Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 497–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:07:56

© 2012 г.

А. Х. Хачатрян*, Х. А. Хачатрян†

КАЧЕСТВЕННЫЕ РАЗЛИЧИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЯХ

Рассматривается уравнение Больцмана в рамках одной нелинейной модели для задач течения газа в полупространстве (задача Крамерса). Доказывается существование положительного и ограниченного решения, найден предел этого решения в бесконечности. Показано, что учет нелинейной зависимости интеграла столкновения от функции распределения приводит к асимптотически новому решению исходного уравнения. Для иллюстрации результата приведены примеры функций, описывающих нелинейность интеграла столкновения.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, нелинейность, среднемассовая скорость, ограниченное решение, монотонность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в основе физической кинетики лежит уравнение Больцмана (УБ), которое первоначально было создано в основном для описания кинетики разреженного газа, а в дальнейшем стало предметом исследования в различных областях физики [1]–[6]. В кинетической теории разреженного газа важное место занимает круг задач, связанных с изучением течения газа в полупространстве, ограниченном твердой стенкой (задача Крамерса), а также течения газа между двумя параллельными пластинками (задача Куэтта) [1], [2]. При этом молекулы газа взаимодействуют между собой по определенным внутриатомным законам, а некоторая часть из них взаимодействует со стенкой, что и обуславливает нелинейную зависимость интеграла столкновения от функции распределения частиц. Поэтому для УБ разработаны различные модели, среди которых особое место занимает модель Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [7]. В этой модели интеграл столкновения stf заменяется $f_0^{loc} - f$, где f – искомая функция распределения (ФР), f_0^{loc} – локально-равновесная функция Максвелла. Применение этой модели сопровождается приближенной линеаризацией полученного нелинейного уравнения. При этом

*Армянский государственный аграрный университет, Ереван, Армения.
E-mail: Aghavard@hotmail.ru

†Институт математики НАН Республики Армения, Ереван, Армения.
E-mail: Khach82@rambler.ru

в предположении, что среднемассовая скорость газа намного меньше молекулярной скорости, локально-равновесная функция Максвелла заменяется суммой первых двух членов разложения в степенной ряд. В случае задач Крамерса такая линеаризация приводит к тому, что среднемассовая скорость $u(x)$ неограниченно растет как $O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (где x – расстояние от стенки). Это противоречит вышеприведенному предположению о малости среднемассовой скорости. Оказывается, что линеаризация может существенно исказить задачу как в количественном, так и в качественном отношении, т. е. привести к асимптотически иному решению, которое отличается от решения исходного нелинейного интегродифференциального уравнения.

В настоящей работе на примере одной нелинейной модели для задачи Крамерса доказывается существование положительного и ограниченного решения, найден предел этого решения в бесконечности. В рамках предложенной нами модели приводятся примеры функций, описывающих нелинейность интеграла столкновения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в $\mathbb{R}^3$ декартову систему координат $(x; y; z)$, и пусть газ заполняет полупространство $x > 0$, ограниченное твердой стенкой-плоскостью $x = 0$.

Будем предполагать, что газ стационарно течет по положительному направлению оси OY . Пусть $f(x, \vec{s})$ – искомая ФР частиц по скоростям $\vec{s}(s_1, s_2, s_3)$. В силу предполагаемой плоской симметрии задачи функция $f(x, \vec{s})$ не зависит от y и z . УБ в рамках предложенной нами нелинейной модели для безразмерной задачи Крамерса записывается в следующей форме:

$$s_1 \frac{\partial f(x, \vec{s})}{\partial x} + f(x, \vec{s}) = f_0(\vec{s})(1 + 2s_2 R(u(x))). \quad (1)$$

Здесь $f_0(\vec{s}) = (1/\pi^{3/2})e^{-s^2}$ – безразмерная ФР Максвелла, $u(x)$ – среднемассовая скорость газа, которая связана с ФР $f(x, \vec{s})$:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_2 f(x, \vec{s}) d^3 s, \quad (2)$$

функция $R(\tau)$ описывает нелинейную зависимость от ФР, и условия, налагаемые на нее, приводятся ниже (см. теорему 1). Заметим, что в случае $R(\tau) \equiv \tau$ мы приходим к задаче Крамерса для линеаризованной БГК-модели УБ.

