Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Алексеев, Формфакторы в моделях, связанных с моделью Буллоу–Додда, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 2, 219–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:20:21

© 2012 г.

О. В. Алексеев*

ФОРМФАКТОРЫ В МОДЕЛЯХ, СВЯЗАННЫХ С МОДЕЛЬЮ БУЛЛОУ–ДОДДА: МОДЕЛЬ ИЗИНГА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрена некоторая модификация свободнополевого представления в модели Буллоу–Додда. Двухчастичные минимальные формфакторы исключены из конструкции. Как следствие получено удобное представление для многочастичных формфакторов, установлены рекурсивные соотношения между ними и изучены их свойства. Предложенная конструкция используется для получения свободнополевого представления формфакторов легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях. В качестве важного примера рассмотрена модель Изинга в магнитном поле. Проверено, что результаты, полученные в рамках предложенного свободнополевого представления, находятся в согласии с соответствующими результатами, полученными в результате решения уравнения бустрапа.

Ключевые слова: интегрируемая теория поля, модель Изинга, свободнополевое представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, двумерные статистические модели в своих критических точках описываются так называемыми минимальными моделями конформной теории поля (КТП) [1]. Вне критических точек скейлинговая область может быть описана релевантными возмущениями действия в фиксированной точке. Соответствующие модели могут быть названы возмущенными минимальными моделями. Возмущения разрушают дальнедействующие корреляции критической модели, и соответствующие КТП обычно являются массивными. Однако в некоторых случаях бесконечное количество интегралов движения сохраняется. В частности, минимальные модели, возмущенные одним из примарных операторов $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,1}$, $\Phi_{1,3}$, как известно, являются интегрируемыми [2], [3]. Кроме того, в работе [4] показано, что $\Phi_{1,5}$ -возмущение неунитарной минимальной модели также интегрируемо. $\Phi_{1,3}$ -возмущенные минимальные модели могут описываться как некоторые ограничения модели синус-Гордон [5], [6]. Остальные случаи связаны с некоторыми

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: alekseev@itp.ac.ru

квантово-групповыми рестрикциями модели Жибера–Михайлова–Шабата (ЖМШ) [4], [7], [8].

Поведение вне массовой поверхности этих моделей может быть изучено в рамках формфакторного подхода [9]. В частности, корреляционные функции можно реконструировать, используя представление спектральной плотности. Быстрый радиус сходимости спектральных серий для всех масштабов [10] позволяет вычислять их достаточно точно, игнорируя многочастичные формфакторы. Кроме того, в последнее время другое применение формфакторного подхода серьезно развивается в рамках изучения специфического класса двумерных неинтегрируемых теорий поля. Неинтегрируемые теории поля могут рассматриваться как особые возмущения интегрируемых теорий [11], и многочастичные формфакторы значимы при изучении этих моделей. Специфический пример представляет собой модель Изинга, поведение которой вне массовой оболочки можно рассматривать, используя две различные интегрируемые модели. Недавно был достигнут прогресс в изучении магнитной деформации модели Изинга при некритической температуре [12]. Теория возмущений в окрестности другой интегрируемой точки более сложная [13]. Некоторые численные результаты были получены в работах [14], [15] с помощью усеченного конформно-пространственного подхода.

Упомянутая связь между разными интегрируемыми моделями обуславливает эффективный метод вычисления формфакторов в возмущенных минимальных моделях. Например, S -матрица частиц в $\Phi_{1,3}$ -возмущенной минимальной модели возникает из S -матрицы бризеров соответствующей модели синус-Гордон, поведение которой вне массовой поверхности было рассмотрено во многих работах [16], [17]. Однако для $\Phi_{1,2}$ -, $\Phi_{2,1}$ - и $\Phi_{1,5}$ -возмущенных минимальных моделей ситуация несколько иная из-за сложности S -матрицы модели ЖМШ [7], [8]. В настоящей работе мы рассмотрим очень узкий класс формфакторов, которые могут быть получены из формфакторов модели Буллоу–Додда (БД) [18]–[20]. Удобный метод вычисления многочастичных формфакторов обеспечивается в подходе свободнополевого представления [21]. Этот метод успешно применялся во многих интегрируемых моделях [22]–[26]. Свободнополевоe представление для модели БД было предложено в работах [27], [28]. Однако в некоторых случаях специфическая модификация свободнополевого представления более удобна. В этом представлении двухточечные минимальные формфакторы исключаются из конструкции. В работах [29], [30] этот метод применялся для нахождения формфакторов операторов потомков. В настоящей работе мы рассматриваем другую его особенность. А именно, это представление обладает простыми аналитическими свойствами и может использоваться для получения удобного свободнополевого представления для формфакторов легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях.

Как известно, в свободнополевоm представлении вычисление многочастичных формфакторов сводится к комбинаторной процедуре. N -частичные формфакторы в модели БД и, следовательно, в соответствующих возмущенных минимальных моделях даются суммой 3^N членов. В противоположность общепринятой конструкции в предложенном свободнополевоm представлении процедура виковского усреднения генерирует функции с простыми аналитическими функциями. Эта особенность позволяет получить некоторые рекурсивные соотношения между многочастичными формфакторами и доказать отражательные свойства для формфакторов экс-

поненциальных операторов, которые были предложены в работе [31]. К тому же мы доказываем, что формфакторы удовлетворяют квантовым уравнениям движения. Некоторые рестрикции модели БД с мнимой константой связи соответствуют $\Phi_{1,2}$ -, $\Phi_{1,5}$ - или $\Phi_{2,1}$ -возмущениям $\mathcal{M}_{p,p'}$ минимальных моделей [4], [7], [8]. В настоящей работе мы рассматриваем первую возможность. S -матрица легчайших частиц в этих моделях [32] соответствует S -матрице модели БД, аналитически продолженной на мнимые значения константы связи. Это позволяет предложить свободно-полевое представление для формфакторов легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях.

В качестве важного примера мы рассматриваем модель Изинга в магнитном поле (МИМП), которая соответствует $\Phi_{1,2}$ -возмущению $\mathcal{M}_{3,4}$ минимальной модели и, как известно, связана с алгеброй E_8 [3]. Трудной проблемой является получение свободнополевого представления, связанного с этой алгеброй, напрямую. Замечательная связь между МИМП и моделью БД была установлена в работах [27], [28]. Мы предлагаем свободнополевое представление для формфакторов легчайших частиц в явном виде и сравниваем вычисления, выполненные в рамках свободно-полевого представления, с соответствующими результатами, полученными в работах [13], [33] путем решения уравнений бутстрапа. Оказывается, что эти результаты находятся в полном согласии.

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем общие особенности двумерных интегрируемых КТП и определяем используемые обозначения. В разделе 3 мы предлагаем модификацию свободнополевого представления, исключая двухчастичные минимальные формфакторы из конструкции, обсуждаем особенности предложенного представления и получаем некоторые рекурсивные соотношения между формфакторами. Используя эти соотношения, мы доказываем отражательные свойства формфакторов экспоненциальных операторов и показываем, что эти формфакторы удовлетворяют квантовым уравнениям движения. В разделе 4 мы рассматриваем квантово-групповую рестрикцию комплексной модели БД, которая соответствует $\Phi_{1,2}$ -возмущениям $\mathcal{M}_{p,p'}$ минимальных моделей, и предлагаем свободнополевое представление для формфакторов легчайших частиц в этих моделях. Как пример предложенной конструкции мы рассматриваем МИМП.

2. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим релятивистскую теорию рассеяния, содержащую n сортов частиц A_a , $a = 1, \dots, n$, с массами m_a . Мы введем обозначение $A_a(\theta)$ для частицы A_a , имеющей быстроту θ ,

$$p_a^0 = m_a \operatorname{ch} \theta_a, \quad p_a^1 = m_a \operatorname{sh} \theta_a, \quad (2.1)$$

где p_a^0, p_a^1 – компоненты двумерного импульса p_a такие, что условие массовой оболочки выполнено, т. е. $p_a^2 = m_a^2$. Состояния

$$|A_{a_1}(\theta_1), \dots, A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{\text{in(out)}} \quad (2.2)$$

образуют базис асимптотических in(out)-состояний, который предполагается полным. Быстроты состояний предполагаются упорядоченными, т. е. $\theta_1 > \dots > \theta_n$ для входящих асимптотических состояний и $\theta_1 < \dots < \theta_n$ для исходящих.

S -матрица определяется как унитарное преобразование, связывающее in- и out-асимптотические состояния. Предположим, что все частицы A_a имеют различные массы. Это предположение, в частности, подразумевает, что все частицы нейтральны, $\bar{A}_a = A_a$, где $\bar{A}_a$ обозначает соответствующую античастицу. Мы ограничимся только случаем диагонального рассеяния. Тогда S -матрица диагональна в базисе (2.2):

$$|A_{a_1}(\theta_1), \dots, A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{\text{in}} = S_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) |A_{a_1}(\theta_1), \dots, A_{a_n}(\theta_n)\rangle_{\text{out}}. \quad (2.3)$$

Бесконечное число интегралов движения в интегрируемых теориях вынуждает процессы рассеяния быть полностью упругими, т. е. конечное состояние содержит такое же количество частиц с теми же самыми импульсами, что и начальное. Следовательно, n -частичные S -матричные элементы в формуле (2.3) факторизуются в произведение $n(n-1)/2$ двухчастичных:

$$S_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \prod_{i < j} S_{a_i a_j}(\theta_i, \theta_j). \quad (2.4)$$

Амплитуды $S_{ab}(\theta_1, \theta_2)$ – мероморфные функции разности быстрот $\theta = \theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$, действительные при $\text{Re } \theta = 0$ и удовлетворяющие уравнениям

$$S_{ab}(\theta) = S_{ab}(i\pi - \theta), \quad S_{ab}(\theta)S_{ab}(-\theta) = 1, \quad (2.5)$$

которые выражают кроссинг-симметрию и условие унитарности теории соответственно. Из этих условий следует, что амплитуды $S_{ab}(\theta)$ являются $2\pi i$ -периодическими функциями, которые полностью определяются положением своих нулей и полюсов в “физической полосе” $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi$. Полюсы в этой полосе располагаются на $\text{Re } \theta = 0$. Простые полюсы с положительными вычетами соответствуют “связным состояниям” в s -канале $A_a A_b$ рассеяния, в то время как полюсы с отрицательными вычетами соответствуют “связным состояниям” в u -канале. Основное требование бутстрапа – то, что “связные состояния” должны принадлежать тому же набору частиц A_a , $a = 1, \dots, n$. Простые полюсы с положительными вычетами двухчастичной амплитуды $S_{ab}(\theta)$ при $\theta = iu_{ab}^c$ представляют собой частицу A_c с массой

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \cos u_{ab}^c, \quad u_{ab}^c \in (0, \pi), \quad (2.6)$$

в s -канале $A_a A_b$ рассеяния. Вблизи полюса связанного состояния двухчастичная амплитуда принимает вид

$$S_{ab}(\theta \simeq iu_{ab}^c) \simeq \frac{i(\Gamma_{ab}^c)^2}{\theta - iu_{ab}^c}, \quad (2.7)$$

где Γ_{ab}^c называется трехчастичной константой связи.

