Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Манаков, П. М. Сантини, Опрокидывание волн в решениях бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили при конечных временах, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 2, 275–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:06:22

© 2012 г.

С. В. Манаков*, П. М. Сантини[†]

ОПРОКИДЫВАНИЕ ВОЛН В РЕШЕНИЯХ БЕЗДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ВРЕМЕНАХ

Обсуждаются некоторые интересные аспекты опрокидывания волн в локализованных решениях бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили – интегрируемого дифференциального уравнения в частных производных, описывающего распространение слабонелинейных квазиодномерных волн в размерности $2 + 1$, возникающих в различных физических контекстах, относящихся к акустике, физике плазмы и гидродинамике. Для этого используется недавно разработанное авторами обратное спектральное преобразование многомерных векторных полей и, в частности, связанная с этим обратная задача – нелинейная проблема Римана–Гильберта на вещественной оси. В частности, обсуждается, как производная решения обращается в бесконечность в первой точке опрокидывания в любом направлении плоскости (x, y) , за исключением поперечного, и как решение становится трехзначным в компактной области плоскости (x, y) после опрокидывания.

Ключевые слова: интегрируемое нелинейное бездисперсионное дифференциальное уравнение в частных производных, опрокидывание волн в многомерии для слабонелинейных квазиодномерных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (6КП)

$$(u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y, t) \in \mathbb{R}, \quad x, y, t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

представляет собой модельное уравнение, описывающее распространение слабонелинейных квазиодномерных волн в размерности $2 + 1$ в отсутствие дисперсии и диссипации во многих физических контекстах (см., например, работы [1]–[6]). Оно

*Институт теоретической физики им. Ландау, Москва, Россия.
E-mail: manakov@itp.ac.ru

[†]Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza,” Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma 1, Rome, Italy. E-mail: paolo.santini@roma1.infn.it

возникает как условие коммутации для пары векторных полей

$$\begin{aligned}\widehat{L}_1 &\equiv \partial_y + \lambda \partial_x - u_x \partial_\lambda, \\ \widehat{L}_2 &\equiv \partial_t + (\lambda^2 + u) \partial_x + (-\lambda u_x + u_y) \partial_\lambda,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр [7]–[9]. Такая схема интегрируемости позволяет построить формальное решение задачи Коши для уравнения бКП, а определенные должным образом аналитические по λ собственные функции приведенных векторных полей играют ключевую роль в формулировке прямой и обратной задач спектральных преобразований [10]–[12]. Обратную задачу, в частности, удобно выразить в терминах следующей нелинейной проблемы Римана–Гильберта на вещественной оси:

$$\vec{\psi}^+(\lambda) = \vec{\mathcal{R}}(\vec{\psi}^-(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $\vec{\psi}^\pm(\lambda) = (\psi_1^\pm(\lambda), \psi_2^\pm(\lambda)) \in \mathbb{C}^2$ аналитичны в верхней и нижней половинах комплексной λ -плоскости с нормировками

$$\vec{\psi}^\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^2 t - \lambda y + x - 2ut \\ \lambda \end{pmatrix} + \vec{O}(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \gg 1, \quad (4)$$

а спектральные данные $\vec{\mathcal{R}}(\vec{\zeta}) = (\mathcal{R}_1(\zeta_1, \zeta_2), \mathcal{R}_2(\zeta_1, \zeta_2)) \in \mathbb{C}^2$, $\vec{\zeta} \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяют следующим связям:

$$\begin{aligned}\text{вещественность:} \quad & \vec{\mathcal{R}}(\overline{\vec{\mathcal{R}}(\vec{\zeta})}) = \vec{\zeta} \quad \forall \vec{\zeta} \in \mathbb{C}^2, \\ \text{гамильтонова связь:} \quad & \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}_{\vec{\zeta}} \equiv \mathcal{R}_{1\zeta_1} \mathcal{R}_{2\zeta_2} - \mathcal{R}_{1\zeta_2} \mathcal{R}_{2\zeta_1} = 1.\end{aligned}\quad (5)$$

Тогда

$$u = F(x - 2ut, y, t) \in \mathbb{R} \quad (6)$$

является решением уравнения бКП (1), где

$$F(\zeta, y, t) \equiv - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{2\pi i} R_2(\psi_1^-(\lambda; \zeta, y, t), \psi_2^-(\lambda; \zeta, y, t)) \quad (7)$$

и $R_2(\zeta_1, \zeta_2) \equiv \mathcal{R}_2(\zeta_1, \zeta_2) - \zeta_2$.

