Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чжун-Хао Сюй, Я. Хигучи, Чунь-Хуа Ху, Усиленный закон больших чисел для графов случайных смещенных связностей, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 344–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:33:32

© 2012 г. Чжун-Хао Сюй*, Я. Хигучи†, Чунь-Хуа Ху‡

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ГРАФОВ СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Рассматривается класс графов связностей со случайными вершинами и случайными ребрами, при этом вероятностные свойства вершин задаются непрерывным распределением вероятности, а свойства ребер – функцией связности. Выводится усиленный закон больших чисел для полной длины всех случайных ребер для графов случайных смещенных связностей, представляющих собой обобщения направленных графов с взаимодействием между k ближайшими соседями.

Ключевые слова: граф случайных связностей, граф случайных смещенных связностей, закон больших чисел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основы теории случайных графов были заложены в конце 50-х и начале 60-х годов XX века Эрдошом и Ренье [1]–[3]. Наиболее полно исследован случай графов, обозначаемых $G(n, p)$, в которых каждое возможное ребро между любыми двумя из n фиксированных вершин появляется независимо с вероятностью p и отсутствует независимо с вероятностью $1 - p$. В последнее время в ходе исследования классической модели $G(n, p)$ были построены многочисленные новые модели случайных графов, описывающие реальные процессы: распространение инфекционных заболеваний, распространение лесных пожаров, рынки акций и беспроводные сети. Хотя эти модели предлагались разными исследователями с различными целями, большинство этих моделей случайных графов можно свести к одному определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n, \dots\}$ последовательность детерминированных или независимых случайных точек с одинаковым законом распределения F на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Каждую пару точек $x, y \in \mathcal{X}$ будем соединять ребром с вероятностью $g(x, y; \mathcal{X})$, не зависящей от существования всех

*School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, China.
E-mail: hsuchunghao@gmail.com

†Department of Mathematics, Kobe University, Kobe, Japan

‡School of Applied Mathematics, Beijing Normal University, Zhuhai, China

прочих ребер. Получающийся при этом граф обозначается через $\mathcal{C}(\mathcal{X}, g)$ и называется *графом случайных связностей* с множеством вершин $\mathcal{X}$ и множеством ребер, задаваемым функцией вероятностей связностей g .

Из свойств функции распределения вероятностей связностей g может вытекать, что вероятность существования ребра между двумя точками зависит от информации о других точках.

В частности, в работе [4] для различных примеров функции g были представлены специальные модели случайных графов связностей такие, как бернуллиевская перколяция связей [5], [6], перколяция с локальной зависимостью [7], [8], случайный геометрический граф [9] и т. д. Заметим, что локально зависимые графы и случайные геометрические графы обладают похожими характеристиками:

- 1) утеряна независимость между ребрами;
- 2) функции распределения вероятностей связностей имеют конечный носитель.

На основе приведенной выше специальной модели графов случайных связностей зададим новую модель графов – графы случайных связностей с короткодействием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть граф случайных связностей $\mathcal{C}(\mathcal{X}, g)$ *графом случайных связностей с короткодействием*, если существует положительная постоянная L такая, что $g(x, y; \mathcal{X}) = 0$ для всех пар точек $x, y \in \mathcal{X}$ при $d(x, y) > L$; здесь и далее через d обозначено евклидово расстояние.

Помимо моделей графов случайных связностей, отмеченных выше, имеются и другие специальные модели: перколяция с дальнодействием (см. [10]–[12]), модели со взаимодействием с k ближайшими соседями [13]–[15], пуассонова булева модель [16], граф влияния [17] и граф относительного соседства [18] и т. д.

Все эти модели графов традиционно исследовались в рамках статистической физики и теории проверки гипотез и использовались в последние несколько лет в качестве моделей сетей с динамическими связностями, сенсорных сетей и социальных сетей. В частности, перколяции и графы случайных связностей нашли разнообразные применения в анализе данных массивов многих переменных методами непараметрической статистики, включая проверку достоверности моделей, классификации, регрессии, оценки шума, оценки плотности, кластерный анализ (см. работы [19]–[21] и приведенную в них литературу).

