой системы для произвольной функции $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Это означает, что, зная все решения полубесконечной цепочки Тоды с условием обрыва

$$q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) = 0, \quad (29)$$

мы можем с помощью надлежащего выбора функции ε найти все ее решения, удовлетворяющие условию (25) для произвольной функции μ . Поэтому в дальнейшем, говоря о полудискретной цепочке Тоды серии C , мы всегда будем предполагать, что $\mu = 0$, т. е. вместо граничного условия (24) будем рассматривать чуть более сильное условие (29). С неоднозначностью перехода от переменных $h_n(j)$ к переменным $q_n(j)$ также связано появление в матрицах представления Лакса “неуклюжего” множителя ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналогичным образом строится представление Лакса для полудискретной цепочки с граничными условиями вида

$$q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) = 0, \quad q_{n,x}(r+1) + q_{n,x}(r) - h_n(r) = 0$$

для произвольного $r \geq 1$.

6. СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД В ПОЛУДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЕ

Нахождение симметрий двумеризованной цепочки Тоды в полудискретном случае точно так же, как и в непрерывном, требует введения нелокальных переменных. Сформулируем основные утверждения и приведем формулы, аналогичные утверждениям и формулам раздела 3. Введем следующие обозначения: $\partial_n = I - T$, где I – тождественный оператор, и $b_n(j) = q_{n,x}(j)$. Тогда цепочка (22) запишется в виде

$$\partial_n b_n(j) = h_n(j) - h_n(j-1). \quad (30)$$

Определим нелокальные переменные $b_n^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b_n(j) = b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1), \quad \partial_n b_n^{(1)}(j) = \partial_x h_n(j),$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (30):

$$\partial_n \partial_x b_n(j) = \partial_n (b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1)) = \partial_x (h_n(j) - h_n(j-1)) = \partial_x \partial_n b_n(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b_n^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b_n^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b_n^{(1)}(j) = b_n^{(1)}(j)(b_{n+1}(j+1) - b_n(j)) + h_n(j)(b_n^{(1)}(j-1) - b_n^{(1)}(j)) + b_n^{(2)}(j) - b_n^{(2)}(j-1);$$

тогда условие совместности $\partial_n \partial_x b_n^{(1)}(j) = \partial_x \partial_n b_n^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приводит к соотношению

$$\partial_n b_n^{(2)}(j) = h_n(j)b_{n+1}^{(1)}(j+1) - h_{n+1}(j+1)b_{n+1}^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Нелокальные переменные $b_n^{(k)}(j)$, где $k = 2, 3, \dots$, связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} \partial_n b_n^{(k)}(j) &= h_n(j)b_{n+1}^{(k-1)}(j+1) - h_{n+k-1}(j+k-1)b_{n+1}^{(k-1)}(j), \\ \partial_x b_n^{(k)}(j) &= b_n^{(k)}(j)(b_{n+k}(j+k) - b_n(j)) + \\ &\quad + h_{n+k-1}(j+k-1)(b_n^{(k)}(j-1) - b_n^{(k)}(j)) + b_n^{(k+1)}(j) - b_n^{(k+1)}(j-1), \end{aligned} \quad (31)$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (31) для $k+1$.

В полудискретном случае симметрии цепочки Тоды задаются следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Потоки*

$$q_{n,t}(j) = b_n^2(j) + b_n^{(1)}(j) + b_n^{(1)}(j-1), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} q_{n,t}(j) &= b_n^3(j) + b_n^{(2)}(j) + b_n^{(2)}(j-1) + b_n^{(2)}(j-2) + \\ &\quad + b_n^{(1)}(j)(2b_n(j) + b_n(j+1)) + b_n^{(1)}(j-1)(2b_n(j) + b_n(j-1)) - \\ &\quad - b_n^{(1)}(j)h_n(j+1) - b_n^{(1)}(j-1)h_n(j) - b_n^{(1)}(j-2)h_n(j-1) \end{aligned} \quad (33)$$

задают симметрии цепочки (22).