Поскольку решение параметрически зависит от $(x - 2ut, y, t)$ через нормировку ψ_1 на ∞ , обратная формула (6) представляет собой неявное уравнение для решения уравнения бКП. Ситуация концептуально аналогична случаю хорошо известного решения $u = f(x - ut)$ уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$ [13], хотя и существенно более неявная, потому что, $f(x)$ является начальным условием уравнения Хопфа, в то время как функция F в формуле (7) выводится из начального условия для уравнения бКП путем прямого спектрального преобразования, введенного в работах [10], [11]. Как бы то ни было, по аналогии с $(1+1)$ -мерным случаем можно ожидать, что локализованные решения уравнения бКП будут опрокидываться за конечное время, а если начальные данные малы, то также и при больших временах, когда формулы становятся полностью явными в терминах начальных данных (подробный анализ опрокидывания волн в уравнении бКП для конечного времени и при больших временах см. в работе [14]).

В настоящей работе для исследования опрокидывания волн за конечное время мы добавляем новые формулы; при этом, в частности, мы показываем, как производная решения обращается в бесконечность в первой точке опрокидывания в любом направлении плоскости (x, y) , за исключением поперечного, а также новые явные асимптотические режимы вблизи опрокидывания и скрытую связь, которой удовлетворяет F при опрокидывании. Мы показываем также, как после опрокидывания решение становится, вообще говоря, трехзначным в компактной области плоскости (x, y) . Приведенные в настоящей работе формулы для опрокидывания как следствия из формализма, развитого в работе [14] и неявно содержащегося здесь, следует сравнить с результатами численных экспериментов для уравнения БКП (см., например, работу [15]).

2. ФОРМАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ОПРОКИДЫВАНИЯ ВОЛН ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Перепишем формулу (6) в виде

$$\begin{aligned} u &= F(\zeta, y, t), \\ x &= 2F(\zeta, y, t)t + \zeta. \end{aligned} \quad (8)$$

При заданном F из обратной формулы (7) мы решаем второе из уравнений (8) относительно ζ : $\zeta(x, y, t)$ и подставляем его в первое, что дает решение $u = F(\zeta(x, y, t), y, t)$ задачи Коши для уравнения БКП. Поэтому сингулярное многообразие (СМ) для уравнения БКП представляет собой двумерное многообразие, характеризующееся уравнением

$$\mathcal{S}(\zeta, y, t) \equiv 1 + 2F_\zeta(\zeta, y, t)t = 0, \quad (9)$$

которое можно решить относительно t , если $F_\zeta + F_{\zeta t}t \neq 0$, что дает

$$t = \check{t}(\zeta, y). \quad (10)$$

Поскольку

$$\nabla_{(x,y)} u = \frac{\nabla_{(\zeta,y)} F(\zeta, y, t)}{1 + 2F_\zeta(\zeta, y, t)t}, \quad (11)$$

градиент волны становится бесконечным на СМ и волна “опрокидывается”. Пусть t_b – первый момент времени, при котором $\mathcal{S} = 0$ в точке $\vec{\zeta}_b = (\zeta_b, y_b)$ плоскости (ζ, y) :

$$t_b \equiv \text{глобальный } \min \check{t}(\zeta, y) = \check{t}(\zeta_b, y_b) \Rightarrow 1 + 2F_\zeta(\vec{\zeta}_b, t_b)t_b = 0; \quad (12)$$