Хотя результаты, которые были получены с помощью указанных моделей графов, достаточно обширны, результатов, связанных с предельными теоремами, сравнительно немного, особенно для непрерывных моделей. Поэтому для графов случайных связностей представляется необходимым установить предельную теорию, т. е. центральные предельные теоремы, законы больших чисел, больших отклонений и т. д.

В разделе 2 представлена модель и приведена основная теорема, в которой сформулирован закон больших чисел. В разделе 3 формулируются некоторые результаты, необходимые для доказательства теоремы. В разделе 4 сначала доказывается основная теорема, а затем даются доказательства или источники доказательств соответствующих лемм. В разделе 5 приводятся пример и заключительные замечания.

2. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТ

Начнем с представления нашей модели. Здесь и далее для простоты изложения рассматривается модель в пространстве $\mathbb{R}^2$ с евклидовым расстоянием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ первые n точек последовательности независимых одинаково распределенных случайных переменных, принимающих значения в единичном квадрате $S = (0, 1)^2$. Предположим, что $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ – бесконечномерный вектор, в котором $0 \leq p_i \leq 1$. Точки $x, y \in \mathcal{X}_n$ соединим с помощью направленного ребра с вероятностью $g^{\mathbf{p}}(x, y; \mathcal{X}_n)$, где

$$g^{\mathbf{p}}(x, y; \mathcal{X}_n) = p_i, \quad \text{если } y - i\text{-й ближайший сосед точки } x \text{ в } \mathcal{X}_n.$$

Получающийся граф случайных связностей с распределением вероятности установления связи $g^{\mathbf{p}}$ называется *графом случайных смещенных связностей* и обозначается как $\mathcal{C}(\mathcal{X}_n, g^{\mathbf{p}})$ или $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что если $p_i = 1$ при всех $1 \leq i \leq k$ и $p_i = 0$ для $i > k$, а F представляет собой распределение Пуассона, то $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$ оказывается направленным графом с взаимодействием между k ближайшими соседями.

В настоящей работе мы будем предполагать, что случайные переменные $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ обладают одинаковыми распределениями F , для которых соответствующая функция плотности вероятности f удовлетворяет следующим двум условиям:

(T1) функция f положительна и непрерывна на S и имеет ограниченные частные производные в каждой точке S ;

(T2) $p = (p_1, \dots, p_k, 0, 0, \dots)$, где $0 \leq p_k \leq \dots \leq p_2 \leq p_1 \leq 1$ и

$$p_1 \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k)} \int_S \sqrt{f} < p_k. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В разделе 5 приводится пример функции плотности вероятности f , удовлетворяющей условиям (T1) и (T2).

Обозначим через $\xi_n(i, j)$ расстояние между точкой X_i и ее j -м ближайшим соседом в последовательности $\mathcal{X}_n$, а через $\xi_n(i)$ – полную среднюю длину всех направленных ребер, начинающихся в X_i , т. е. $\xi_n(i) = \sum_{j=1}^k p_j \xi_n(i, j)$ при $i = 1, \dots, n$. Обозначим через η_n их суммарную длину, $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_n(i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что величины $\{\xi_n(i), i = 1, \dots, n\}$ имеют одинаковые распределения, но не являются независимыми.

Предположив, что $a_n = E\xi_n(i)$, $b_n^2 = \text{Var}(\xi_n(i))$ и $\eta_n^* = (\eta_n - na_n)/b_n$, придем к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{C}_n^{\mathbf{p}}$ представляет собой граф случайных смещенных связностей с параметром $\mathbf{p}$ и с функцией плотности вероятности f , удовлетворяющей условиям (T1) и (T2). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\eta_n^*}{n} \rightarrow 0 \quad \text{почти наверное.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [4] доказана центральная предельная теорема для полной длины ребер графа со случайными смещенными связностями в случае, когда F – распределение Пуассона. Метод доказательства основан на применении графов зависимостей [22] и на результатах работы [14].

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Прежде чем привести доказательство теоремы 1, необходимо сформулировать несколько лемм. Их доказательства или источники, содержащие их доказательства, приведены в разделе 4.