Представим искомую ФР в виде

$$f(x, \vec{s}) = f_0(\vec{s})(1 + h(x, \vec{s})),$$

где $h(x, \vec{s})$ – искомая ФР, являющаяся поправкой к безразмерной ФР Максвелла, вызванной присутствием стенки. На функцию $f(x, \vec{s})$ налагается также условие непротекания:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1 f(x, \vec{s}) d^3 s = 0.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$s_1 \frac{\partial h(x, \vec{s})}{\partial x} + h(x, \vec{s}) = 2s_2 R(u(x)). \quad (3)$$

Обозначим через $h^-(x, \vec{s})$ и $h^+(x, \vec{s})$ функции, описывающие распределение по скоростям для молекул,двигающихся соответственно в сторону стенки и обратно:

$$h^-(x, \vec{s}) = \begin{cases} 0, & \text{если } s_1 < 0, \\ h(x, -s_1, s_2, s_3), & \text{если } s_1 \geq 0, \end{cases} \quad h^+(x, \vec{s}) = \begin{cases} h(x, \vec{s}), & \text{если } s_1 \geq 0, \\ 0, & \text{если } s_1 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Умножая обе части уравнения (3) на $(1/\pi)s_2 e^{-s_2^2} e^{-s_3^2}$ и интегрируя по s_2 и s_3 от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$s \frac{\partial \varphi(x, s)}{\partial x} + \varphi(x, s) = R(u(x)), \quad x > 0. \quad (5)$$

Здесь $s \equiv s_1$,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} [\varphi^+(x, s) + \varphi^-(x, s)] ds, \quad (6)$$

$$\varphi(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_2 e^{-s_2^2} e^{-s_3^2} h(x, s, s_2, s_3) ds_2 ds_3, \quad (7)$$

$$\varphi^+(x, s) = \begin{cases} \varphi(x, s), & \text{если } s \geq 0, \\ 0, & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad \varphi^-(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s < 0, \\ \varphi(x, -s), & \text{если } s \geq 0. \end{cases}$$

К уравнению (5) присоединим граничные условия на стенке:

$$\varphi^+(0, s) = \int_0^\infty Q(s, s') \varphi^-(0, s') ds', \quad s > 0, \quad (8)$$

$$\varphi^-(x, s) = o(e^{x/s}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Здесь функция $Q(s, s')$ описывает закон отражения от стенки.

Из уравнения (5) с учетом условия (9) имеем

$$\varphi^+(x, s) = ce^{-x/s} + \int_0^x e^{-(x-t)/s} R(u(t)) \frac{dt}{s}, \quad (10)$$

$$\varphi^-(x, s) = \int_x^\infty e^{-(t-x)/s} R(u(t)) \frac{dt}{s}. \quad (11)$$

Из уравнения (6) с учетом формул (8), (10) и (11) получим

$$u(x) = \int_0^\infty K(x-t)R(u(t)) dt + \int_0^\infty K_1(x,t)R(u(t)) dt, \quad (12)$$

где

$$K_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x/s} e^{-s^2} ds \int_0^\infty \frac{Q(s,s')}{s'} e^{-t/s'} ds', \quad (13)$$

а

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-|x|/s} e^{-s^2} \frac{ds}{s} \quad (14)$$

– известное ядро Веландера [1], [2].