Поведение интегрируемых моделей вне массовой поверхности может быть изучено в рамках формфакторного подхода. Для локального оператора $\mathcal{O}(x)$ его формфактор определяется как матричный элемент этого оператора в базисе асимптотических состояний:

$$F_{a'_1 \dots a'_m; a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta'_m, \dots, \theta'_1 | \theta_1, \dots, \theta_n) = a'_1 \dots a'_m \langle \theta'_1, \dots, \theta'_m | \mathcal{O}(0) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{a_1 \dots a_n}. \quad (2.8)$$

Условие кроссинг-симметрии S -матрицы (2.5) означает, что формфакторы могут быть выражены в терминах матричных элементов

$$F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 \dots \theta_n) = \langle \text{vac} | \mathcal{O}(0) | \theta_1 \dots \theta_n \rangle_{a_1 \dots a_n}, \quad (2.9)$$

где $\langle \text{vac} |$ – вакуумное состояние (без частиц) теории рассеяния.

Рассмотрим общие условия, которые обуславливают систематический способ нахождения формфакторов. Для скалярного оператора $\mathcal{O}(x)$ условие релятивистской инвариантности подразумевает, что его формфактор зависит только от разности быстрот $\theta_i - \theta_j$, в то время как для оператора со спином s можно получить следующее условие:

$$F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + \Lambda, \dots, \theta_n + \Lambda) = e^{s\Lambda} F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (2.10)$$

Формфакторы (2.9) удовлетворяют набору условий, называемых формфакторными аксиомами, которые получаются из предположений максимальной аналитичности [9]. Эти условия следующие:

1) теорема Ватсона:

$$\begin{aligned} F_{\dots a_k a_{k+1} \dots}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_k, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) = \\ = S(\theta_{k+1} - \theta_k) F_{\dots a_{k+1} a_k \dots}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_{k+1}, \theta_k, \dots, \theta_n); \end{aligned} \quad (2.11)$$

2) условие кроссинг-симметрии:

$$F_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = F_{a_2 \dots a_n a_1}^{\mathcal{O}}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 + 2\pi i); \quad (2.12)$$

3) условие для кинематического полюса:

$$\begin{aligned} -i \lim_{\theta' \rightarrow \theta} (\theta' - \theta) F_{aa_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta' + i\pi, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n) = \\ = \left(1 - \prod_{j=1}^n S_{aa_j}(\theta - \theta_j) \right) F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n); \end{aligned} \quad (2.13)$$

4) условие для полюса связанного состояния:

$$\begin{aligned} -i \lim_{\theta' \rightarrow \theta} (\theta' - \theta) F_{a_1 \dots bc \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta', +i\bar{u}_{bd}^c, \theta - i\bar{u}_{cd}^b, \dots, \theta_n) = \\ = \Gamma_{bc}^d F_{a_1 \dots d \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta, \dots, \theta_n), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\bar{u}_{ab}^c = \pi - u_{ab}^c$.

Эти аксиомы не устанавливают зависимость формфакторов от оператора $\mathcal{O}(x)$, и дальнейшие требования необходимы для выявления формфакторов некоторого оператора среди всех решений формфакторных аксиом. Это в общем случае является нетривиальной задачей. Однако существуют два полезных критерия. Первый, обсуждаемый в работе [33], ограничивает асимптотическое поведение формфакторов. Для скейлинг-оператора $\mathcal{O}(x)$ скейлинговой размерности $2\Delta_{\mathcal{O}}$ рост формфактора при больших значениях быстрот ограничен:

$$F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) \leq e^{\Delta_{\mathcal{O}} |\theta_i|} \quad \text{при} \quad |\theta_i| \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Второй критерий необходимым образом зависит от нормировки формфакторов. В дальнейшем мы будем использовать следующую нормировку:

$$F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \langle \mathcal{O} \rangle f_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_N), \quad (2.16)$$

где $\langle \mathcal{O} \rangle$ – вакуумное среднее локального оператора $\mathcal{O}$. Такой выбор нормировки согласуется со спектральным представлением двухточечной корреляционной функции:

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{a_n\}} \frac{1}{n!} \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi} |F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n)|^2 e^{-x \sum m_j \text{ch } \theta_j}. \quad (2.17)$$

В дальнейшем мы будем называть функцию $f_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_N)$, определенную выражением (2.16), ненормированным формфактором. В этих обозначениях второй критерий, предложенный в работе [34], может быть сформулирован следующим образом. Формфакторы бесспиновых экспоненциальных операторов обладают свойством факторизации, а именно

$$\begin{aligned} f_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + \Lambda, \dots, \theta_m + \Lambda, \theta_{m+1}, \dots, \theta_N) = \\ = f_{a_1 \dots a_m}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_m) f_{a_{m+1} \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_{m+1}, \dots, \theta_n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

при $\Lambda \rightarrow \infty$ для всех $m \in (0, \dots, n)$. Это свойство уже отмечалось для решений многих моделей и, как предполагается, является отличительным свойством экспоненциальных операторов.

Решение для системы уравнений (2.11)–(2.14) может быть представлено в удобном виде с использованием двухчастичных минимальных формфакторов. Двухчастичный минимальный формфактор, обозначаемый как $R_{ab}(\theta)$, является решением уравнений (2.11) и (2.12), ограниченного случаем $n = 2$:

$$R_{ab}(\theta) = S_{ab}(\theta) R_{ba}(-\theta), \quad R_{ab}(i\pi + \theta) = R_{ab}(i\pi - \theta). \quad (2.19)$$

Для того чтобы определить уникальное решение для этих уравнений, налагаются дополнительные ограничения: $R_{ab}(\theta)$ является аналитической функцией в “физической полосе” и не имеет в ней ни нулей, ни полюсов. С учетом этих обозначений n -частичное решение формфакторных аксиом может быть представлено в виде

$$f_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = J_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} R_{a_i a_j}(\theta_i - \theta_j). \quad (2.20)$$

Здесь функция $J_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n})$ – симметричная и $2\pi i$ -периодическая функция переменных θ_i , содержащая все ожидаемые кинематические полюсы и полюсы связных состояний. Эта функция представляет собой решение для второй пары формфакторных аксиом (2.13), (2.14). В дальнейшем мы будем называть эти уравнения бутстральными уравнениями. Полный набор формфакторов может быть однозначно определен формфакторами, которые содержат только “фундаментальные частицы”. Мы называем частицу A_1 фундаментальной, если все остальные частицы в модели A_a , $a = 1, \dots, n$, могут быть получены как “связные состояния” некоторого количества A_1 . Как только формфакторы “фундаментальных частиц” вычислены,

остальные формфакторы могут быть получены с использованием уравнения (2.14), поэтому мы ограничимся вычислением таких многочастичных формфакторов.

В дальнейшем мы рассматриваем только формфакторы экспоненциальных операторов. В этом случае в рамках свободнополюевого представления можно свести их вычисление к комбинаторной процедуре [21]. В следующем разделе мы кратко опишем свободнополюеое представление для формфакторов экспоненциальных операторов модели БД.

3. МОДЕЛЬ БД

В этом разделе мы кратко опишем теорию рассеяния модели БД [18]. Эта модель является двумерной интегрируемой квантовой теорией поля, определяемой евклидовым действием

$$S_{\text{BD}} = \int d^2x \left(\frac{1}{16\pi} (\partial_\nu \varphi)^2 + \mu (e^{\sqrt{2}b\varphi} + 2e^{-(b/\sqrt{2})\varphi}) \right), \quad (3.1)$$

где b – константа связи и μ – регуляризованный массовый параметр, который связан с массой m единственной бозонной частицы A в спектре модели следующим образом:

$$m = \mu^{1/(2Qb)} \frac{2\sqrt{3}\Gamma(1/3)}{\Gamma(1+b/(3Q))\Gamma(1/(3Qb))} \left(-\frac{\pi\Gamma(1+2b^2)}{\Gamma(-2b^2)} \right)^{1/(6Qb)} \times \\ \times \left(-\frac{2\pi\Gamma(1+b^2/2)}{\Gamma(-b^2/2)} \right)^{1/(3Qb)}. \quad (3.2)$$

Здесь введено удобное обозначение

$$Q = b^{-1} + b. \quad (3.3)$$

Модель БД обладает бесконечным количеством локальных сохраняющихся зарядов с нечетным спином s , исключая кратные трем:

$$s = 1, 5, 7, 11, 13, \dots \quad (3.4)$$

Интегрируемость модели подразумевает, что n -частичная S -матрица факторизуется в произведение $n(n-1)/2$ двухчастичных амплитуд рассеяния:

$$S(\theta) = \frac{\text{th}[(\theta + 2i\pi/3)/2] \text{th}[(\theta - 2i\pi/(3bQ))/2] \text{th}[(\theta - 2i\pi b/(3Q))/2]}{\text{th}[(\theta - 2i\pi/3)/2] \text{th}[(\theta + 2i\pi/(3Qb))/2] \text{th}[(\theta + 2i\pi b/(3Q))/2]}. \quad (3.5)$$

Для действительных значений констант связи b S -матрица имеет простые полюсы при $\theta = 2i\pi/3$, которые соответствуют связным полюсам, представленным самой частицей A в процессах рассеяния

$$A \times A \rightarrow A \rightarrow A \times A. \quad (3.6)$$

Пространство локальных операторов модели состоит из экспоненциальных операторов

$$V_a(x) = e^{a\varphi(x)} \quad (3.7)$$

и их потомков. Мы интересуемся только формфакторами экспоненциальных операторов. Обозначим их следующим образом:

$$F^a(\theta_1, \dots, \theta_N) = \langle \text{vac} | V_a(x) | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle. \quad (3.8)$$

Используя свободнополевое представление, можно получить набор функций, которые удовлетворяют формфакторным аксиомам вместе с условиями (2.15), (2.18). Следовательно, эти функции могут быть отождествлены с формфакторами экспоненциальных операторов. Опишем кратко свободнополевое представление для модели БД [28]. Мы не нуждаемся в детальном описании в терминах вспомогательных свободных полей, поэтому только сформулируем результаты.