ЛЕММА 1 (лемма о накрытии точек [23]). Пусть $B_1, \dots, B_n$ – замкнутые шары на плоскости $\mathbb{R}^2$ с центрами $p_1, \dots, p_n$ соответственно. Если при всех $1 \leq i \leq n$ справедлива оценка $|(int B_i) \cap \{p_1, \dots, p_n\}| \leq k$, то существует постоянная τ такая, что при всех $p \in \mathbb{R}^2$ имеем $|i: p \in B_i| \leq \tau k$.

Лемма о накрытии точек указывает верхнюю оценку числа точек, которые могут иметь одного и того же ближайшего соседа.

ЛЕММА 2 (неравенство Эфрона–Штайна [24]). Пусть $Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ – одинаково распределенные и независимые случайные переменные в $\mathbb{R}^d$, а $h: \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ – симметричная функция. Предположим, что

$$Z = h(Y_1, \dots, Y_n), \quad Z_{(i)} = h(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_{n+1}),$$

тогда для любой величины δ имеет место следующее неравенство:

$$\text{Var}(Z) \leq \sum_{i=1}^{n+1} E \left[Z_{(i)} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} Z_{(i)} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} E[Z_{(i)} - \delta]^2 \leq (n+1)E[Z - \delta]^2. \quad (2)$$

Следующая лемма дает асимптотическое выражение для положительных моментов распределения k ближайших соседей.

ЛЕММА 3 [25]. При выполнении условий (T1) и (T2) справедливы следующие утверждения.

1. Для произвольного целого числа $\alpha \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$E[\xi_n(i, j)]^\alpha = n^{-\alpha/2} C(\alpha, j) \pi^{-\alpha/2} \int_S f^{1-\alpha/2}, \quad (3)$$

где $C(\alpha, j) = \Gamma(j + \alpha/2) / \Gamma(j)$.

2. Обозначим через $B(X_i, \xi_n(i, k))$ шар радиуса $\xi_n(i, k)$ с центром в точке X_i . Тогда для произвольного $x \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$P(x \in B(X_i, \xi_n(i, k))) = \frac{k}{n}.$$

ЛЕММА 4. Существует положительная константа $C(k)$ такая, что для достаточно большого n

$$E(\eta_n - \eta_{n+1})^2 \leq \frac{C(k)}{2} \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Лемма 4 лежит в основе доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 5. *Существуют положительные константы $A_0(k)$, $A_1(k)$, $B_0(k)$ и $B_1(k)$ такие, что при достаточно большом n*

$$\begin{aligned}(a_n - a_{n+1})^2 &\leq \frac{A_0(k)}{n^3}, & a_n &\leq \frac{A_1(k)}{n^{1/2}}, \\ (b_n - b_{n+1})^2 &\leq \frac{B_0(k)}{n^2}, & b_n^2 &\geq \frac{B_1(k)}{n}.\end{aligned}$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем сначала, что найдется положительная постоянная $C^*(k)$ такая, что

$$E(\eta_n^* - \eta_{n+1}^*)^2 \leq \frac{C^*(k)}{2}. \quad (5)$$

При каждом фиксированном n величину η_n можно рассматривать как симметричную функцию от n одинаково распределенных независимых случайных переменных $X_1, \dots, X_n$. Применим неравенство Эфрона–Штайна, выбрав $\delta = \eta_{n+1}$ в (2). В соответствии с леммой 4 получим, что $\text{Var}(\eta_n) \leq (n+1)E(\eta_n - \eta_{n+1})^2 \leq C(k)$.

Перепишем $\eta_n^* - \eta_{n+1}^*$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\eta_n^* - \eta_{n+1}^* &= \frac{\eta_n - na_n}{b_n} - \frac{\eta_{n+1} - (n+1)a_{n+1}}{b_{n+1}} = \\ &= \frac{\eta_n - \eta_{n+1}}{b_n} + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) (\eta_{n+1} - (n+1)a_{n+1}) + \frac{a_{n+1}}{b_n} - \frac{n(a_n - a_{n+1})}{b_n}.\end{aligned}$$