Нетрудно проверить, что выполняется условие консервативности:

$$K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1.$$

Заметим, что в частном случае $Q(s,s') = \varepsilon \delta(s-s')$ (δ – обобщенная функция Дирака) $K_1(x,t)$ становится зависящим от суммы аргументов и $K_1(x) \equiv \varepsilon K(x)$. При этом предполагается, что часть частиц ε , $0 \leq \varepsilon < 1$, отражается от стенки зеркально, а остальная часть $1 - \varepsilon$ поглощается стенкой и затем изотропно переизлучается. Величина ε называется коэффициентом аккомодации.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (12) относительно искомой измеримой и вещественной функции $u(x)$, где $K(x)$ и $K_1(x,t)$ задаются посредством формул (13), (14). Функция $Q(s,s')$, определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, – измеримая функция, причем

$$Q(s,s') \geq 0, \quad (s,s') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \int_0^\infty Q(s,s') ds' \leq 1. \quad (15)$$

Поскольку взаимодействие частиц со стенкой не сопровождается потерей или “рождением” новых частиц, то граничное условие должно быть консервативным. Этот факт отражается в условии (15).

Пусть R – описывающая нелинейность уравнения (12), измеримая и вещественная функция, определенная на $(-\infty, +\infty)$. Пусть числа ξ и η , $2\xi < \eta$, – первые положительные корни уравнений $R(x) = 2x$ и $R(x) = x$ соответственно. Далее предполагается, что $R \in C[\xi, \eta]$, $R \uparrow$ на отрезке $[\xi, \eta]$, $R(0) = 0$.

Обозначим через $M(0, +\infty)$ пространство измеримых и существенно ограниченных функций на $(0, +\infty)$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены вышеприведенные условия относительно функций K , Q и R . Тогда уравнение (12) имеет положительное решение из пространства $M(0, +\infty)$. Более того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \eta. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие итерации:

$$u_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x-t)R(u_n(t)) dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x/s} e^{-s^2} \left[\int_0^\infty Q(s, s') \int_0^\infty e^{-t/s'} R(u_n(t)) \frac{dt}{s'} ds' \right] ds, \quad (17)$$

$$u_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x > 0. \quad (18)$$

Ниже мы докажем, что

$$u_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad x > 0, \quad (19)$$

$$u_n(x) \geq \xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x > 0. \quad (20)$$

Сначала докажем утверждение (19). Используя соотношения (14) и (15), из формулы (17) получим

$$u_1(x) = \int_0^\infty K(x-t)R(\eta) dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x/s} e^{-s^2} \left(\int_0^\infty \frac{1}{s'} Q(s, s') \int_0^\infty e^{-t/s'} R(\eta) dt ds' \right) ds = \\ = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-|x-t|/s} e^{-s^2} \frac{dt ds}{s} + \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} e^{-x/s} \left(\int_0^\infty Q(s, s') ds' \right) ds \leq \\ \leq \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-|x-t|/s} e^{-s^2} \frac{dt ds}{s} + \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} e^{-x/s} ds = \\ = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = \eta = u_0(x). \quad (21)$$

Предполагая, что $u_n(x) \geq u_{n+1}(x)$, из монотонности функции R получим $u_{n+1}(x) \geq u_{n+2}(x)$.

Теперь докажем неравенства (20). При $n = 0$ последнее сразу следует из условия теоремы. Предположим, что $u_n(x) \geq \xi$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу свойств функций R и K из формулы (17) получаем

$$u_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty K(x-t)R(\xi) dt = 2\xi \int_{-\infty}^x K(z) dz \geq \xi$$

(ибо $\int_{-\infty}^0 K(z) dz = 1/2$). Следовательно, существует предел последовательности $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x), \quad (22)$$

причем этот предел по теореме Леви удовлетворяет уравнению (12). Кроме того,

$$\xi \leq u(x) \leq \eta. \quad (23)$$

Докажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \eta$. С этой целью рассмотрим усеченное нелинейное уравнение

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)R(f(t)) dt, \quad x > 0, \quad (24)$$

относительно функции $f(x)$ и следующие итерации для него:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x-t)R(f_n(t)) dt, \quad f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Индукцией по n нетрудно убедиться, что

$$1) \quad f_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad 2) \quad f_n(x) \geq \xi, \quad 3) \quad f_n(x) \leq u_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Записывая итерации (25) в виде

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^x K(\tau)R(f_n(x-\tau)) d\tau, \quad f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

индукцией по n нетрудно показать, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } (0, +\infty), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем из формулы (27) следует, что

$$f(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } (0, +\infty), \quad (28)$$