Рассмотрим пару операторов $\Lambda(\theta)$ и $\Lambda^{-1}(\theta)$ и определим скобки $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Lambda(\theta) \rangle\rangle &= 1, \\ \langle\langle \Lambda^{\sigma'}(\theta') \Lambda^{\sigma}(\theta) \rangle\rangle &= [R(\theta - \theta')]^{\sigma'\sigma}, \quad \sigma', \sigma = \pm 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $R(\theta)$ – двухточечный минимальный формфактор модели БД [19], [20]. Удобно использовать для этой функции параметризацию

$$R(\theta) = \mathcal{N}(b) \frac{g_0(\theta) g_{2/3}(\theta)}{g_{2b/(3Q)}(\theta) g_{2/(3Qb)}(\theta)}. \quad (3.10)$$

Здесь мы ввели функции $g_\alpha(\theta)$, определенные следующим образом:

$$g_\alpha(\theta) = \exp \left(2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\text{ch}[(2\alpha - 1)t/2]}{\text{ch}(t/2) \text{sh } t} \sin^2 \frac{(i\pi - \theta)t}{2\pi} \right). \quad (3.11)$$

Нормировочная константа $\mathcal{N}(b)$ выбрана такой, что $R(\theta) \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow \infty$, а именно

$$\mathcal{N}(b) = \exp \left(-4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\text{ch}(t/6) \text{sh}(tb/(3Q)) \text{sh}(t/(3Qb))}{\text{sh } t \text{ch}(t/2)} \right). \quad (3.12)$$

По построению скобки $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ с произвольным числом операторов $\Lambda(\theta)$ и $\Lambda^{-1}(\theta)$ факторизуются в произведение парных скобок (3.9):

$$\langle\langle \Lambda^{\sigma_N}(\theta_N) \dots \Lambda^{\sigma_1}(\theta_1) \rangle\rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \langle\langle \Lambda^{\sigma_i}(\theta_i) \Lambda^{\sigma_j}(\theta_j) \rangle\rangle. \quad (3.13)$$

В этих обозначениях операторы Лукьянова имеют вид

$$T(\theta) = \rho \left(\gamma \Lambda \left(\theta + \frac{i\pi}{2} \right) + \gamma^{-1} \Lambda^{-1} \left(\theta - \frac{i\pi}{2} \right) + h : \Lambda \left(\theta + \frac{i\pi}{6} \right) \Lambda \left(\theta - \frac{i\pi}{6} \right) : \right), \quad (3.14)$$

где θ -независимые константы γ , h , ρ следующие:

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \exp \left(\frac{i\pi}{6Q} (4\sqrt{2}a - b + b^{-1}) \right), \\ h &= 2 \sin \frac{\pi(b - b^{-1})}{6Q}, \\ \rho &= \sqrt{\frac{\sin(\pi/3)}{\sin(2\pi b/3Q) \sin(2\pi/3Qb)}} \exp \left(2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\text{ch}(t/6) \text{sh}(tb/3Q) \text{sh}(t/3Qb)}{\text{sh } t \text{ch}(t/2)} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что эти обозначения отличаются от обозначений работы [28] заменой $b \rightarrow b^{-1}$. Предложенная свободнополевая конструкция допускает преобразование дуальности $b \leftrightarrow b^{-1}$, которое также является симметрией S -матрицы. Однако данная замена используется нами для адаптации общепринятых обозначений, используемых в конформной теории поля. В результате формфакторы экспоненциальных операторов могут быть представлены следующим образом:

$$F^a(\theta_1, \dots, \theta_N) \equiv \langle e^{a\varphi} \rangle f^a(\theta_1, \dots, \theta_N) = \langle e^{a\varphi} \rangle \langle T(\theta_N) \dots T(\theta_1) \rangle, \quad (3.16)$$

где θ -независимый множитель $\langle e^{a\varphi} \rangle$ – вакуумное среднее экспоненциального оператора модели БД [31]. Используя формулы (3.9), можно показать, что ненормированные формфакторы $f^a(\theta_1, \dots, \theta_N)$ в выражении (3.16) допускают параметризацию

$$f^a(\theta_1, \dots, \theta_n) = \rho^N J_{N,a}(x_1, \dots, x_N) \prod_{1 \leq i < j \leq N} R(\theta_i - \theta_j). \quad (3.17)$$

Здесь $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ – симметричная рациональная функция переменных $x_i = e^{\theta_i}$ с подходящими кинематическими и динамическими полюсами. Отметим, что в предложенном свободнополевым представлении вычисление формфакторов сводится к комбинаторной процедуре. В п. 3.1 мы получим свободнополевое представление для функций $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ и, как следствие, предложим некоторые рекурсивные соотношения между ними.

3.1. Свободнополевое представление для функций $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$. Мы следуем общей линии конструкции Лукьянова свободнополевого представления [28]. Уточним различия. Мы рассматриваем алгебру Гейзенберга, генерируемую набором элементов a_n^s , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ и $s = \pm, 0$, с коммутационными соотношениями

$$[a_n^s, a_m^{s'}] = -4n \sin\left(\frac{(n-1)\pi b}{3Q} + \frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{(n-1)\pi b}{3Q} + \frac{\pi}{6}\right) A_n^{s,s'} \delta_{n,-m}, \quad (3.18)$$

и матрица $A^{\sigma,\sigma'}$ имеет вид

$$A_n^{s,s'} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^n(1 + \omega^n) & \omega^n \\ \omega^{-n}(1 + \omega^{-n}) & 0 & \omega^{-n} \\ \omega^{-n} & \omega^n & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{i\pi/3}, \quad (3.19)$$

где строка $s = +, -, 0$ и столбец $s' = +, -, 0$. Определим экспоненциальные операторы

$$\lambda^s(z) = : \exp \sum_{i \neq 0} \frac{a_n^s}{n} z^n : , \quad s = \pm, 0. \quad (3.20)$$

Здесь для операторов $\lambda^\pm(z)$ нормальное упорядочивание не требуется, так как соответствующие генераторы коммутируют. Следуя работе [28], мы можем определить подходящие генераторы Лукьянова, используя операторы (3.20) и отождествив экспоненциальные поля с проекторами на соответствующие фоковские модули. Удобно сформулировать результаты как следующее предписание. Функция $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ может быть представлена как матричный элемент:

$$J_{N,a}(x_1, \dots, x_N) = \langle t(x_1) \dots t(x_N) \rangle, \quad (3.21)$$

где

$$t(z) = \gamma \lambda^+(z) + \gamma^{-1} \lambda^-(z) + h \lambda^0(z). \quad (3.22)$$

Здесь γ и h определены формулой (3.15). В представлении (3.21) мы используем обозначения

$$\langle \dots \rangle = \langle 0 | \dots | 0 \rangle \quad (3.23)$$

для соответствующих матричных элементов, и вакуумы определены соотношениями

$$a_n^s |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_{-n}^s = 0, \quad s = +, -, 0, \quad n > 0. \quad (3.24)$$

Вычисление многочастичных матричных элементов выполняется с использованием процедуры виковского усреднения со следующими правилами:

$$\begin{aligned} \lambda^\pm(x) \lambda^\pm(x') &= : \lambda^\pm(x) \lambda^\pm(x') :, \\ \lambda^0(x) \lambda^0(x') &= f\left(\frac{x}{x'}\right) : \lambda^0(x) \lambda^0(x') :, \\ \lambda^0(x') \lambda^\pm(x) &= \lambda^\pm(x) \lambda^0(x') = f\left(\frac{x}{x'} \omega^{\pm 1}\right) : \lambda^\pm(x) \lambda^0(x') :, \\ \lambda^-(x') \lambda^+(x) &= \lambda^+(x) \lambda^-(x') = f\left(\frac{x}{x'} \omega\right) f\left(\frac{x}{x'} \omega^2\right) : \lambda^+(x) \lambda^-(x') :, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где функции $f(x)$ заданы как

$$f(x) = \frac{x + x^{-1} + h^2 - 2}{x + x^{-1} - 1}. \quad (3.26)$$

Свободнополевое представление (3.21) очень похоже на представление Лукьянова (3.16). Его основное преимущество заключается в том, что лишние множители двухчастичных минимальных формфакторов исключены из конструкции. Поэтому вычисление матричных элементов, включающее виковское усреднение, представлено рациональными функциями переменных x_i . Заметим, что процедура усреднения (3.25) N -частичных матричных элементов генерирует 3^N членов. Некоторые члены могут обладать полюсами в точках $x_i = x_j \omega^{\pm 2}$, которые соответствуют связным состояниям, в $x_i = -x_j$, соответствующих кинематическим полюсам, и лишние полюсы в $x_i = x_j \omega^{\pm 1}$. Наличие лишних полюсов усложняет вычисление формфакторов. Однако в приложении А мы доказываем, что их вклад в целое выражение для матричных элементов сокращается.

Простая аналитическая структура матричных элементов позволяет получить рекурсивные соотношения между ними. Рассмотрим функцию $J_{N+1,a}(z, x_1, \dots, x_N)$ как аналитическую функцию переменной z , зависящую от параметров $x_1, \dots, x_N$. Можно выделить вклад полюсов от регулярной части. Так как вычеты этой функции могут быть найдены явно (см. приложение А), единственной неизвестной является регулярная часть. Однако для экспоненциальных операторов регулярную часть этой функции можно определить, используя свойство факторизации (2.18). Мы приводим подробности конструкции в приложении Б. В результате можно сформулировать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рекурсивные соотношения*

$$\begin{aligned}
 J_{N+1,a}(z, x_1, \dots, x_N) &= J_{1,a} J_{N,a}(x_1, \dots, x_N) + \\
 &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{z + x_n} K_n(x_1, \dots, x_N) J_{N-1,a}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) + \\
 &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{z - x_n \omega^2} B_n^+(x_1, \dots, x_N) J_{N,a}(x_1, \dots, x_n \omega, \dots, x_N) - \\
 &- \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{z - x_n \omega^{-2}} B_n^-(x_1, \dots, x_N) J_{N,a}(x_1, \dots, x_n \omega^{-1}, \dots, x_N)
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

вместе с начальными условиями

$$J_{1,a} \equiv J = 4 \sin \left(\frac{\pi \sqrt{2} a}{3Q} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6Q} (2\sqrt{2} a - b + b^{-1}) \right) \quad (3.28)$$

однозначно определяют набор функций $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ экспоненциальных операторов. Функции $K_n(x_1, \dots, x_N)$ и $B_n^\pm(x_1, \dots, x_N)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_n(x_1, \dots, x_N) &= \frac{(h^2 - 3)(h^2 - 1)}{2(\omega - \omega^{-1})} \left(\prod_{i \neq n} f \left(\frac{x_n}{x_i} \omega^2 \right) f \left(\frac{x_n}{x_i} \omega \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \prod_{i \neq n} f \left(\frac{x_n}{x_i} \omega^{-2} \right) f \left(\frac{x_n}{x_i} \omega^{-1} \right) \right), \\
 B_n^\pm(x_1, \dots, x_N) &= \frac{h(h^2 - 1)}{\omega - \omega^{-1}} \prod_{i \neq n} f \left(\frac{x_n}{x_i} \omega^{\pm 1} \right).
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Как пример возможного применения рекурсивных соотношений (3.27) в приложении В мы доказываем, что формфакторы экспоненциальных операторов удовлетворяют квантовым уравнениям движения. Другой пример представляется так называемыми отражательными соотношениями [31].