Тем самым в соответствии с неравенством Коши–Шварца имеем

$$\begin{aligned}(\eta_n^* - \eta_{n+1}^*)^2 &\leq 4 \left[\frac{(\eta_n - \eta_{n+1})^2}{b_n^2} + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)^2 (\eta_{n+1} - (n+1)a_{n+1})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{n+1}^2}{b_n^2} + \frac{n^2(a_n - a_{n+1})^2}{b_n^2} \right].\end{aligned}$$

Вычислив математическое ожидание от обеих частей этого неравенства и применив лемму 5, а также с учетом того факта, что $\text{Var}(\eta_n) \leq C(k)$, получим

$$E(\eta_n^* - \eta_{n+1}^*)^2 \leq 4 \left[\frac{C(k)}{B_1(k)} + \frac{B_0(k)C(k)}{B_1^2(k)} + \frac{A_1^2(k)}{B_1(k)} + \frac{A_0(k)}{B_1(k)} \right] \triangleq \frac{C^*(k)}{2}. \quad (6)$$

Снова применив неравенство Эфрона–Штайна, получим

$$\text{Var}(\eta_n^*) \leq (n+1)E(\eta_n^* - \eta_{n+1}^*)^2 \leq C^*(k)n.$$

Теперь в силу неравенства Маркова имеем

$$P\left(\frac{\eta_n^*}{n} > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n} \frac{C^*(k)}{\varepsilon^2}.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли можно найти подпоследовательность m^2 такую, что при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\eta_{m^2}^*}{m^2} \rightarrow 0 \quad \text{почти наверное.} \quad (7)$$

При каждом n таком, что $m^2 < n < (m+1)^2$, имеет место неравенство

$$|\eta_n^* - \eta_{m^2}^*| \leq \sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} |\eta_j^* - \eta_{j-1}^*|.$$

Тем самым в силу неравенства Коши–Шварца получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{m^2} \max_{m^2 < n < (m+1)^2} |\eta_n^* - \eta_{m^2}^*| \right]^2 &\leq \left[\sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} \frac{1}{m^2} |\eta_j^* - \eta_{j-1}^*| \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} \left(\frac{1}{m^2} \right)^2 \cdot \sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} |\eta_j^* - \eta_{j-1}^*|^2 = \frac{2}{m^3} \sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} |\eta_j^* - \eta_{j-1}^*|^2, \end{aligned}$$

отсюда имеем

$$E \left[\frac{1}{m^2} \max_{m^2 < n < (m+1)^2} |\eta_n^* - \eta_{m^2}^*| \right]^2 \leq \frac{2}{m^3} \sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2-1} E |\eta_j^* - \eta_{j-1}^*|^2 \leq \frac{2C^*(k)}{m^2},$$

где последнее неравенство следует из (5) и из того обстоятельства, что для каждого j величина η_j^* имеет одно и то же распределение.

Снова применив неравенство Маркова и лемму Бореля–Кантелли, получим, что при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m^2} \max_{m^2 < n < (m+1)^2} |\eta_n^* - \eta_{m^2}^*|^2 \rightarrow 0 \quad \text{почти наверное.} \quad (8)$$

Следовательно, можно выбрать m так, что $m^2 < n < (m+1)^2$, тогда в соответствии с (7) и (8) получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\eta_n^*}{n} \leq \frac{\eta_{m^2}^*}{m^2} + \frac{1}{m^2} \max_{m^2 < n < (m+1)^2} |\eta_n^* - \eta_{m^2}^*|^2 \rightarrow 0 \quad \text{почти наверное.}$$

Доказательство теоремы завершено.

Перейдем теперь к доказательству лемм из раздела 3.

Лемма 1 – это лемма 4.1 из работы [23].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Первое неравенство в (2) представляет собой неравенство Эфрона–Штайна (1.6) из работы [24]. Второе неравенство следует из того, что для любой величины δ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} E \left[Z_{(i)} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} Z_{(i)} \right]^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} E \left[(Z_{(i)} - \delta) - \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} Z_{(i)} - \delta \right) \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} E (Z_{(i)} - \delta)^2 - (n+1) E \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} Z_{(i)} - \delta \right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} E (Z_{(i)} - \delta)^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство основано на том, что величины $Z_{(i)}, i = 1, \dots, n+1$, имеют одинаковые распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Первое утверждение представляет собой случай размерности $d = 2$ из теоремы 5.4 в работе [25].