тогда мы получаем следующие условия, характеризующие точку опрокидывания $(\vec{\zeta}_b, t_b)$:

$$\begin{aligned} 1 + 2t_b F_\zeta(\vec{\zeta}_b, t_b) &= 0, \\ F_\zeta(\vec{\zeta}_b, t_b) &< 0, \quad F_\zeta(\vec{\zeta}_b, t_b) + t_b F_{\zeta t}(\vec{\zeta}_b, t_b) < 0, \\ F_{\zeta\zeta}(\vec{\zeta}_b, t_b) &= F_{\zeta y}(\vec{\zeta}_b, t_b) = 0, \\ F_{\zeta\zeta\zeta}(\vec{\zeta}_b, t_b) &> 0, \quad \beta \equiv F_{\zeta\zeta\zeta}(\vec{\zeta}_b, t_b)F_{\zeta y y}(\vec{\zeta}_b, t_b) - F_{\zeta\zeta y}^2(\vec{\zeta}_b, t_b) > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно второму из уравнений (8) в момент $t = t_b$ волна опрокидывается в точке $\vec{x}_b = (x_b, y_b)$ плоскости (x, y) , которая определяется как

$$x_b = \zeta_b + 2F(\vec{\zeta}_b, t_b)t_b. \quad (14)$$

Поэтому в общем положении решение опрокидывается в конечной точке (x_b, y_b, t_b) пространства-времени; кроме того, вследствие (11) в точке (x_b, y_b, t_b) обращаются в бесконечность все производные u за исключением производной вдоль “поперечной линии опрокидывания”, характеризуемой векторным полем $\hat{V} = 2F_y t \partial_x + \partial_y$, для которого

$$\hat{V}u = F_y. \quad (15)$$

Теперь исследуем аналитическое поведение решения уравнения БКП вблизи точки опрокидывания, вычисляя второе из уравнений (8) и уравнение (9) в режиме

$$x = x_b + x', \quad y = y_b + y', \quad t = t_b + t', \quad \zeta = \zeta_b + \zeta', \quad (16)$$

где x', y', t', ζ' малы, что в главном порядке дает кубическое уравнение

$$\zeta'^3 + a(y')\zeta'^2 + b(y', t')\zeta' - \gamma X(x', y', t') = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a(y') &= \frac{3F_{\zeta\zeta y}}{F_{\zeta\zeta\zeta}}y', & b(y', t') &= \gamma[2(F_{\zeta} + t_b F_{\zeta t})t' + F_{\zeta y y} t_b y'^2], \\ X(x', y', t') &= x' - 2F(\zeta_b, y, t)t' - 2[F(\zeta_b, y, t) - F]t_b \sim \\ &\sim x' + \frac{F_y}{F_{\zeta}}y' - 2(F + t_b F_t)t' - \frac{F_{yy}}{2|F_{\zeta}|}y'^2 - \\ &\quad - 2(F_y + t_b F_{yt})y't' - \frac{F_{yyy}}{6|F_{\zeta}|}y'^3, \\ \gamma &= \frac{6|F_{\zeta}|}{F_{\zeta\zeta\zeta}}, \end{aligned} \quad (18)$$

что соответствует максимальному равновесию

$$|\zeta'|, |y'| = O(|t'|^{1/2}), \quad X = O(|t'|^{3/2}). \quad (19)$$

В формуле (18) и далее в данном разделе будем полагать, что функция F и ее частные производные, аргументы которых не указаны, вычисляются в точке опрокидывания $(\vec{\zeta}_b, t_b)$.

Три корня кубического уравнения даются хорошо известной формулой Кардано:

$$\begin{aligned} \zeta'_0(x', y', t') &= -\frac{a}{3} + (A_+)^{1/3} + (A_-)^{1/3}, \\ \zeta'_{\pm}(x', y', t') &= -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}((A_+)^{1/3} + (A_-)^{1/3}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i((A_+)^{1/3} - (A_-)^{1/3}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$A_{\pm} = R \pm \sqrt{\Delta}, \quad (21)$$

а дискриминант

$$\Delta = R^2 + Q^3, \quad (22)$$

где

$$Q(y', t') = \frac{3b - a^2}{9} = \frac{1}{F_{\zeta\zeta\zeta}t_b} \left[2(F_{\zeta} + t_b F_{\zeta t})t' + \frac{\beta t_b}{F_{\zeta\zeta\zeta}} y'^2 \right], \quad (23)$$

$$R(x', y', t') = \frac{\gamma}{2} X(x', y', t') + \frac{ab}{18} + \frac{a}{3} Q(y', t').$$