3.2. Отражательные соотношения для экспоненциальных операторов.

Модель БД может рассматриваться как возмущение теории Лиувилля двумя различными способами, где либо первая, либо вторая экспонента в (3.1) взята в качестве возмущающего оператора. Введем обозначения

$$Q_L = \frac{1}{\sqrt{2}b} + \sqrt{2}b, \quad Q'_L = \frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{b}{\sqrt{2}}. \quad (3.30)$$

Существует предположение, основанное на особенностях теории Лиувилля, что формфакторы экспоненциальных операторов удовлетворяют соотношениям [31]:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{vac} | e^{a\varphi} | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle &= R(a) \langle \text{vac} | e^{(Q_L - a)\varphi} | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle, \\
 \langle \text{vac} | e^{-a\varphi} | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle &= R'(a) \langle \text{vac} | e^{(-Q'_L + a)\varphi} | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle,
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

где явное выражение для отражательной амплитуды $R(a)$ представлено в работе [31] и $R'(a)$ получается с помощью подстановки $\mu \rightarrow 2\mu$, $b \rightarrow b/2$. Вакуумные средние обладают такими же свойствами. Следовательно, для ненормированных формфакторов, определенных формулой (2.16), отражательные соотношения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} f^a(\theta_1, \dots, \theta_N) &= f^{Q_L - a}(\theta_1, \dots, \theta_N), \\ f^{-a}(\theta_1, \dots, \theta_N) &= f^{-Q'_L + a}(\theta_1, \dots, \theta_N). \end{aligned} \quad (3.32)$$

По построению (3.17) ненормированные формфакторы зависят от параметра a только посредством функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$, и эта зависимость полностью определяется начальными условиями рекурсивных уравнений (3.28). Можно проверить, что функции $J_{1,a}$ действительно удовлетворяют отражательным соотношениям. Это доказывает соотношения (3.32).

3.3. Явное вычисление формфакторов. Из представления (3.21) следует, что функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ являются симметричными $2\pi i$ -периодическими функциями переменных $x_i = e^{\theta_i}$. Следовательно, эти функции могут быть выражены в удобном виде посредством симметрических функций. Базис в пространстве симметрических функций N переменных дается элементарными симметрическими полиномами $\sigma_N(x_1, \dots, x_N)$, определяемыми с помощью производящей функции

$$\prod_{i=1}^N (x + x_i) = \sum_{i=0}^N x^{N-i} \sigma_i(x_1, \dots, x_N). \quad (3.33)$$

Удобно выделить вклад полюсов, предписанный рекурсивными соотношениями (3.27), в общий множитель. Тогда функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ могут быть параметризованы как

$$J_{N,a}(x_1, \dots, x_N) = \Lambda_N(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{(x_i + x_j)(x_i^2 + x_i x_j + x_j^2)}, \quad (3.34)$$

где $\Lambda_N(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ – симметричные полиномы переменных $\sigma_i(x_1, \dots, x_N)$. Принимая во внимание условие (2.10), можно показать, что для бесспиновых операторов полная степень полинома равна $3N(N-1)/2$, в то время как частичная степень по каждой переменной σ_i ограничена условием (2.15) и не может превышать $3(N-1)$. В рамках подхода свободнополюсового представления (3.21) мы вычисляем полиномы $\Lambda_N(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ до $N = 4$ включительно:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= J, \\ \Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2) &= J^2 \sigma_1^2 - J(J + h - h^3) \sigma_2, \\ \Lambda_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= J(J^2 + (-3 + h^2)(-1 + h^2)^2 + J(h - h^3)) \sigma_2^3 \sigma_3 + \\ &\quad + J(J^2 + (-3 + h^2)(-1 + h^2)^2 + J(h - h^3)) \sigma_1 \sigma_3^2 - \\ &\quad - Jh(J + h - h^3)(4 - 5h^2 + h^4) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 - \\ &\quad - J^2(J + h - h^3) \sigma_1 \sigma_2 - J^2(J + h - h^3) \sigma_1^4 \sigma_2 \sigma_3 + \\ &\quad + J(-J^2 + 3(-1 + h^2)^2 + Jh(4 - 5h^2 + h^4)) \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3 + J^3 \sigma_1^3 \sigma_2^3, \end{aligned} \quad (3.35)$$

и явное выражение для четырехточечного симметричного полинома $\Lambda_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ представлено в приложении Г.

Для простой проверки предложенных выражений рассмотрим формфакторы экспоненциальных операторов, которые возникают в действии (3.1). Общее выражение для следа тензора энергии-импульса $\Theta(x)$, которое совместимо с квантовым уравнением движения, дается линейной комбинацией этих операторов [35]. Принимая во внимание закон сохранения тензора энергии-импульса, можно показать, что N -частичные формфакторы $\Theta(x)$ должны быть пропорциональны комбинации симметричных полиномов $\sigma_1 \sigma_{N-1}$ для $N > 2$. Используя явные выражения для трех- и четырехточечных формфакторов, мы проверили, что формфакторы соответствующих экспоненциальных операторов действительно обладают этим свойством.

4. $\Phi_{1,2}$ -ВОЗМУЩЕННЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим мнимосвязанную аффинную модель Тоды, основанную на твистованной аффинной алгебре Каца–Мули $A_2^{(2)}$, которая получается из действия (3.1) подстановкой $b \rightarrow i\beta$:

$$S_{\text{свд}} = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\partial\varphi)^2 - \mu (e^{i\sqrt{2}\beta\varphi} - 2e^{-i\beta\varphi/\sqrt{2}}) \right). \quad (4.1)$$

Эта модель называется моделью ЖМШ, или мнимосвязанной моделью БД. Она не унитарна, так как ее гамильтониан не эрмитов, однако в работе [7] было показано, что эта модель редуцируема при некоторых значениях константы связи.

Опишем кратко рестрикцию комплексной модели БД. Используя действие (4.1), можно определить нелокальные сохраняющиеся заряды, которые коммутируют с гамильтонианом. Эти заряды генерируют квантовую аффинную алгебру (4.1) $U_q(A_2^{(2)})$ с

$$q = e^{i\pi/(2\beta^2)} \quad (4.2)$$

и фиксируют S -матрицу модели с точностью до скалярного множителя [6]–[8]. Рестрикция происходит следующим образом. Квантовая алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ содержит две подалгебры $U_q(sl_2)$ и $U_{q^4}(sl_2)$, и обе они могут быть использованы для квантово-групповой рестрикции (4.1). Рассмотрим первую возможность. Пусть параметр $2\beta^2$ принимает рациональные значения

$$2\beta^2 = \frac{p}{p'}, \quad (4.3)$$

где p и p' – взаимно простые целые числа такие, что $p' > p > 1$. В этом случае гильбертово пространство мнимосвязанной модели БД может быть последовательно сведено к представлениям $U_q(sl_2)$. Подробности конструкции можно найти в работах [7], [8]. Рестригированная теория, как известно, совпадает с $\Phi_{1,2}$ -возмущениями минимальных моделей $\mathcal{M}_{p,p'}$ [7], действие которых формально может быть представлено в виде

$$S_{\mathcal{M}_{p,p'}} + \lambda \int d^2x \Phi_{1,2}(x). \quad (4.4)$$

Соотношение между соответствующими константами связи μ и λ можно установить, используя результаты работы [36]:

$$\lambda^2 = -\frac{4\pi\mu^3}{(4\beta^2 - 1)^2} \frac{\Gamma^2(1 - 2\beta^2)\Gamma(4\beta^2)}{\Gamma^2(2\beta^2)\Gamma(1 - 4\beta^2)}. \quad (4.5)$$

Кратко введем общепринятые обозначения, используемые в КТП. Центральный заряд минимальной модели $\mathcal{M}_{p,p'}$ дается выражением

$$c = 1 + 6Q_L^2, \quad (4.6)$$

где Q_L был введен формулой (3.30) и предполагается подстановка $b = i\beta$. Набор примарных полей минимальной модели $\mathcal{M}_{p,p'}$ дается набором вырожденных полей $\Phi_{m,n}$ с $m = 1, \dots, p - 1$ и $n = 1, \dots, p' - 1$, конформные размерности которых могут быть параметризованы следующим образом:

$$\Delta_{m,n} = a_{m,n}(Q_L - a_{m,n}), \quad (4.7)$$

где

$$a_{m,n} = -\frac{(n-1)}{2}\sqrt{2}i\beta - \frac{(m-1)}{2}\frac{1}{\sqrt{2}i\beta}. \quad (4.8)$$

Нормировка примарных операторов фиксируется двухточечной функцией

$$\langle \Phi_{m,n}(x)\Phi_{m,n}(0) \rangle = |x|^{-4\Delta_{m,n}}. \quad (4.9)$$

Примарные операторы возмущенных минимальных моделей связаны с некоторыми экспоненциальными полями мнимосвязанной модели БД [5], [6], а именно экспоненциальные операторы

$$V_{a_{1,n}}(x) = e^{a_{1,n}\varphi(x)} \quad (4.10)$$

коммутируют с некоторыми генераторами $U_q(sl_2)$ и могут быть отождествлены с примарными операторами $\Phi_{1,n}$ -возмущенных минимальных моделей.