Докажем второе утверждение. Напомним, что $\xi_n(i, k)$ есть расстояние между точкой X_i и ее k -м ближайшим соседом; $\xi_n(i, k)$ – случайная величина, принимающая значения в интервале $[0, \sqrt{2}]$, обозначим через $G(r)$ ее функцию распределения. Теперь из леммы 4.1 работы [25] получим

$$dG(r) = k \binom{n-1}{k} \omega(r)^{k-1} (1 - \omega(r))^{n-1-k} d\omega(r),$$

где $\omega(r)$ обозначает вероятность того, что соответствующая точка выбирается из шара $B(X_i, r)$ с центром в точке X_i и радиусом r . Тогда

$$\begin{aligned} P(x \in B(X_i, \xi_n(i, k))) &= \int_0^{\sqrt{2}} P(x \in B(X_i, r)) dG(r) = \int_0^{\sqrt{2}} \omega(r) dG(r) = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \omega(r) k \binom{n-1}{k} \omega(r)^{k-1} (1 - \omega(r))^{n-1-k} d\omega(r) = \\ &= \binom{n-1}{k} \int_0^1 k t^k (1-t)^{n-k-1} dt = \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Определим случайные величины

$$I(i, j, n+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{n+1} - j\text{-й ближайший сосед точки } X_i \text{ в } \mathcal{X}_{n+1}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$J(i, n+1) = \sum_{j=1}^k I(i, j, n+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{n+1} - \text{один из всех } k \text{ ближайших} \\ & \text{соседей точки } X_i \text{ в } \mathcal{X}_{n+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу леммы 3 имеем

$$P(J(i, n+1) = 1) = \frac{k}{n}, \quad P(I(i, j, n+1) = 1) = \frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Пусть $N_n = \{i: i = 1, \dots, n, J(i, n+1) = 1\}$. Тогда из леммы о накрытии точек следует, что $|N_n| \leq \tau k$.

Если $I(i, j, n+1) = 1$, т. е. точка X_{n+1} оказывается j -м ближайшим соседом точки X_i в $\mathcal{X}_{n+1}$, то

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(i) &= p_1 \xi_n(i, 1) + \dots + p_{j-1} \xi_n(i, j-1) + p_j d(X_i, X_{n+1}) + \\ &+ p_{j+1} \xi_n(i, j) + \dots + p_k \xi_n(i, k-1). \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \xi_n(i) &= p_1 \xi_n(i, 1) + \dots + p_{j-1} \xi_n(i, j-1) + p_j \xi_n(i, j) + \\ &+ p_{j+1} \xi_n(i, j+1) + \dots + p_k \xi_n(i, k), \end{aligned}$$

получим

$$0 \leq \xi_n(i) - \xi_{n+1}(i) = p_j(\xi_n(i, j) - d(X_i, X_{n+1})) + \dots + p_k(\xi_n(i, k) - \xi_n(i, k-1)) \leq \\ \leq p_j(\xi_n(i, k) - d(X_i, X_{n+1})) \leq p_j \xi_n(i, k).$$

Если $J(i, n+1) = 0$, то, очевидно, $\xi_n(i) = \xi_{n+1}(i)$.

Тем самым имеем

$$E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k I(i, j, n+1) (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right] = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k E[(\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 | I(i, j, n+1) = 1] \cdot P(I(i, j, n+1) = 1) \leq \\ \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k E[p_j^2 \xi_n^2(i, k) | I(i, j, n+1) = 1] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_j^2 E \xi_n^2(i, k),$$

где последнее равенство следует из независимости величин $\xi_n(i, k)$ и X_{n+1} .