Функция $\mathcal{S}$ в главном порядке равна

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 1 + 2F_{\zeta}t \sim F_{\zeta\zeta\zeta}t_b \left[Q + \left(\zeta' + \frac{F_{\zeta\zeta y}}{F_{\zeta\zeta\zeta}} y' \right)^2 \right] = \\ &= 2(F_{\zeta} + t_b F_{\zeta t})t' + (F_{\zeta\zeta\zeta}\zeta'^2 + 2F_{\zeta\zeta y}y'\zeta' + F_{\zeta yy}y'^2)t_b. \end{aligned} \quad (24)$$

До опрокидывания. При $t < t_b$ ($t' < 0$), поскольку коэффициент Q строго положителен (см. формулы (13) и (23)), дискриминант Δ в выражении (22) также положителен. Отсюда следует, что ζ'_0 является вещественным корнем, а $\zeta'_{\pm}$ – комплексно-сопряженные корни; поэтому решение БКП однозначно и описывается формулой Кардано. Кроме того, функция $\mathcal{S}$ также строго положительна (см. формулу (24)), откуда следует, что градиент функции u является регулярным до опрокидывания.

Ограничивая асимптотическую область в плоскости (x, y) до узкой полосы,

$$\begin{aligned} |y'| &= O(|t'|^q), \quad |X| = O(|t'|^{p+1}), \\ \frac{1}{2} &< p < 1, \quad p < \frac{p+1}{2} < q < p+1, \end{aligned} \quad (25)$$

получаем $|\zeta'| = O(|t'|^p)$ и $\zeta'^3, a\zeta'^2 \ll b\zeta' \sim \gamma X$. Тогда выражения для X и ζ' упрощаются:

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{F_y}{F_{\zeta}} y' - 2(F + t_b F_t)t' + o(|\epsilon|^{p+1}), \\ \zeta' &\sim \frac{\gamma}{b} X \sim \frac{x' + (F_y/F_{\zeta})y' - 2(F + t_b F_t)t'}{2(F_{\zeta} + t_b F_{\zeta t})t'}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда следует, что

$$u \sim F + \frac{F_{\zeta}}{2(F_{\zeta} + t_b F_{\zeta t})} \frac{x' + (F_y/F_{\zeta})y'}{t'}. \quad (27)$$

Поскольку выражение (27) должно быть решением БКП в главном порядке и

$$u_{\text{sim}} \equiv \frac{x' + (F_y/F_{\zeta})y' + ct'}{t'} \quad (28)$$

является точным решением подобия уравнения БКП, где c – произвольная постоянная, то, сравнивая формулы (27) и (28), получаем, что при опрокидывании $F(\zeta, y, t)$ должна удовлетворять условию $F_{\zeta} + 2t_b F_{\zeta t} = 0$, или, вследствие (12),

$$F_{\zeta t} = F_{\zeta}^2 = \frac{1}{4t_b^2} \quad (29)$$

(см. работу [14]), откуда следует, что

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{F_{\zeta\zeta\zeta}t_b} \left(F_{\zeta}t' + \frac{\beta t_b}{F_{\zeta\zeta\zeta}} y'^2 \right), \\ \mathcal{S} &= F_{\zeta}t' + (F_{\zeta\zeta\zeta}\zeta'^2 + 2F_{\zeta\zeta y}y'\zeta' + F_{\zeta yy}y'^2)t_b. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому в узкой полосе

$$\left| x' + \frac{F_y}{F_\zeta} y' - 2(F + t_b F_t) t' \right| = O(|t'|^{p+1}) \quad (31)$$

на плоскости (x, y) имеем

$$\zeta' \sim \frac{x' + (F_y/F_\zeta)y' - 2(F + t_b F_t)t'}{F_\zeta t'}, \quad (32)$$

и решение u приближенно оказывается точным решением подобию уравнения БКП:

$$u \sim u_{\text{sim}} = \frac{x' + (F_y/F_\zeta)y' - [F - (F_t/F_\zeta)]t'}{t'}, \quad (33)$$