В полной аналогии с непрерывным случаем введем новые динамические переменные, которые окажутся более удобными для дальнейших рассмотрений:

$$u_n = e^{-q_n(-2)}, \quad v_n = e^{q_{n+1}(-1)}, \quad w_n = q^{-q_n(0)}, \quad z_n = e^{q_{n+1}(1)}, \quad (34)$$

и заменим нелокальные переменные $b_n^{(2)}(-2)$, $b_n^{(1)}(-2)$, $b_n^{(2)}(0)$ и $b_n^{(1)}(0)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} r_n &= b_n^{(1)}(-2), & s_n &= b_n^{(2)}(-2) + r_n(b_n(-1) - h_n(-1)), \\ \rho_n &= b_n^{(1)}(0), & \sigma_n &= b_n^{(2)}(0) + \rho_n(b_n(1) - h_n(1)). \end{aligned}$$

Прямым вычислением доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *В новых переменных симметрия (32) принимает вид*

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= u_{n,xx} + 2r_n u_n, & v_{n,t} &= -v_{n,xx} - 2r_n v_n, \\ w_{n,t} &= w_{n,xx} + 2\rho_n w_n, & z_{n,t} &= -z_{n,xx} - 2\rho_n z_n, \end{aligned} \quad (35)$$

а симметрия (33) – вид

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= u_{n,xxx} + 3r_n u_{n,x} - 3s_n u_n + 3r_{n,x} u_n, \\ v_{n,t} &= v_{n,xxx} + 3r_{n+1} v_{n,x} + 3s_{n+1} v_n, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} w_{n,t} &= w_{n,xxx} + 3\rho_n w_{n,x} - 3\sigma_n w_n + 3\rho_{n,x} w_n, \\ z_{n,t} &= z_{n,xxx} + 3\rho_{n+1} z_{n,x} + 3\sigma_{n+1} z_n. \end{aligned} \quad (37)$$

Такой способ записи симметрий удобен, во-первых, своей компактностью, а во-вторых, тем, что поток, задающий симметрию, для каждой динамической переменной использует *лишь эту* переменную и только две нелокальности. Кроме того, в этих переменных очень коротко переписывается первое из соотношений (31), т. е. имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Разностные производные нелокальностей r_n , s_n , ρ_n , σ_n являются полными производными по x :*

$$\partial_n r_n = \partial_x(u_n v_n), \quad \partial_n s_n = \partial_x\left(v_{n,x} u_n - \frac{1}{2}(u_n v_n)^2\right), \quad (38)$$

$$\partial_n \rho_n = \partial_x(w_n z_n), \quad \partial_n \sigma_n = \partial_x\left(z_{n,x} w_n - \frac{1}{2}(w_n z_n)^2\right). \quad (39)$$

Будем искать условия обрыва бесконечной полудискретной цепочки Тоды, совместимые с симметриями (32) и (33). Однако делать это удобно не в исходных переменных, а в новых переменных (34). Поскольку теоретически можно рассматривать сколь угодно сложные условия замыкания, ограничимся следующим случаем: будем исследовать соотношения, связывающие лишь четыре последовательные по переменной j динамические переменные и их производные (по переменным n и x). Без ограничения общности можно считать, что $j = -2, -1, 0, 1$, т. е. что мы ищем связь между переменными u_n , v_n , w_n и z_n и их производными. Однако при замыкании цепочки с помощью какого-нибудь условия обрыва могут возникнуть некоторые

дополнительные соотношения для нелокальных переменных (как это происходит в непрерывном случае) и опять-таки эти соотношения теоретически могут быть сколь угодно сложными. Поэтому и здесь необходимо установить какие-то разумные ограничения на рассматриваемые соотношения: будем в дальнейшем предполагать, что дополнительные динамические переменные r_n , s_n , ρ_n и σ_n не связаны никакими соотношениями с другими динамическими переменными (и их производными), кроме

$$u_n, v_n, w_n, z_n, u_{n\pm 1}, v_{n\pm 1}, w_{n\pm 1}, z_{n\pm 1}, \dots^3).$$