Фундаментальная частица комплексной модели БД – кинковый триплет. Соотношение между массами легчайших кинков и константой связи λ установлено в работе [36]. Под действием $U_q(sl_2)$ фундаментальные кинки образуют либо синглетные связные состояния, которые генерируют серию бризеров, либо триплетные состояния, соответствующие высшим кинкам. После аналитического продолжения на мнимые значения константы связи и квантово-групповой рестрикции S -матрица модели БД может трактоваться как S -матрица легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях [32]. Она обладает двумя дополнительными полюсами в “физической полосе”, которые соответствуют более тяжелым частицам. Мы предлагаем отождествление между формфакторами модели БД и формфакторами легчайших частиц в соответствующих минимальных моделях. Можно проверить, что после аналитического продолжения на мнимые значения константы связи формфакторы (3.17) удовлетворяют формфакторным аксиомам. В частности, двухчастичный минимальный формфактор приобретает два дополнительных полюса в “физической полосе”, положения которых соответствуют полюсам S -матрицы легчайших частиц

и могут быть явно определены с использованием следующих функциональных соотношений:

$$\begin{aligned} g_{1+\alpha}(\theta) &= g_{-\alpha}(\theta), \\ g_{\alpha}(\theta)g_{-\alpha}(\theta) &= \mathcal{P}_{\alpha}(\theta) \equiv \frac{\cos \pi\alpha - \operatorname{ch} \theta}{2 \cos^2(\pi\alpha/2)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В дальнейшем мы ограничим наше внимание только ненормированными формфакторами. В свободнополевом представлении правильная нормализация фиксируется вакуумным средним соответствующего оператора. Однако возмущенные минимальные модели обладают несколькими вакуумами, и вычисление их вклада в вакуумные средние является открытой задачей. В результате мы предлагаем следующее представление для формфакторов легчайших частиц $\Phi_{1,n}$ -примарных операторов в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях $\mathcal{M}_{p,p'}$:

$$f_{1\dots 1}^{a_{1,n}}(\theta_1, \dots, \theta_N) = f^{a_{1,n}}(\theta_1, \dots, \theta_N) \Big|_{2b^2 = -p/p'}. \quad (4.12)$$

Отметим, что формфакторы в правой части этих соотношений допускают свободнополевое представление (3.21).

При аналитическом продолжении на мнимые значения константы связи двухточечные минимальные формфакторы приобретают дополнительные полюсы. Поэтому полюсы возникают в представлении Лукьянова (3.16) благодаря процедуре виковского усреднения (3.9). Однако в предложенном свободнополевом представлении (3.21) эти лишние множители исключены из конструкции. Процедура усреднения генерирует функции с теми же аналитическими свойствами, что и в модели БД. В п. 4.1 мы рассмотрим МИМП как важный пример предложенного свободнополевого представления.

4.1. МИМП. Модель (4.4) с $(p, p') = (3, 4)$ описывает модель Изинга при критической температуре в ненулевом магнитном поле. Минимальная модель $\mathcal{M}_{3,4}$ описывается своим центральным зарядом $c = 1/2$ и содержит два нетривиальных примарных оператора $\Phi_{1,2}$ и $\Phi_{1,3}$. Их конформные размерности даются выражением (4.9), а именно $\Delta_{1,2} = 1/16$ и $\Delta_{1,3} = 1/2$. Модель Изинга может быть определена и другим образом, а именно как скейлинговый предел модели Изинга на решетке в критической точке. Поэтому можно определить оператор плотности спина $\sigma(x)$ и оператор плотности энергии $\epsilon(x)$ как скейлинговый предел соответствующих решеточных операторов. Предполагая нормировку (4.9) для этих операторов, можно отождествить их с примарными операторами минимальной модели, а именно $\sigma(x) = \Phi_{1,2}(x)$ и $\epsilon(x) = \Phi_{1,3}(x)$. Константа связи λ , введенная соотношением (4.5), может быть названа внешним магнитным полем или, более точно, его скейлинговым пределом.

Спектр модели состоит из восьми различных самосопряженных частиц A_i , $i = 1, \dots, 8$. При аналитическом продолжении на мнимые значения константы связи, $2b^2 = -3/4$, S -матрица модели БД принимает вид S -матрицы легчайших частиц в МИМП:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}[(\theta + 2i\pi/3)/2] \operatorname{th}[(\theta + 2i\pi/5)/2] \operatorname{th}[(\theta + i\pi/15)/2]}{\operatorname{th}[(\theta - 2i\pi/3)/2] \operatorname{th}[(\theta - 2i\pi/5)/2] \operatorname{th}[(\theta - i\pi/15)/2]}. \quad (4.13)$$

Дополнительные полюсы, которые возникают в “физической полосе” после аналитического продолжения S -матрицы, соответствуют более тяжелым частицам. Мы

обозначим частицу, соответствующую полюсу при $\theta = 2\pi i/3$, как A_2 , а частицу, соответствующую полюсу при $\theta = i\pi/15$, как A_3 . Как показано в работе [3], полный набор двухчастичных амплитуд $S_{ab}(\theta)$, где $a, b = 1, \dots, 8$, можно найти, используя двухчастичные амплитуды (4.13). Кроме того, бутстрапная структура модели фиксирует массы всех частиц:

$$\begin{aligned} m_1 &= m, & m_2 &= 2m \cos \frac{\pi}{5}, & m_3 &= 2m \cos \frac{\pi}{30}, \\ m_4 &= 2m_2 \cos \frac{7\pi}{30}, & m_5 &= 2m_2 \cos \frac{2\pi}{15}, & m_6 &= 2m_2 \cos \frac{\pi}{30}, \\ m_7 &= 4m_2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30}, & m_8 &= 4m_2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отметим, что после аналитического продолжения модели БД и квантово-групповой рестрикции не все интегралы движения сохраняются. МИМП обладает интегралами движения со спинами (ср. с (3.4))

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \pmod{30}. \quad (4.15)$$

Целые числа (4.15) в точности являются экспонентами алгебры Ли E_8 , повторенными по модулю 30. Кроме того, число частиц в точности соответствует рангу E_8 .

4.2. Формфакторы в модели МИМП. Формфакторы в МИМП могут быть вычислены в рамках предложенного свободнополюсового представления. Полезно рассмотреть аналитическое продолжение формфакторов (3.17) подробно. Аналитическое продолжение двухточечных минимальных формфакторов может быть выполнено с использованием соотношений (4.11):

$$R(\theta)|_{2b^2=-3/4} = \frac{R_{11}(\theta)}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta)\mathcal{P}_{1/15}(\theta)}, \quad (4.16)$$

где мы ввели обозначение

$$R_{11}(\theta) = \mathcal{N} \left(i\sqrt{\frac{3}{8}} \right) g_0(\theta) g_{2/3}(\theta) g_{2/5}(\theta) g_{1/15}(\theta). \quad (4.17)$$

Можно показать, что эти функции удовлетворяют формфакторным аксиомам (2.11), (2.12) и не имеют ни нулей, ни полюсов в “физической полосе”. Поэтому мы назовем эти функции двухточечными минимальными формфакторами легчайших частиц A_1 в МИМП. Полюсы, представленные функциями $\mathcal{P}_\alpha(\theta)$ в формуле (4.16), соответствующие полюсам A_2 и A_3 связанных состояний двухчастичной амплитуды (4.13).

Аналитическое продолжение функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ довольно просто. По построению эти функции удовлетворяют формфакторным аксиомам (2.14) и (2.13) в динамических полюсах, $\theta = 2\pi i/3$, и кинематических соответственно, имеют правильное поведение при больших быструхтах (2.15) и обладают свойством факторизации (2.18). В обозначениях (3.17) формфакторы легчайших частиц в МИМП могут быть представлены в следующем виде:

$$f_{1\dots 1}^{a_{1,n}}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \rho^N J_{N,a_{1,n}}(x_1, \dots, x_N) \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{R_{11}(\theta_{ij})}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta_{ij})\mathcal{P}_{1/15}(\theta_{ij})}, \quad (4.18)$$

где предполагается подстановка $2b^2 = -3/4$.

Отметим, что функции $J_{N,a_{1,n}}(x_1, \dots, x_N)$ в формуле (4.18) даются соответствующими матричными элементами (3.21). Поэтому можно получить многочастичные формфакторы легчайших частиц, либо используя процедуру виковского усреднения, либо с помощью предложенных рекурсивных соотношений. Мы проверили, что оба эти метода до $N = 4$ включительно воспроизводят результаты работы [13], где формфакторы были получены решением уравнений бутстрапа. В силу бутстрапной структуры модели формфакторы других сортов частиц могут быть получены из формулы (4.18) при помощи уравнения (2.14). Например, в предложенном представлении вычисление четырехточечного формфактора $f_{1,1,1,2}^{a_{1,n}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ сводится к процедуре усреднения соответствующего матричного элемента $J_{5,a_{1,n}}(x_1, x_2, x_4, x_5\omega^{3/5}, x_5\omega^{-3/5})$. Отметим, что в рассматриваемой модели правильную нормировку формфакторов примарных операторов можно получить, используя вакуумные средние соответствующих экспоненциальных операторов модели БД [31]:

$$\langle \Phi_{1,2} \rangle = -1.27758 \dots \lambda^{1/15}, \quad \langle \Phi_{1,3} \rangle = 2.00314 \dots \lambda^{8/15}. \quad (4.19)$$

Эти значения находятся в согласии с вычислениями, проверенными в работе [37], и были проверены с большой точностью в работе [14] для оператора $\Phi_{1,3}$. В результате мы показали, что предложенная конструкция свободнополевого представления может использоваться для вычисления многочастичных формфакторов в МИМП.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. В рамках свободнополевого представления мы построили пространство решений формфакторных аксиом в модели БД. Предложенное свободно-поленое представление отличается от общепринятого исключением двухточечных минимальных формфакторов из рассмотрения. В результате вычисление многоточечных формфакторов сводится к вычислению некоторых матричных элементов. N -частичный матричный элемент дается суммой 3^N членов, вычисление которой выполняется с использованием процедуры виковского усреднения, генерирующей рациональность функций переменных $x_i = e^{\theta_i}$. Некоторые члены в этой сумме могут иметь нефизические полюсы. Однако мы подробно изучили операторную алгебру и доказали, что их вклад в полную сумму сокращается.

Простая аналитическая структура предложенных матричных элементов позволяет получить явные рекурсивные соотношения между ними. Используя эти соотношения, мы доказали, что формфакторы операторов удовлетворяют квантовым уравнениям движения и отражательным соотношениям. Кроме того, в рамках предложенного свободнополевого представления мы вычислили формфакторы экспоненциальных операторов до четырехточечных формфакторов включительно.