описывающим плоскость, касательную к волне в узкой полосе (31), в то время как асимптотическое выражение для градиента u следует из уравнений (11) и (30):

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,y)} u &\sim \\ &\sim \frac{\nabla_{(\zeta,y)} F}{F_\zeta t' + t_b \beta / F_{\zeta\zeta\zeta} y'^2 + t_b F_{\zeta\zeta\zeta} ((x' + (F_y/F_\zeta)y' - 2(F + t_b F_t)t') / F_\zeta t' + (F_{\zeta\zeta y} / F_{\zeta\zeta\zeta}) y')^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда

$$\nabla_{(x,y)} u \sim \frac{1}{t - t_b} \left(1, \frac{F_y}{F_\zeta} \right) \quad (35)$$

в узкой полосе (31), тогда как при $|X| = O(|t'|)$ градиент является конечным. Вектор $\bar{k} = (1, F_y/F_\zeta)$, ортогональный полосе, определяет продольное направление опрокидывания.

В другой асимптотической области

$$|x'|, |y'| = O(|t'|), \quad |X| = O(|t'|), \quad (36)$$

кубическое уравнение упрощается до $\zeta'^3 \sim \gamma X$. Тогда $|\zeta'| = O(|y'|^{1/3})$ и

$$\begin{aligned} u &\sim F(\zeta_b + \sqrt[3]{\gamma X(x', y', t')}, y_b + y', t_b + t'), \\ \nabla_{(x,y)} u &\sim \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{3} \frac{\nabla_{(\zeta,y)} F}{\sqrt[3]{X^2(x', y', t')}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Если предположить, что первое из этих выражений является решением в главном порядке уравнения БКП, то из этого будет следовать еще одна скрытая связь при опрокидывании:

$$F_y^2 = F F_{\zeta t} - F_\zeta F_t. \quad (38)$$

Легко проверить, что в узкой полосе

$$x' = -\frac{F_y}{F_\zeta} y' + 2(F + t_b F_t) t' + O(|t'|^r), \quad \frac{3}{2} < r < 2, \quad |y'| = O(|t'|), \quad (39)$$

$|X| = O(|t'|^r)$, кубическое уравнение снова упрощается до $b\zeta' \sim \gamma X$, а решение опять описывается выражением

$$\zeta' \sim \frac{x' + (F_y/F_\zeta)y' - [F + (F_y/F_\zeta)^2]t'}{F_\zeta t'}, \quad u \sim \frac{x' + (F_y/F_\zeta)y' - (F_y/F_\zeta)^2 t'}{t'}, \quad (40)$$

где мы использовали соотношение $2(F + t_b F_t) = F + (F_y/F_\zeta)^2$ – следствие формул (29) и (38).

В момент опрокидывания. В пределе $t \uparrow t_b$ описанная выше касательная плоскость становится вертикальной, причем ее уравнение имеет вид $F_\zeta(x - x_b) + F_y(y - y_b) = 0$, а градиент u стремится к бесконечности в точке опрокидывания (x_b, y_b) .

Если

$$|x'| = O(|y'|), \quad |X| = O(|y'|), \quad (41)$$

то кубическое уравнение упрощается до $\zeta'^3 \sim \gamma X$, следовательно, $|\zeta'| = O(|y'|^{1/3})$ и

$$u \sim F(\zeta_b + \sqrt[3]{\gamma X_b(x', y')}, y_b + y', t_b), \\ \nabla_{(x,y)} u \sim \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{3} \frac{\nabla_{(\zeta,y)} F}{\sqrt[3]{X_b^2(x', y')}}, \quad (42)$$

где $X_b(x', y') \equiv X(x', y', 0)$. Оказывается, что приближение (42) справедливо также и в более узкой полосе $|X_b| = O(|y'|^r)$, $1 < r < 3$.