Заметим, что при различных $i = 1, \dots, n$ величины $\xi(i, k)$ имеют одинаковые распределения, и в силу леммы 3 при достаточно больших n

$$E \xi_n^2(i, k) = \frac{\pi^{-1}k}{n},$$

что дает

$$E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right] \leq E \xi_n^2(i, k) \sum_{j=1}^k p_j^2 \leq \frac{\pi^{-1}k}{n} \sum_{j=1}^k p_j^2. \quad (9)$$

Таким образом, в силу неравенства Коши–Шварца и неравенства (9)

$$E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right]^2 \leq E \left[\sum_{i=1}^n J(i, n+1) (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right]^2 = \\ = E \left[\sum_{i \in N_n} (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right]^2 \leq |N_n| E \left[\sum_{i \in N_n} (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right] \leq \\ \leq \tau k \cdot E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right] = \frac{1}{n} \left(\tau \pi^{-1} k^2 \sum_{j=1}^k p_j^2 \right) \triangleq \frac{1}{n} A_0(k). \quad (10)$$

Теперь мы можем написать соотношения

$$E(\eta_n - \eta_{n+1})^2 = E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) - \sum_{j=1}^k \xi_{n+1}(n+1, j) \right]^2 \leq \\ \leq 2E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right]^2 + 2k^2 p_1^2 \cdot E \xi_{n+1}^2(n+1, k) \leq \\ \leq \frac{1}{n} (2A_0(k) + 2k^2 p_1^2 \cdot \pi^{-1}k) \triangleq \frac{1}{n} \frac{C(k)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Поскольку величины $\{\xi_n(i), i = 1, \dots, n\}$ имеют одинаковые распределения,

$$a_n - a_{n+1} = E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right].$$

В силу неравенства Коши–Шварца и соотношений (10)

$$(a_n - a_{n+1})^2 \leq \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)) \right]^2 \leq \frac{A_0(k)}{n^3}.$$

Согласно лемме 3 при достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} a_n &= E\xi_n(i) = E \left[\sum_{j=1}^k p_j \xi_n(i, j) \right] \leq E\xi_n(i, k) \sum_{j=1}^k p_j = \\ &= \left(\sum_{j=1}^k p_j C(1, k) \pi^{-1/2} \int \sqrt{f} \right) n^{-1/2} \triangleq A_1(k) n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Приведем теперь верхнюю оценку для величины $(b_n - b_{n+1})^2$. По определению и в силу неравенства Коши–Шварца получим

$$\begin{aligned} b_n^2 b_{n+1}^2 &= E[\xi_n(i) - E\xi_n(i)]^2 E[\xi_{n+1}(i) - E\xi_{n+1}(i)]^2 \geq \\ &\geq \{E[(\xi_n(i) - E\xi_n(i))(\xi_{n+1}(i) - E\xi_{n+1}(i))]\}^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} (b_n - b_{n+1})^2 &= b_n^2 + b_{n+1}^2 - 2b_n b_{n+1} \leq \\ &\leq E[\xi_n(i) - E\xi_n(i)]^2 + E[\xi_{n+1}(i) - E\xi_{n+1}(i)]^2 - \\ &\quad - 2E[(\xi_n(i) - E\xi_n(i))(\xi_{n+1}(i) - E\xi_{n+1}(i))] = \\ &= E[(\xi_n(i) - E\xi_n(i)) - (\xi_{n+1}(i) - E\xi_{n+1}(i))]^2 \leq \\ &\leq E[\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i)]^2 = \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n (\xi_n(i) - \xi_{n+1}(i))^2 \right], \end{aligned}$$

где последнее равенство основано на том, что величины $\{\xi_n(i), i = 1, \dots, n\}$ имеют одинаковые распределения.

Теперь в силу (9) получим

$$(b_n - b_{n+1})^2 \leq \frac{1}{n} \frac{\pi^{-1} k}{n} \sum_{j=1}^k p_j^2 \triangleq \frac{B_0(k)}{n^2}.$$

Как и в случае величин a_n , при достаточно большом n имеем

$$\begin{aligned} b_n^2 &= E\xi_n^2(i) - (E\xi_n(i))^2 = E \left[\sum_{j=1}^k p_j \xi_n(i, j) \right]^2 - \left[E \left(\sum_{j=1}^k p_j \xi_n(i, j) \right) \right]^2 \geq \\ &\geq k^2 p_k^2 E\xi_n^2(i, 1) - k^2 p_1^2 (E\xi_n(i, k))^2 = \\ &= k^2 \pi^{-1} \left[p_k^2 - p_1^2 \left(C(1, k) \int_S \sqrt{f} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \triangleq B_1(k) \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