а из (26) получим

$$\xi \leq f(x) \leq u(x) \leq \eta. \quad (29)$$

Из выражения (28) с учетом (29) следует существование предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta_0 > 0. \quad (30)$$

В уравнении (24), учитывая непрерывность функции R и в силу известных свойств операций свертки, будем иметь

$$\eta_0 = R(\eta_0).$$

Так как η – первый положительный корень уравнения $R(x) = x$, то $\eta_0 = \eta$. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta. \quad (31)$$

Учитывая неравенство (29), в силу равенства (31) приходим к соотношению

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \eta. \quad (32)$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ниже на одном простом примере покажем, что решение соответствующей линейной задачи (в отличие от нелинейной) имеет линейный рост в бесконечности.

Рассмотрим основное уравнение (12) в линейном случае, т. е. когда $R(\tau) = \tau$. Пусть $Q(s, s') = \varepsilon \delta(s - s')$.

Тогда из уравнения (12) будем иметь

$$u(x) = \int_0^\infty K(x-t)u(t) dt + \varepsilon \int_0^\infty K(x+t)u(t) dt. \quad (33)$$

Изучению и точному решению консервативных однородных линейных интегральных уравнений типа (33) посвящена работа [8]. Из результатов работ [8] и [9] следует, что уравнение (33) обладает положительным решением с асимптотикой $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, среднемассовая скорость $u(x)$ в линейном приближении имеет асимптотику $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$, в то время как учет нелинейной зависимости интеграла столкновения приводит к ограниченному решению.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что вышеизложенный подход легко можно распространить на задачи переноса излучения монохроматического рассеяния в плоском слое при наличии отражающей поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что результаты также остаются в силе, если учесть нелинейный закон отражения от стенки, т. е. вместо условия (8) исследовать следующее граничное условие:

$$\varphi^+(0, s) = R_1 \left(\int_0^\infty Q(s, s') \varphi^-(0, s') ds' \right), \quad s > 0,$$

где на функцию $R_1(\tau)$ налагаются условия

$$R_1 \in C[0, \eta], \quad R_1 \uparrow \quad \text{на } [0, \eta], \quad 0 \leq R_1(\tau) \leq \tau, \quad \tau \in [0, \eta].$$

В качестве функции $R(\tau)$ можно привести несколько примеров:

$$1) \quad R(\tau) = \tau^\alpha, \quad \alpha \in (0; 1); \quad 2) \quad R(\tau) = \sqrt{\tau e^{\tau-1}}; \quad (34)$$

$$3) \quad R(\tau) = \sqrt{\tau(\tau + \sin \tau + 1)}. \quad (35)$$

Например, уравнение (12) со степенной нелинейностью (первый пример) принимает следующий вид:

$$u(x) = \int_0^\infty K(x-t)u^\alpha(t) dt + \int_0^\infty K_1(x,t)u^\alpha(t) dt, \quad (36)$$

$$\alpha \in (0, 1), \quad x > 0.$$

В этом случае корни уравнений $R(x) = 2x$ и $R(x) = x$ будут $\xi = (1/2)^{1/(1-\alpha)}$ и $\eta = 1$ соответственно. Следовательно, из доказанной теоремы 1 следует, что при условии (15) уравнение (36) с ядрами (13), (14) имеет положительное решение со свойствами

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/(1-\alpha)} \leq u(x) \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1.$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967.
- [2] С. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Applied Mathematical Sciences, **67**, Springer, New York, 1988.
- [3] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **41**:8 (2001), 1229–1241.
- [4] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, *ТМФ*, **125**:2 (2000), 339–342.
- [5] С. Е. Siewert, J. R. Thomas Jr., *Phys. Fluids*, **16**:9 (1973), 1557–1559.
- [6] L. B. Barichello, С. Е. Siewert, *European J. Appl. Math.*, **11**:4 (2000), 353–364.
- [7] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**:3 (1954), 511–525.
- [8] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:3 (1998), 466–482.
- [9] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244.

Поступила в редакцию 27.01.2012