Мы рассмотрели квантово-групповую рестрикцию мнимосвязанной модели БД. В отличие от конструкции Лукьянова свободнополевого представления, где дополнительные полюсы необходимо возникали из двухточечных минимальных формфакторов, предложенная нами конструкция легко может использоваться для получения свободнополевого представления формфакторов легчайших частиц в $\Phi_{1,2}$ -возмущенных минимальных моделях. Так как мы исключаем минимальные формфакторы из рассмотрения, вычисления матричных элементов выполняются с помощью процедуры виковского усреднения, генерирующей рациональные функции с тем же самым набором полюсов, что и в модели БД.

Исключительный пример представляет МИМП. Получение свободнополевого представления, связанного с алгеброй E_8 , напрямую представляется сложной задачей. Связь между данной моделью и моделью БД была установлена в работах [27], [28]. В настоящей работе мы предложили свободнополевое представление для формфакторов легчайших частиц в МИМП в удобном виде. Для проверки на самосогласованность мы установили, что результаты, полученные в рамках свободнополевого представления, находятся в полном соответствии с результатами, полученными путем решения уравнений бутстрапа.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Аналитические свойства функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$

Рассмотрим функцию $J_{N+1,a}(z, x_1, \dots, x_N)$, которая является симметричной функцией переменных $z, x_1, \dots, x_N$. Поэтому достаточно определить ее аналитические свойства по отношению к переменной z , рассматривая остальные переменные как параметры. В силу формфакторных аксиом (2.13), (2.14) можно ожидать, что полюсы функции $J_{N+1,a}(z, x_1, \dots, x_N)$ находятся в точках

$$z = x_i \omega^{\pm 2}, \quad z = -x_i, \quad (\text{A.1})$$

где первые полюсы соответствуют разности частот $\theta = 2\pi i/3$ и, следовательно, полюсам связанных состояний, а последние при $\theta = i\pi$ – кинематическим полюсам. Докажем, что матричный элемент

$$\langle t(z)t(x_1) \dots t(x_N) \rangle, \quad (\text{A.2})$$

рассматриваемый как функция переменной z , имеет простые полюсы при (A.1). Кроме того, определим соответствующие вычеты в явном виде. Мы рассмотрим операторное разложение

$$t(z)t(x). \quad (\text{A.3})$$

Используя формулу (3.25), можно показать, что простые полюсы этого операторного разложения находятся в точках

$$z = x\omega^{\pm 1}, \quad z = x\omega^{\pm 2}, \quad z = -x. \quad (\text{A.4})$$

Рассмотрим их последовательно.

1. Полюсы при $z = x\omega^{\pm 1}$. Как следует из (A.1), они не соответствуют ни динамическим, ни кинематическим полюсам. Докажем, что соответствующие вычеты матричного элемента (A.2) сокращаются. Сингулярная часть операторного разложения (A.3) дается выражением

$$(z - x\omega^{\pm 1})t(z)t(x)|_{z=x\omega^{\pm 1}} = \pm x\omega^{\pm 1} r h^2 (\lambda^0(x\omega^{\pm 1})\lambda^0(x) : - : \lambda^\mp(x\omega^{\pm 1})\lambda^\pm(x) :), \quad (\text{A.5})$$

где мы ввели обозначения

$$\text{Res}_{z=x\omega^{\pm 1}} f\left(\frac{z}{x}\right) = \pm x\omega^{\pm 1} r, \quad r = \frac{h^2 - 1}{\omega - \omega^{-1}}. \quad (\text{A.6})$$

Операторы, которые возникают в правой части (A.5), удовлетворяют соотношениям

$$\langle : \lambda^0(x\omega^{\pm 1}) \lambda^0(x) : \lambda^\sigma(x') \rangle = \langle : \lambda^\mp(x\omega^{\pm 1}) \lambda^\pm(x) : \lambda^\sigma(x') \rangle, \quad \sigma = \pm, 0. \quad (\text{A.7})$$

Из (A.5) совместно с (A.7) мы получаем

$$(z - x_n \omega^{\pm 1}) \langle t(z) t(x_1) \dots t(x_n) \dots t(x_N) \rangle \Big|_{z=x_n \omega^{\pm 1}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

2. Динамические полюсы при $z = x\omega^{\pm 2}$. В этих полюсах сингулярная часть операторного разложения дается выражением

$$(z - x\omega^{\pm 2}) t(z) t(x) \Big|_{z=x\omega^{\pm 2}} = \pm x\omega^{\pm 2} h r \tilde{t}(x\omega^{\pm 1}), \quad (\text{A.9})$$

где мы ввели оператор

$$\tilde{t}(x) = \gamma : \lambda^0(x\omega^{+1}) \lambda^+(x\omega^{-1}) : + \gamma^{-1} : \lambda^-(x\omega^{+1}) \lambda^0(x\omega^{-1}) : + h : \lambda^-(x\omega^{+1}) \lambda^+(x\omega^{-1}) :. \quad (\text{A.10})$$

Отметим его сходство с оператором, определенным формулой (3.22). В каждом матричном элементе, содержащем оператор $\tilde{t}(z)$, можно заменить его на $t(z)$, принимая во внимание, что

$$\langle \tilde{t}(z) t(x_1) \dots t(x_N) \rangle = \prod_{n=1}^N f\left(\frac{z}{x_n}\right) \langle t(z) t(x_1) \dots t(x_N) \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Поэтому из (A.9) и (A.11) мы получаем

$$\begin{aligned} (z - x_n \omega^{\pm 2}) \langle t(z) t(x_1) \dots t(x_n) \dots t(x_N) \rangle \Big|_{z=x_n \omega^{\pm 2}} &= \\ &= x_n \omega^{\pm 2} B_n^{\pm}(x_1, \dots, x_N) \langle t(x_n \omega^{\pm 1}) t(x_1) \dots \cancel{t(x_n)} \dots t(x_N) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где

$$B_n^{\pm}(x_1, \dots, x_N) = h r \prod_{i \neq n} f\left(\frac{x_n}{x_i} \omega^{\pm 1}\right). \quad (\text{A.13})$$

3. Кинематические полюсы при $z = -x$. Сингулярная часть операторного разложения в этом полюсе следующая:

$$(z + x) t(z) t(x) \Big|_{z=-x} = x f(\omega^2) r (s(x\omega^{-3/2}) - s(x\omega^{3/2})), \quad (\text{A.14})$$

где оператор $s(x)$ дается выражением

$$s(x) = : \lambda^+(x\omega^{-3/2}) \lambda^-(x\omega^{3/2}) :. \quad (\text{A.15})$$

Будучи вставленным в матричный элемент, этот оператор производит общий множитель:

$$\langle s(z) t(x_1) \dots t(x_N) \rangle = \prod_{n=1}^N f\left(\frac{z}{x} \omega^{1/2}\right) f\left(\frac{z}{x} \omega^{-1/2}\right) \langle t_1(x_1) \dots t(x_N) \rangle, \quad (\text{A.16})$$

следовательно, из (A.14) и (A.16) получаем

$$\begin{aligned} (z + x_n) \langle t(z) t(x_1) \dots t(x_n) \dots t(x_N) \rangle \Big|_{z=-x} &= \\ &= x_n K_n(x_1, \dots, x_N) \langle t(x_1) \dots \cancel{t(x_n)} \dots t(x_N) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где

$$K_n(x_1, \dots, x_N) = f(\omega^2) r \left(\prod_{i \neq n} f \left(\frac{x_n \omega^{-2}}{x_i} \right) f \left(\frac{x_n \omega^{-1}}{x_i} \right) - \prod_{i \neq n} f \left(\frac{x_n \omega^2}{x_i} \right) f \left(\frac{x_n \omega}{x_i} \right) \right). \quad (\text{A.18})$$

Таким образом, мы доказали, что матричный элемент (A.2) как функция переменной z имеет простые полюсы при (A.1), и соответствующие вычеты (A.12) и (A.17) могут быть представлены как матричные элементы меньшего числа тех же операторов $t(x_i)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Регулярная часть функции $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$

Рассмотрим функцию $J_{N,a}(z, X)$ как аналитическую функцию переменной z , зависящую от параметров $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Возможно выделить вклад полюсов от регулярной части:

$$\begin{aligned} J_{N+1,a}(z, X) &= J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X) + \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{z + x_n} K_n(X) J_{N-1}(\hat{X}_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{z - x_n \omega^2} B_n^+(X) J_{N,a}(x_n \omega, \hat{X}_n) - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{z - x_n \omega^{-2}} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где мы ввели обозначения $\hat{X}_n = \{x_1, \dots, \cancel{x_n}, \dots, x_N\}$. Функция $J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X)$ является регулярной функцией переменной z везде, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Так как сумма по полюсам имеет порядок $O(z^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$, асимптотическое поведение функции $J_{N+1,a}(z, X)$ как функции переменной z определяется $J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X)$. Разложение (B.1) применимо и вблизи нуля.

Можно рассмотреть разложение функции $J_{N+1,a}(z, X)$ вблизи точки $z = \infty$:

$$\begin{aligned} J_{N+1,a}(z, X) &= J_{N+1,a}^{(0)}(z, X) - \sum_{n=1}^N \frac{x_n^{-1}}{z^{-1} + x_n^{-1}} K_n(X) J_{N-1}(\hat{X}_n) - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{x_n^{-1} \omega^2}{z^{-1} - x_n^{-1} \omega^2} B_n^+(X) J_{N,a}(x_n \omega^{+1}; \hat{X}_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n^{-1} \omega^{-2}}{z^{-1} - x_n^{-1} \omega^{-2}} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}; \hat{X}_n), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где функция $J_{N+1,a}^{(0)}(z, X)$ регулярна везде, кроме точек $z = 0, \infty$. Вблизи точки $z = 0$ поведение функции $J_{N+1,a}(z, X)$ определяется $J_{N+1,a}^{(0)}(z, X)$.

Отметим, что разложения (B.1) и (B.2) применимы для операторов любого вида, которые мы рассматриваем, т. е. не только для экспоненциальных операторов, но также и для операторов потомков. Здесь мы ограничим наше внимание только экспоненциальными операторами. Как обсуждалось в разделе 2, формфакторы

экспоненциальных операторов должны обладать свойством факторизации. Следовательно, единственные неизвестные функции $J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X)$ и $J_{N+1,a}^{(0)}(z, X)$ в рекурсивных соотношениях могут быть легко определены. Действительно, рассмотрим асимптотики функции $J_{N+1,a}(z, X)$ при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$. Используя свойство факторизации (2.18), получаем

$$J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X) = J_{N+1,a}^{(0)}(z, X) = J_{1,a} J_{N,a}(X), \quad (\text{Б.3})$$

где одночастичный формфактор дается выражением

$$J_{1,a} = \gamma + \gamma^{-1} + h. \quad (\text{Б.4})$$

Принимая во внимание явные выражения для h и γ , получаем предложение 1.