Из уравнений (42) и (15) следует, что в момент $t = t_b$ в точке опрокидывания (x_b, y_b) все производные u обращаются в бесконечность с универсальным законом общего положения $X_b^{-2/3}$, за исключением производной вдоль поперечной линии, приближенно задаваемой уравнением $X_b(x', y') = 0$ и представленной векторным полем $\hat{V} \sim -X_{b,y} \partial x + \partial y$, для которого

$$\hat{V}u|_{(x_b, y_b)} = F_y. \quad (43)$$

Наконец, заметим, что в специальном случае, когда начальное условие уравнения БКП $u(x, y, 0)$ является четным по y , т. е. $u(x, y, 0) = u(x, -y, 0)$, решение остается четным: $u(x, y, t) = u(x, -y, t)$ (поскольку уравнение БКП симметрично относительно $y \rightarrow -y$). Отсюда следует, что F также является четной по y : $F(\zeta, y, t) = F(\zeta, -y, t)$; следовательно, первая точка опрокидывания лежит на вещественной оси ($y_b = 0$) и при этом $F_y(\zeta_b, 0, t_b) = 0$. В этом случае, согласно формуле (43), y – производная функции u (производная в поперечном направлении опрокидывания $x' = 0$) равна нулю в точке опрокидывания $(x_b, 0)$.

После опрокидывания. Если $t > t_b$ ($t' > 0$), то

$$\begin{cases} Q(y', t') \leq 0, & \text{если } y_C^-(t') \leq y' \leq y_C^+(t'), \\ Q(y', t') > 0 & \text{в иных случаях,} \end{cases} \quad (44)$$

где Q задается выражением (30),

$$y_C^\pm(t') \equiv \pm |F_\zeta| \sqrt{\frac{2F_\zeta \zeta \zeta}{\beta}} \sqrt{t'}, \quad (45)$$

и СМ-уравнение $S = 0$

$$\left(\zeta' + \frac{F_{\zeta\zeta y}}{F_{\zeta\zeta\zeta}} y'\right)^2 = |Q(y', t')|, \quad y_C^-(t') < y' < y_C^+(t') \quad (46)$$

допускает вещественные решения $\zeta' = \zeta_B^\pm$, где

$$\zeta_B^\pm = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{|Q(y', t')|}. \quad (47)$$

Кроме того, из совместности уравнений (46) и (17) следует, что в пространственно-временных координатах СМ задается условием равенства нулю дискриминанта: $\Delta = 0$, которое можно решить относительно x' , что дает

$$\begin{aligned} \Delta(x', y', t') = 0 \quad \Rightarrow \quad x' &= x_B^\pm(y', t'), \\ x_B^\pm(y', t') &\equiv -\frac{F_y}{F_\zeta} y' + \left(F + \left(\frac{F_y}{F_\zeta}\right)^2\right) t' + \frac{F_{yy}}{2|F_\zeta|} y'^2 + 2(F_y + t_b F_{yt}) y' t' + \\ &+ \frac{F_{yyy}}{6|F_\zeta|} y'^3 + \frac{2}{\gamma} \left(-\frac{a(y') b(y', t')}{18} - \frac{a(y')}{3} Q(y', t') \pm |Q(y', t')|^{3/2}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Поэтому

$$\begin{cases} \Delta(x', y', t') < 0, & \text{если } y_C^-(t') < y' < y_C^+(t'), \quad x_B^-(y', t') < x' < x_B^+(y', t'), \\ \Delta(x', y', t') = 0, & \text{если } y_C^-(t') \leq y' \leq y_C^+(t'), \quad x' = x_B^\pm(y', t'), \\ \Delta(x', y', t') > 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (49)$$

и плоскость (x, y) оказывается разделенной на две части замкнутой кривой $\Delta = 0$. Внутри этой кривой $\Delta < 0$ и вещественное решение u является трехзначным; вне кривой $\Delta > 0$ и вещественное решение u является однозначным. Замкнутая кривая $\Delta(x', y', t') = 0$ содержит две точки излома (каспы) $(x_C^\pm(t'), y_C^\pm(t'))$, соответствующие $Q = R = 0$, где

$$\begin{aligned} x_C^\pm(t') &\equiv -\frac{F_y}{F_\zeta} y_C^\pm(t') + \left(F + \left(\frac{F_y}{F_\zeta}\right)^2\right) t' + \frac{F_{yy}}{2|F_\zeta|} y_C^\pm(t')^2 + 2(F_y + t_b F_{yt}) y_C^\pm(t') t' + \\ &+ \frac{F_{yyy}}{6|F_\zeta|} y_C^\pm(t')^3 - \frac{2}{\gamma} \frac{a^3(y_C^\pm(t'))}{27} = \pm F_y \sqrt{\frac{2F_{\zeta\zeta\zeta}}{\beta}} \sqrt{t'} + O(t'), \end{aligned} \quad (50)$$