В силу условия (1) справедливо неравенство $B_1(k) > 0$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе доказан закон больших чисел для суммарной длины всех ребер графов случайных смещенных связностей. Тем не менее по техническим соображениям оказалось необходимо наложить на распределение случайных точек определенные условия (T1) и (T2). Приведем теперь пример функции плотности вероятности f , удовлетворяющей условиям (T1) и (T2):

$$f(x, y) = (8k - 4)^2(xy)^{8k-5}, \quad (x, y) \in S.$$

Достаточно показать, что в (1)

$$\frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k)} \int_S \sqrt{f} < 1.$$

Действительно, имеем

$$\frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k)} = \frac{(2k - 1)!!\sqrt{\pi}}{2^k(k - 1)!} < 2k - 1$$

и

$$\int_S \sqrt{f} = (8k - 4) \left(\int_0^1 x^{4k-5/2} dx \right)^2 = \frac{16(2k - 1)}{(8k - 3)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k)} \int_S \sqrt{f} < (2k - 1) \frac{16(2k - 1)}{(8k - 3)^2} < 1.$$

По-видимому, методы доказательства законов больших чисел, приведенные в настоящей работе, и центральной предельной теоремы, приведенные в работе [4] для графов случайных смещенных связностей, можно применить к модели графов случайных связностей с короткодействием. Это будет содержанием следующих публикаций.

Благодарности. Работа частично поддержана Natural Science Foundation of China (71071056)(10971008).

Список литературы

- [1] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.
- [2] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. Ser. A*, **5** (1960), 17–61.
- [3] P. Erdős, A. Rényi, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **38**:4 (1961), 343–347.
- [4] Z. H. Xu, Y. Higuchi, *Sci. China Ser. A*, **42**:8 (2012), 821–826.
- [5] G. Grimmett, *Percolation*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **321**, 2nd ed., Springer, Berlin, 1999.
- [6] B. Bollobás, O. Riordan, *Percolation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [7] K. Kuulasmaa, *J. Appl. Probab.*, **19**:4 (1982), 745–758.
- [8] Z. H. Xu, D. Han, *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, **26**:6 (2010), 649–661.
- [9] M. D. Penrose, *Random Geometric Graphs*, Oxford Studies in Probability, **5**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
- [10] I. Benjamini, N. Berger, *Random Structures Algorithms*, **19**:2 (2001), 102–111.
- [11] D. Coppersmith, D. Gamarnik, M. Sviridenko, *Random Structures Algorithms*, **21**:1 (2002), 1–13.

- [12] M. Biskup, *Random Structures Algorithms*, **39**:2 (2011), 210–227.
- [13] M. D. Penrose, *Stochastic Process. Appl.*, **85**:2 (2000), 295–320.
- [14] F. Xue, P. R. Kumar, *Wireless Networks*, **10**:2 (2004), 169–181.
- [15] S. H. Teng, F. F. Yao, *Algorithmica*, **49**:3 (2007), 192–211.
- [16] R. Meester, R. Roy, *Continuum Percolation*, Cambridge Tracts in Mathematics, **119**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [17] R. A. Dwyer, *Comput. Geom.*, **5**:3 (1995), 155–164.
- [18] G. T. Toussaint, *Pattern Recognition*, **12**:4 (1980), 261–268.
- [19] P. J. Bickel, L. Breiman, *Ann. Probab.*, **11** (1983), 185–214.
- [20] D. Evans, A. J. Jones, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **458**:2027 (2002), 2759–2799.
- [21] N. Henze, *Adv. Appl. Probab.*, **19**:4 (1987), 873–895.
- [22] P. Baldi, Y. Rinott, *Ann. Probab.*, **17**:4 (1989), 1646–1650.
- [23] G. L. Miller, S. H. Teng, S. Vavasis, “A unified geometric approach to graph separators”, *Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Foundation of Computer Science* (San Juan, Puerto Rico, October 1–4, 1991), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1991, 538–547.
- [24] B. Efron, C. Stein, *Ann. Statist.*, **9** (1981), 586–596.
- [25] D. Evans, A. J. Jones, W. M. Schmidt, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **458**:2028 (2002), 2839–2849.

Поступила в редакцию 17.01.2012