Теперь получим полезное тождество для функций $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$. Определим функцию

$$\begin{aligned} D_{n,a}(X) = & \sum_{n=1}^N K_n(X) J_{N-1}(\hat{X}_n) + \sum_{n=1}^N x_n \omega^2 B_n^+(X) J_{N,a}(x_n \omega^{+1}; \hat{X}_n) - \\ & - \sum_{n=1}^N x_n \omega^{-2} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}; \hat{X}_n). \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Из разложений (Б.1) и (Б.2) следует, что

$$J_{N+1,a}^{(0)}(z, X) - J_{N+1,a}^{(\infty)}(z, X) = D_{N,a}(X). \quad (\text{Б.6})$$

Принимая во внимание (Б.3), получаем

$$D_{N,a} = 0. \quad (\text{Б.7})$$

Это равенство является нетривиальным тождеством для функций $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$, и мы используем его в приложении В для доказательства того, что формфакторы экспоненциальных операторов удовлетворяют квантовым уравнениям движения.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Уравнение движения для формфакторов

Здесь мы докажем, что формфакторы в модели БД совместимы с уравнением движения:

$$\partial \bar{\partial} \varphi = 8\sqrt{2} \pi \mu b (e^{\sqrt{2} b \varphi} - e^{-b \varphi / \sqrt{2}}). \quad (\text{В.1})$$

Производные от полей приводят к умножению их формфакторов на компоненты тензора энергии-импульса в соответствии с обычными правилами $P_\mu \rightarrow i\partial_\mu$. Введем обозначения

$$S_n(X) = x_1^n + \dots + x_N^n, \quad S_n(z, X) = z^n + S_n(X), \quad (\text{В.2})$$

где $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Пусть $z = e^\theta$ и $x_n = e^{\theta_n}$. Компоненты импульса даются выражениями

$$P_z(\theta, \theta_1, \dots, \theta_N) = -\frac{m}{2} S_1(z, X), \quad P_{\bar{z}}(\theta, \theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{m}{2} S_{-1}(z, X), \quad (\text{В.3})$$

поэтому

$$\langle \text{vac} | \partial \bar{\partial} \varphi | \theta, \theta_1, \dots, \theta_N \rangle = -\frac{m^2}{4} S_1(z, X) S_{-1}(z, X) \frac{d}{da} f_a(\theta, \theta_1, \dots, \theta_N) \Big|_{a=0}. \quad (\text{B.4})$$

Пусть

$$J'_{N+1}(z, X) = \frac{d}{da} J_{N+1,a}(z, X) \Big|_{a=0}. \quad (\text{B.5})$$

Используя эти обозначения, мы можем представить уравнение движения в виде

$$S_1(z, X) S_{-1}(z, X) J'_{N+1}(z, X) = A (J_{N+1, \sqrt{2}b} - J_{N+1, -b/\sqrt{2}}), \quad (\text{B.6})$$

где константа A дается выражением

$$A = -\frac{8\sqrt{2}\pi\mu b}{m^2} \langle e^{\sqrt{2}b\varphi} \rangle \quad (\text{B.7})$$

и мы приняли во внимание, что вакуумные средние соответствующих экспоненциальных операторов совпадают [31]:

$$\langle e^{\sqrt{2}b\varphi} \rangle = \langle e^{-b\varphi/\sqrt{2}} \rangle = \frac{m^2}{\mu} \frac{1}{48\sqrt{3}Qb \sin(\pi/(6Qb)) \sin(\pi/(3Qb))}. \quad (\text{B.8})$$

Докажем уравнение движение (B.6) рекурсивно. Предположим, что оно выполняется для некоторого значения N . Взяв производные от обеих частей рекурсивного соотношения (3.27), получаем

$$\begin{aligned} S_1(z, X) S_{-1}(z, X) J'_{N+1}(z, X) &= \sum_{n=1}^N x_n K_n(\hat{X}_n) S_{-1}(\hat{X}_n) J'_{N-1}(\hat{X}_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{z + x_n} K_n(X) S_1(\hat{X}_n) S_{-1}(\hat{X}_n) J'_{N-1}(\hat{X}_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^N x_n \omega^2 B_n^+(X) S_{-1}(x_n \omega, \hat{X}_n) J'_{N+1}(x_n \omega, \hat{X}_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{z - x_n \omega^2} B_n^+(X) S_1(x_n \omega, \hat{X}_n) S_{-1}(x_n \omega, \hat{X}_n) J'_N(x \omega, \hat{X}_n) - \\ &- \sum_{n=1}^N x_n \omega^{-2} B_n^-(X) S_{-1}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) J'_{N+1}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{z - x_n \omega^{-2}} B_n^-(X) S_1(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) S_{-1}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) J'_N(x \omega^{-1}, \hat{X}_n). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

В правой части здесь можно применить гипотезу индукции (B.6). Кроме того, мы используем следующие тождества:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{S_1(\hat{X}_n)} K_n(X) J_{N-1,a}(\hat{X}_n) &+ \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{S_1(x_n \omega, \hat{X}_n)} B_n^+(X) J_{N,a}(x_n \omega, \hat{X}_n) - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{S_1(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n)} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) = \\ &= -J_{N+1,a}(-S_1(X), X) + J_{1,a} J_{N,a}(X), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{z + x_n} K_n(X) J_{N-1,a}(\hat{X}_n) + \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{z - x_n \omega^2} B_n^+ J_{N,a}(x_n \omega, \hat{X}_n) - \\
 & - \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{z - x_n \omega^{-2}} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n) = \\
 & = J_{N+1,a}(z, X) - J_{1,a} J_{N,a}(X),
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

где учтено равенство (B.6). Поэтому (B.9) принимает вид

$$\begin{aligned}
 S_1(z, X) S_{-1}(z, X) J'_{N+1}(z, X) = A(J_{N+1, \sqrt{2}b}(z, X) - J_{N+1, b/\sqrt{2}}(z, X) - \\
 - J_{N+1, \sqrt{2}b}(-S_1(X), X) + J_{N+1, b/\sqrt{2}}(-S_1(X), X)).
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Сравним это уравнение с уравнением (B.6). Для доказательства уравнения движения для $N + 1$ достаточно показать, что два последних члена равны нулю:

$$-J_{N+1, \sqrt{2}b}(-S_1(X), X) + J_{N+1, b/\sqrt{2}}(-S_1(X), X) = 0. \tag{B.13}$$

В действительности эти члены равны нулю по отдельности вне зависимости от a . Для доказательства (B.13) отметим, что функция $J_{N+1,a}(-S_1(X), X)$ симметрична по переменным x_i . Поэтому каждая из этих переменных может быть выбрана в качестве z , т. е.

$$J_{N+1,a}(-S_1, X) = J_{N+1,a}(-S_1(x_{N+1}, \hat{X}_j), x_{N+1}, \hat{X}_j). \tag{B.14}$$

Левая часть является x_N -независимой, в то время как правая часть x_j -независима. Это доказывает, что функция $J_{N+1,a}(-S_1(X), X)$ – константа по всем переменным X . Покажем, что она равна нулю. Рассмотрим предел $x_N \rightarrow \infty$. Из рекурсивных соотношений получаем

$$\begin{aligned}
 J_{N+1,a}(-S_1(X); X) = J_{1,a} J_{N,a}(X) + \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{S_1(\hat{X}_n)} K_n(X) J_{N-1,a}(\hat{X}_n) + \\
 + \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^2}{S_1(x_n \omega, \hat{X}_n)} B_n^+(X) J_{N,a}(x_n \omega^{+1}; \hat{X}_n) - \\
 - \sum_{n=1}^N \frac{x_n \omega^{-2}}{S_1(x_n \omega^{-1}, \hat{X}_n)} B_n^-(X) J_{N,a}(x_n \omega^{-1}; \hat{X}_n).
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Так как левая часть – константа, можно вычислить ее в пределе $x_N \rightarrow \infty$. В этом пределе единственные не исчезающие члены в сумме в правой части те, для которых $n = N$. Используя свойство факторизации, можно показать, что в лидирующем порядке по x_N функция $J_{N+1,a}(-S_1(X); X) \rightarrow 0$. Так как эта функция – константа, мы доказали (B.13). Следовательно, доказано, что формфакторы $J_{N,a}(x_1, \dots, x_N)$ действительно удовлетворяют уравнениям движения модели БД.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Четырехточечный симметричный полином $\Lambda_4(x_1, \dots, x_4)$

Здесь мы приводим коэффициенты полинома $\Lambda_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$. Выберем параметризацию

$$\Lambda_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sum_{\substack{i,j,k,l=0 \\ i+2j+3k+4l=18 \\ i+j+k+l \leq 9}}^{18} c_{i,j,k,l} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k \sigma_4^l. \quad (\text{Г.1})$$