на которых $\zeta'_0 = \zeta'_+ = \zeta'_- = -a/3$ и три вещественных решения уравнения БКП совпадают. Эти каспы разделяют замкнутую кривую на две линии $\gamma_\pm$, на которых $\zeta'_+ = \zeta'_- = -a/3$ и два соответствующих вещественных решения уравнения БКП совпадают. Чтобы вычислить аналитическое выражение для u в малой области вблизи двух линий $\gamma_\pm$ внутри трехзначной области, разложим ζ' и x' в кубическом уравнении (17) вблизи точек $\zeta_B^\pm, x_B^\pm$:

$$\zeta' = \zeta_B^\pm(y', t') + \tilde{\zeta}^\pm, \quad x' = x_B^\pm(y', t') \mp \tilde{x}^\pm, \quad (51)$$

и в главном порядке получим

$$\tilde{\zeta}_\sigma^+ = \sigma \sqrt{\gamma} \frac{\sqrt{\tilde{x}^+}}{\sqrt[4]{|Q(y', t')|}}, \quad \tilde{\zeta}_\sigma^- = \sigma \sqrt{\gamma} \frac{\sqrt{\tilde{x}^-}}{\sqrt[4]{|Q(y', t')|}}, \quad \sigma = \pm \quad (52)$$

(при $\tilde{x}^\pm = O(t^d)$, $d > 3/2$ имеем $\tilde{\zeta}^\pm = O(t^r)$, $r > 1/2$, как и должно быть, чтобы в формуле (51) интерпретировать $\tilde{x}^\pm$ и $\tilde{\zeta}^\pm$ как возмущения величин $x_B^\pm(y', t')$ и $\zeta_B^\pm(y', t')$ соответственно). Отсюда в узкой полосе вблизи кривой γ_- внутри области трехзначности три вещественных решения уравнения БКП имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 &\sim F\left(\zeta_b - \frac{a}{3} - 2\sqrt{|Q|}, y, t\right), \\ u_\pm &\sim F\left(\zeta_b + \zeta_B^\pm(y', t') \pm \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt[4]{|Q|}} \sqrt{|x - x_b - x_B^\pm(y', t')|}, y, t\right), \end{aligned} \quad (53)$$

а в узкой полосе вблизи кривой γ_+ внутри области трехзначности

$$\begin{aligned} u_0 &\sim F\left(\zeta_b - \frac{a}{3} + 2\sqrt{|Q|}, y, t\right), \\ u_\pm &\sim F\left(\zeta_b + \zeta_B^\pm(y', t') \pm \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt[4]{|Q|}} \sqrt{|x - x_b - x_B^\pm(y', t')|}, y, t\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Требование, чтобы $u_\pm$ из формул (53), (54) были решениями БКП в главном порядке, снова приводит к связи (38).

В завершение этого раздела заметим, что поскольку

$$x_B^+(y', t') - x_B^-(y', t') = \frac{4}{\gamma} |Q(y', t')|^{3/2} = O(t'^{3/2}), \quad (55)$$

поперечная ширина трехзначной области, оцененная через расстояние между кас-ками, имеет порядок $O(t'^{1/2})$, а продольная ширина – $O(t'^{3/2})$. Следовательно, область трехзначности развивается из точки опрокидывания (x_b, y_b) с бесконечной скоростью в поперечном направлении и с нулевой скоростью в продольном.

3. О СКРЫТЫХ СВЯЗЯХ НА F

В предыдущем разделе мы получили скрытые связи (29) и (38) для $F(\zeta, y, t)$ в точке опрокидывания, предположив, что асимптоты для u , полученные соответственно в областях (25) и (36), удовлетворяют уравнению БКП в главном порядке. В данном разделе мы предложим другой способ вывода этих связей.