При сделанных выше предположениях справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Единственным условием обрыва вида*

$$u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1}),$$

совместимым с симметрией (35), является тривиальное: $u_n = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если считать динамические переменные*

$$v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1}, v_{n-1,x}, w_{n,x}, z_{n,x} \quad (40)$$

независимыми, то среди условий обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$ единственным условием, совместимым с симметрией (36), (37), является тривиальное: $u_n = 0$.

Таким образом, для поиска нетривиальных граничных условий, совместимых с симметрией (36), (37), требуется найти зависимость между переменными (40). Прямое, но довольно громоздкое вычисление приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть динамические переменные (40) связаны соотношением вида*

$$v_{n-1,x} = H(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1}, w_{n,x}, z_{n,x})$$

и нетривиальное условие обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$ совместимо с симметрией (36), (37). Тогда

$$v_{n-1,x} = \frac{v_{n-1}w_{n,x}}{w_n} + v_{n-1}z_nw_n,$$

а условие обрыва имеет вид

$$u_n = \frac{z_{n+1}w_{n+1}}{v_n}.$$

Легко видеть, что полученное условие обрыва в точности совпадает с граничным условием (24), а соотношение между динамическими переменными эквивалентно условию (29), т.е. рассмотрение естественного класса условий обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$, как и в непрерывном случае, приводит к цепочкам Тоды, соответствующим классическим алгебрам Ли (точнее, к их полудискретным аналогам). Однако в полудискретном случае мы получаем лишь условия обрыва, соответствующие сериям A и C .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Нетрудно провести аналогичные рассуждения и получить условия замыкания “на правом конце”, совместимые с симметриями (35) или (36), (37).

³⁾Нелокальные переменные $r_{n\pm 1}$, $\rho_{n\pm 1}$, $s_{n\pm 1}$, $\sigma_{n\pm 1}$, ... выражаются через основные динамические переменные и нелокальности r_n , ρ_n , s_n , σ_n с помощью соотношений (38), (39).

Благодарности. Автор благодарен В. Э. Адлеру, привлечшему внимание к проблеме классификации дискретных аналогов двумеризованной цепочки Тоды и собиравшему большое количество сведений, оказавшихся полезными при написании настоящей работы, а также А. Б. Шабату за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4995.2012.1), гранта Правительства РФ 2010-220-01-077 и РФФИ (гранты № 11-01-00197_а, № 11-01-12067-офи_м).

Список литературы

- [1] M. Toda, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **22**:2 (1967), 431–436.
- [2] O. I. Bogoyavlensky, *Commun. Math. Phys.*, **51**:3 (1976), 201–209.
- [3] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [4] А. Н. Лезнов, *ТМФ*, **42**:3 (1980), 343–349.
- [5] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **79**:4 (1981), 473–488.
- [6] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана*, Препринт, БФАН СССР, Уфа, 1981.
- [7] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 10–21.
- [8] Ю. Б. Сурис, *Алгебра и анализ*, **2**:2 (1990), 141–157.
- [9] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 170–175.
- [10] J. Liouville, *J. Math. Pure Appl.*, **18** (1853).
- [11] И. Т. Хабибуллин, *ТМФ*, **143**:1 (2005), 33–48.
- [12] B. Gürel, I. Habibullin, *Phys. Lett. A*, **233**:1–2 (1997), 68–72.
- [13] A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **200**:2 (1995), 121–133.
- [14] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 271–284.
- [15] I. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva, *J. Phys. A*, **44**:46 (2011), 465202, 20 pp., arXiv: 1105.4446.

Поступила в редакцию 13.01.2012