В этих обозначениях коэффициенты $c_{i,j,k,l}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} c_{0,0,2,3} &= -J^4 - J(-1 + h^2)(3J - 24h + 7J^2h + 4Jh^2 + 74h^3 - 6J^2h^3 - \\ &\quad - 13Jh^4 - 85h^5 + J^2h^5 + 7Jh^6 + 45h^7 - Jh^8 - 11h^9 + h^{11}), \\ c_{0,1,0,4} &= 0, \\ c_{0,1,4,1} &= Jh(4 - 5h^2 + h^4)(-3 + J^2 + Jh + 7h^2 - Jh^3 - 5h^4 + h^6), \\ c_{0,2,2,2} &= 2J^4 + J(-1 + h^2)^2(-6J + 21h - 5J^2h - 5Jh^2 - \\ &\quad - 46h^3 + J^2h^3 + 6Jh^4 + 34h^5 - Jh^6 - 10h^7 + h^9), \\ c_{0,3,0,3} &= 0, \\ c_{0,3,4,0} &= J^4 - J^2(-1 + h^2)(-3 + Jh + 4h^2 - h^4), \\ c_{0,4,2,1} &= -J^4 + J(-1 + h^2)(-3J - 3h + 2J^2h + 5Jh^2 + 7h^3 - 2Jh^4 - 5h^5 + h^7), \\ c_{0,5,0,2} &= 0, \\ c_{1,0,3,2} &= 3J^4 + J(-1 + h^2)(9J - 24h + 13J^2h + 4Jh^2 + 74h^3 - 12J^2h^3 - 25Jh^4 - \\ &\quad - 85h^5 + 2J^2h^5 + 14Jh^6 + 45h^7 - 2Jh^8 - 11h^9 + h^{11}), \\ c_{1,1,1,3} &= J^4 + Jh(-1 + h^2)(-27 + 7J^2 - 40Jh + 33h^2 - 6J^2h^2 + 74Jh^3 + \\ &\quad + 46h^4 + J^2h^4 - 44Jh^5 - 93h^6 + 11Jh^7 + 52h^8 - Jh^9 - 12h^{10} + h^{12}), \\ c_{1,1,5,0} &= -J^2h(J + h - h^3)(4 - 5h^2 + h^4), \\ c_{1,2,3,1} &= -J^4 + J(-1 + h^2)^2(3J + 15h + J^2h + 17Jh^2 - 19h^3 - 9Jh^4 + 4h^5 + Jh^6), \\ c_{1,3,1,2} &= -2J^4 - Jh(-1 + h^2)^2(27 - 5J^2 + 5Jh - 42h^2 + J^2h^2 - Jh^3 + 17h^4 - 2h^6), \\ c_{1,4,3,0} &= -J^4 + J^3h(-1 + h^2), \\ c_{1,5,1,1} &= J^4 - J^2h(-1 + h^2)(2J + h - h^3), \\ c_{2,0,0,4} &= -J^4 - J(-1 + h^2)(3J - 24h + 7J^2h + 4Jh^2 + 74h^3 - 6J^2h^3 - \\ &\quad - 13Jh^4 - 85h^5 + J^2h^5 + 7Jh^6 + 45h^7 - Jh^8 - 11h^9 + h^{11}), \\ c_{2,0,4,1} &= -3J^4 - J^2(-1 + h^2)^2(-9 - 5Jh - 5h^2 + Jh^3 + 6h^4 - h^6), \\ c_{2,1,2,2} &= -3J^4 - Jh(-1 + h^2)(-54 + 21J^2 - 36Jh + 138h^2 - 14J^2h^2 + 69Jh^3 - \\ &\quad - 118h^4 + 2J^2h^4 - 43Jh^5 + 38h^6 + 11Jh^7 - 4h^8 - Jh^9), \\ c_{2,2,0,3} &= 2J^4 + J(-1 + h^2)^2(-6J + 21h - 5J^2h - 5Jh^2 - \\ &\quad - 46h^3 + J^2h^3 + 6Jh^4 + 34h^5 - Jh^6 - 10h^7 + h^9), \\ c_{2,2,4,0} &= -J^4 + J^2(-1 + h^2)(-3 - 4Jh + 3h^2 + Jh^3), \\ c_{2,3,2,1} &= 3J^4 - J(-1 + h^2)(-6J - 6h - 3J^2h + Jh^2 + 13h^3 + 2J^2h^3 + 7Jh^4 - \\ &\quad - 8h^5 - 2Jh^6 + h^7), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{2,4,0,2} &= -J^4 + J(-1 + h^2)(-3J - 3h + 2J^2h + 5Jh^2 + 7h^3 - 2Jh^4 - 5h^5 + h^7), \\
 c_{2,5,2,0} &= 0, \\
 c_{3,0,1,3} &= 3J^4 + J(-1 + h^2)(9J - 24h + 13J^2h + 4Jh^2 + 74h^3 - 12J^2h^3 - \\
 &\quad - 25Jh^4 - 85h^5 + 2J^2h^5 + 14Jh^6 + 45h^7 - 2Jh^8 - 11h^9 + h^{11}), \\
 c_{3,0,5,0} &= J^4 - J^2(-1 + h^2)(-3 + Jh + 4h^2 - h^4), \\
 c_{3,1,3,1} &= 3J^4 + Jh(-1 + h^2)(-3 + 13J^2 + 4Jh + 7h^2 - 8J^2h^2 - 5Jh^3 - 5h^4 + \\
 &\quad + J^2h^4 + Jh^5 + h^6), \\
 c_{3,2,1,2} &= -J^4 + J(-1 + h^2)^2(3J + 15h + J^2h + 17Jh^2 - \\
 &\quad - 19h^3 - 9Jh^4 + 4h^5 + Jh^6), \\
 c_{3,3,3,0} &= J^4, \\
 c_{3,4,1,1} &= -J^4 + J^3h(-1 + h^2), \\
 c_{4,0,2,2} &= -3J^4 - J^2(-1 + h^2)^2(-9 - 5Jh - 5h^2 + Jh^3 + 6h^4 - h^6), \\
 c_{4,1,0,3} &= Jh(4 - 5h^2 + h^4)(-3 + J^2 + Jh + 7h^2 - Jh^3 - 5h^4 + h^6), \\
 c_{4,1,4,0} &= -J^4 + J^3h(-1 + h^2), \\
 c_{4,2,2,1} &= -J^4 + J^2(-1 + h^2)(-3 - 4Jh + 3h^2 + Jh^3), \\
 c_{4,3,0,2} &= J^4 - J^2(-1 + h^2)(-3 + Jh + 4h^2 - h^4), \\
 c_{5,0,3,1} &= J^4 - J^2(-1 + h^2)(-3 + Jh + 4h^2 - h^4), \\
 c_{5,1,1,2} &= -J^2h(J + h - h^3)(4 - 5h^2 + h^4).
 \end{aligned}$$

Благодарности. Автор благодарен Дз. Шираши, М. Лашкевичу и Я. Пугаю за полезные дискуссии, а также Г. Такачу и Г. Делфино за чтение первой версии статьи и полезные замечания. Работа поддержана Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (контракты № Р1339 и № 02.740.11.5165) и министерством науки и технологии России (грант НШ-6501.2010.2).

Список литературы

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [2] A. B. Zamolodchikov, “Integrable field theory from conformal field theory”, *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Advanced Studies in Pure Mathematics, **19**, eds. M. Jimbo, T. Miwam, A. Tsuchiya, Academic Press, Boston, MA, 1989, 641–674.
- [3] A. B. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **4**:16 (1989), 4235–4248.
- [4] G. Takács, *Nucl. Phys. B*, **489**:3 (1997), 532–556, arXiv: hep-th/9604098.
- [5] N. Reshetikhin, F. Smirnov, *Commun. Math. Phys.*, **131**:1 (1990), 157–177.
- [6] D. Bernard, A. LeClair, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 721–751.
- [7] F. A. Smirnov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:8 (1991), 1407–1428.
- [8] C. J. Efthimiou, *Nucl. Phys. B*, **398**:3 (1993), 697–740.
- [9] F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theories*, Advanced Series in Mathematical Physics, **14**, World Scientific, Singapore, 1992.
- [10] J. Cardy, G. Mussardo, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 387–402.
- [11] G. Delfino, G. Mussardo, P. Simonetti, *Nucl. Phys. B*, **473**:3 (1996), 469–508, arXiv: hep-th/9603011.

- [12] A. Zamolodchikov, I. Ziyatdinov, *Nucl. Phys. B*, **849**:3 (2011), 654–674.
- [13] G. Delfino, P. Grinza, G. Mussardo, *Nucl. Phys. B*, **737**:3 (2006), 291–303.
- [14] B. Pozsgay, G. Takács, *Nucl. Phys. B*, **788**:3 (2008), 167–208.
- [15] B. Pozsgay, G. Takács, *Nucl. Phys. B*, **788**:3 (2008), 209–251, arXiv:0706.3605.
- [16] A. Koubek, G. Mussardo, *Phys. Lett. B*, **311**:1–4 (1993), 193–201, arXiv:hep-th/9306044.
- [17] A. Fring, G. Mussardo, P. Simonetti, *Nucl. Phys. B*, **393**:1–2 (1993), 413–441, arXiv:hep-th/9211053.
- [18] R. K. Dodd, R. K. Bullough, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **352**:1671 (1977), 481–503.
- [19] A. Fring, A. Mussardo, P. Simonetti, *Phys. Lett. B*, **307**:1–2 (1993), 83–90.
- [20] C. Acerbi, *Nucl. Phys. B*, **497**:3 (1997), 589–610, arXiv:hep-th/9701062.
- [21] S. L. Lukyanov, *Commun. Math. Phys.*, **167**:1 (1995), 183–226, arXiv:hep-th/9307196.
- [22] S. L. Lukyanov, *Modern Phys. Lett. A*, **12**:33 (1997), 2543–2250, arXiv:hep-th/9703190.
- [23] S. L. Lukyanov, *Phys. Lett. B*, **408**:1–4 (1997), 192–200, arXiv:hep-th/9704213.
- [24] V. A. Fateev, M. Lashkevich, *Nucl. Phys. B*, **696**:3 (2004), 301–350, arXiv:hep-th/0402082.
- [25] V. A. Fateev, V. V. Postnikov, Y. P. Pugai, *Письма в ЖЭТФ*, **83**:4 (2006), 206–212, arXiv:hep-th/0601073.
- [26] V. A. Fateev, Y. P. Pugai, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304013, 29 pp.
- [27] Y. Hara, M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi, *Free field approach to the dilute A_L models*, arXiv:math/9902150.
- [28] V. A. Brazhnikov, S. L. Lukyanov, *Nucl. Phys. B*, **512**:3 (1998), 616–636, arXiv:hep-th/9707091.
- [29] B. Feigin, M. Lashkevich, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304014, 32 pp.
- [30] O. Alekseev, M. Lashkevich, *JHEP*, **07** (2010), 095, 35 pp., arXiv:0912.5225.
- [31] V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **516**:3 (1998), 652–674, arXiv:hep-th/9709034.
- [32] A. Koubek, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:11 (1994), 1909–1927, arXiv:hep-th/9211134.
- [33] G. Delfino, G. Mussardo, *Nucl. Phys. B*, **455**:3 (1995), 724–758.
- [34] G. Delfino, P. Simonetti, J. L. Cardy, *Phys. Lett. B*, **387**:2 (1996), 327–333, arXiv:hep-th/9607046.
- [35] G. Mussardo, P. Simonetti, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:19 (1994), 3307–3337, arXiv:hep-th/9308057.
- [36] V. A. Fateev, *Phys. Lett. B*, **324**:1 (1994), 45–51.
- [37] R. Guida, N. Magnoli, *Phys. Lett. B*, **411**:1–2 (1997), 127–133, arXiv:hep-th/9706017.

Поступила в редакцию 20.01.2012