Путем преобразований из уравнения (6) получаем

$$\begin{aligned} [(u_t + uu_x)_x + u_{yy}](1 + 2F_\zeta t)^3 &= 4t^2 F_{\zeta\zeta} [F_\zeta(F_t - FF_\zeta) + F_y^2] - \\ &- [F_\zeta^2 + 2tF_\zeta F_{\zeta t} + 2t(F_t - 2FF_\zeta)F_{\zeta\zeta} + 4tF_y F_{\zeta y}](1 + 2F_\zeta t) + \\ &+ (F_{\zeta t} + F_{yy} - FF_{\zeta\zeta})(1 + 2F_\zeta t)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\zeta = x - 2Ft$, откуда следует нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для $F(\zeta, y, t)$:

$$\begin{aligned} 4t^2 F_{\zeta\zeta} [F_\zeta(F_t - FF_\zeta) + F_y^2] - [F_\zeta^2 + 2tF_\zeta F_{\zeta t} + 2t(F_t - 2FF_\zeta)F_{\zeta\zeta} + \\ + 4tF_y F_{\zeta y}](1 + 2F_\zeta t) + (F_{\zeta t} + F_{yy} - FF_{\zeta\zeta})(1 + 2F_\zeta t)^2 = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Вычисляя значение выражения (57) вблизи точки опрокидывания в режиме (36), получим $|\zeta'| = O(|y'|^{1/3})$, и уравнение (57) примет вид

$$4t_b^2 F_{\zeta\zeta\zeta} C_1 \zeta' + C_2 \zeta'^2 + \text{члены высших порядков} = 0, \quad (58)$$

где

$$C_1 = F_{\zeta}(F_t - F F_{\zeta}) + F_y^2, \quad C_2 = F_{\zeta\zeta\zeta} t_b (F_{\zeta}^2 - F_{\zeta t}) + 2t_b^2 F_{\zeta} F_{\zeta\zeta\zeta} C_1 \quad (59)$$

(в формулах (58) и (59) функция F и ее частные производные вычисляются в точке опрокидывания (ζ_b, y_b, t_b)). Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и, следовательно, уравнения (38) и (29) удовлетворяются в точке опрокидывания.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00446, 08-01-90104 и 09-01-92439), в рамках двустороннего соглашения между римским университетом “La Sapienza” и Институтом теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, а также при поддержке Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma 1.

Список литературы

- [1] R. Timman, “Unsteady motion in transonic flow”, *Symposium Transsonicum* ((Aachen, 3–7 September, 1962)), ed. K. Oswatitsch, Springer, Berlin, 1964, 394–401.
- [2] Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, *Акуст. ж.*, **15**:1, 40–47.
- [3] В. В. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 753–756.
- [4] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи.*, Наука, М., 1980.
- [5] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [6] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **44**:40 (2011), 405203, 15 pp., arXiv: 1001.2134.
- [7] Y. Kodama, J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170.
- [8] V. E. Zakharov, “Dispersionless limit of integrable systems in 2 + 1 dimensions”, *Singular Limits of Dispersive Waves*, Proceedings of a NATO ARW and of a Chaos, Order, and Patterns Panel sponsored workshop (Lyons, France, July 8–12, 1991), eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum Press, New York, 1994.
- [9] I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [10] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Phys. Lett. A*, **359**:6 (2006), 613–619, arXiv: nlin/0604024.
- [11] S. V. Manakov, P. M. Santini, *JETP Lett.*, **83**:10 (2006), 462–466, arXiv: nlin/0604023.
- [12] P. G. Grinevich, P. M. Santini, *Holomorphic eigenfunctions of the vector field associated with the dispersionless Kadomtsev–Petviashvili equation*, arXiv: 1111.4446.
- [13] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [14] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **41**:5 (2008), 055204, 23 pp., arXiv: 0707.1802.
- [15] C. Klein, C. Sparber, P. Markowich, *J. Nonlinear Sci.*, **17**:5 (2007), 429–470.